

УДК 532.546:536.421

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЛЕГКОЙ ЖИДКОСТИ НАД ТЯЖЕЛОЙ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

© 2020 г. Г. Г. Цыпкин^{а,*}

^а Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

* E-mail: tsypkin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 07.10.2019 г.

После доработки 08.10.2019 г.

Принята к публикации 08.10.2019 г.

Исследуется устойчивость движущейся поверхности раздела между газом и жидкостью в пористой среде. Предполагается, что область газа располагается над областью, насыщенной жидкостью. Рассмотрено приложение задачи к фильтрации грунтовых вод и движению нефти в месторождении с газовой шапкой. Показано, что неустойчивость поверхности раздела возникает при движении грунтовых вод в несмачиваемой среде и в среде с градиентом капиллярного давления, а также при эксплуатации нефтяных месторождений, когда пластовое давление падает ниже давления в газовой шапке. Такая неустойчивость при наличии растворенной примеси может приводить к засолению грунтов, а при эксплуатации нефтяных месторождений к образованию остаточной нефти.

Ключевые слова: пористая среда, движущаяся поверхность раздела, капиллярное давление, неустойчивость, засоление грунтов, остаточная нефть

DOI: 10.31857/S0568528120020140

Исследованию устойчивости поверхности раздела между двумя жидкостями с различными свойствами в пористой среде посвящено большое количество работ. В результате неустойчивости первоначально плоская поверхность искажается, что приводит к образованию пальцев [1], возникновению конвективных течений [2]. Такие процессы представляют большой практический интерес. Так, неустойчивость фронта вытеснения при добыче нефти приводит к образованию остаточной неизвлекаемой нефти [3, 4]. Испарение подземных минерализованных вод вызывает увеличение концентрации примеси и засоление почв и грунтов [5, 6]. Такие процессы могут быть обусловлены возникновением неустойчивости поверхности раздела [7, 8].

Основные физические механизмы в пористых средах, определяющие устойчивое или неустойчивое состояние поверхности раздела, которая может быть и поверхностью фазового перехода, — это вязкость [9], сила тяжести [10, 11] и силы поверхностного натяжения [8, 12–14]. Наличие фазового перехода и капиллярных сил на поверхности раздела может стабилизировать положение тяжелой жидкости над легкой, однако в природе более распространенной является ситуация, когда легкая жидкость располагается над тяжелой. Так, в грунтах область, содержащая воздух, располагается над водонасыщенной областью и отделена от нее поверхностью раздела — уровнем грунтовых вод. Другим хорошо известным примером является нефтяное месторождение с газовой шапкой [15]. Однако при некоторых условиях положение легкой жидкости над тяжелой может быть неустойчивым [8].

На возможную неустойчивость уровня грунтовых вод указывают натурные наблюдения выпадения солей в осадок. Если в грунте образуется ровный слой твердой соли, то полагают, что к этому может привести испарение соленых грунтовых вод, поступающих из водоносного горизонта, в случае устойчивой поверхности раздела. Однако в некоторых случаях наблюдается образование в грунте волнообразного распределения или изолированных вкраплений твердой соли. Тогда, в последнем случае, естественно предположить, что процессу испарения и переходу соли из растворенного состояния в твердое предшествовали неустойчивость поверхности раздела и дробление области воды на несвязанные части [16].

В нефтяных месторождениях с газовой шапкой в процессе эксплуатации уровень нефти снижается. Если поверхность раздела газ–нефть является неустойчивой, то распад плоской поверх-

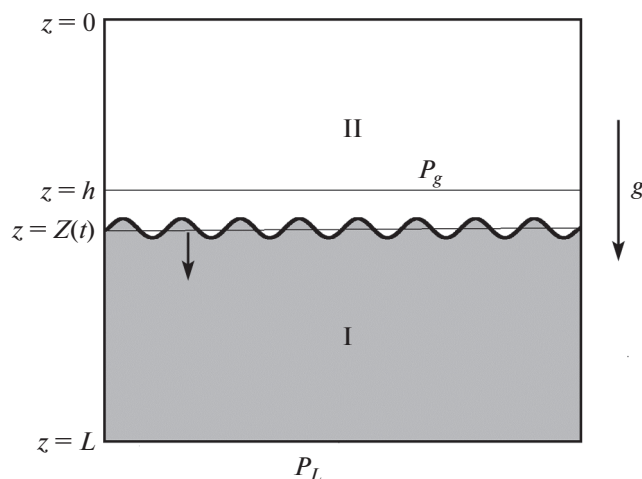


Рис. 1. Схема течения.

ности и нарушение сплошности нефтенасыщенной области будет приводить к образованию остаточной нефти (целиков).

В настоящей работе рассматривается устойчивость движущейся поверхности раздела, когда легкая жидкость располагается над тяжелой. Выведено дифференциальное уравнение, описывающее развитие возмущений поверхности раздела со временем. Проведено исследование влияния градиента давления и капиллярных сил на устойчивость. Рассмотрены приложения к неустойчивости уровня грунтовых вод и поверхности раздела нефть–газ при эксплуатации нефтяного резервуара с газовой шапкой.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Пусть горизонтальный слой однородной пористой среды толщины L расположен над высокопроницаемым слоем. Предположим, что область I ($h < z < L$) заполнена жидкостью, а область II ($0 < z < h$) — газом. Соответственно граница $z = h$ является поверхностью раздела (рис. 1).

Если давление P_L в высокопроницаемом слое $z = L$ не меняется, то поверхность раздела $z = h$ остается неподвижной. При изменении давления P_L поверхность раздела будет смещаться.

Будем рассматривать такой диапазон параметров, когда вязкость и плотность газа много меньше вязкости и плотности жидкости. Рассмотрим задачу в приближении постоянного фиксированного давления P_g в области газа и соответственно на поверхности раздела $z = h$. Такое приближение оправдано, поскольку вязкость газа мала и давление в области газа выравнивается быстрее, чем в области жидкости. Кроме того, область газа может быть связана с другими газосодержащими областями, что позволяет поддерживать давление P_g постоянным. Эти ограничения не являются принципиальными, но позволяют существенно упростить задачу. Изменение давления P_L вызывает смещение поверхности раздела по некоторому закону $z = Z(t)$.

Представленная схема течения может соответствовать движению грунтовых вод. Тогда высокопроницаемый слой $z = L$ является водоносным горизонтом, поверхность раздела $z = Z(t)$ соответствует уровню грунтовых вод, а постоянство давления воздуха в поверхностном слое обеспечивается связью с атмосферным воздухом. Изменение давления P_L может быть вызвано изменением уровня воды в открытом или подземном резервуаре, с которыми, как правило, связан водоносный горизонт. Тогда уровень грунтовых вод или повышается, или понижается.

Данная постановка задачи может быть использована для описания нефтедобычи из нефтяного месторождения с газовой шапкой. В этом случае извлечение нефти из высокопроницаемого пропластка или трещины $z = L$ происходит под действием силы тяжести или давления газовой шапки, а поверхность раздела газ–нефть $z = Z(t)$ при этом опускается.

Для описания движения жидкости будем использовать классическое приближение несжимаемой жидкости в изотермическом случае. Тогда уравнения фильтрации описываются уравнением несжимаемости и законом Дарси с учетом массовой силы

$$\operatorname{div} v = 0, \quad v = -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad}(P - \rho g z) \quad (1.1)$$

где v — вектор скорости фильтрации, k — проницаемость, μ — вязкость жидкости, P — давление, g — ускорение свободного падения, ρ — плотность жидкости.

Система уравнений (1.1) в области $Z(t) < z < L$ сводится к уравнению Лапласа для давления

$$\Delta P = 0 \quad (1.2)$$

На поверхности раздела $z = Z(t)$ разность между давлением в области жидкости и области газа равна капиллярному давлению

$$P_* = P_g + P_c \quad (1.3)$$

Индекс звездочка соответствует значению давления жидкости на границе раздела.

Капиллярное давление P_c отрицательно, если жидкость смачивает пористую среду и положительно для несмачиваемой среды. В общем случае будем считать, что капиллярное давление является переменной величиной, изменяющейся с глубиной по линейному закону $P_c(z) = P_g(a_c + b_c z)$, что может быть обусловлено, например, изменениями компонентного состава твердых частиц грунта или их физико-химических свойств [13].

Рассмотрим задачу, когда природное или техногенное воздействие на высокопроницаемый пласт приводит к изменению давления P_L и происходит за время, которое много меньше характерного времени движения поверхности раздела. Поскольку проницаемость водоносного горизонта на несколько порядков превышает проницаемость горизонтального слоя, то давление в горизонтальном направлении x выравнивается значительно быстрее, чем по вертикали. Тогда задачу о вертикальном движении поверхности раздела можно рассматривать в одномерном приближении, считая, что изменение давления в слое $z = L$ происходит мгновенно от значения P_{L0} до значения P_L . В этом случае поверхность раздела жидкость—газ будет двигаться по некоторому закону $z = Z(t)$ с начальным условием $Z(0) = Z_0$.

Соотношение (1.3) равенства давлений на движущейся поверхности раздела дополняется законом сохранения массы жидкости

$$\frac{dZ(t)}{dt} = -\frac{k}{\phi \mu} [\operatorname{grad}(P - \rho g z)]_n \quad (1.4)$$

здесь ϕ — пористость, индекс n — нормаль.

Отметим, что в рассматриваемом приближении пренебрегается испарением или конденсацией грунтовых вод, а также дегазацией или растворением газа в нефти.

2. КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЕ

Пусть в начальный момент $t = 0$ давление в водоносном горизонте постоянно $P_{L0} = \text{const}$. Тогда начальное положение уровня грунтовых вод $Z(0) = h$ определяется из гидростатического соотношения

$$P_{L0} = \rho g(L - h) + P_* \quad (2.1)$$

При изменении давления в водоносном горизонте до значения $P = P_L$ распределение давления находится из решения уравнения (1.2) с граничными условиями $z = L : P = P_L$ и $z = Z(t) : P = P_*$, которое имеет вид

$$P_{st}(z, t) = \frac{P_L - P_*}{L - Z(t)} z + \frac{P_* L - P_L Z(t)}{L - Z(t)} \quad (2.2)$$

Подставляя решение (2.2) в соотношение на границе (1.4), получаем закон движения поверхности раздела

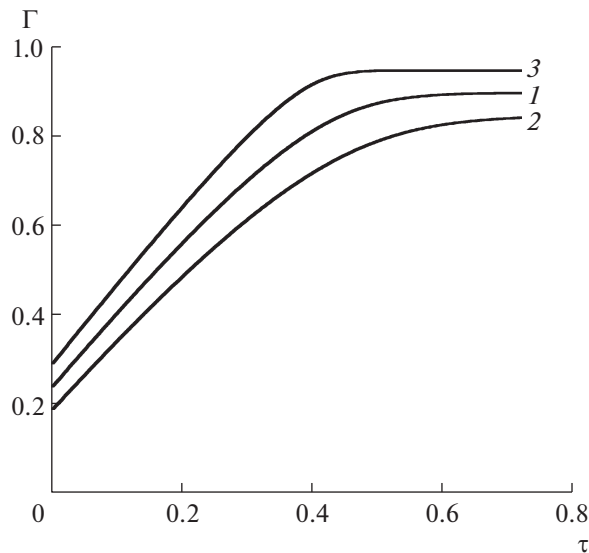


Рис. 2. Влияние постоянного капиллярного давления на закон движения поверхности раздела при $L = 20$ м, $P_{L0} = 2.5 \times 10^5$ Па, $P_L = 1.2 \times 10^5$ Па: 1–3 – $P_c = 0, -10^4, 10^4$ Па.

$$\frac{dZ(t)}{dt} = -\frac{k}{\phi\mu} \frac{P_L - P_*}{L - Z(t)} + \frac{k}{\phi\mu} \rho g$$

или в безразмерном виде

$$\frac{d\Gamma(\tau)}{d\tau} = -\frac{\Pi_L - (1 + a_c + \beta)}{1 - \Gamma(\tau)} + G - \beta, \quad (2.3)$$

$$\Gamma = \frac{Z}{L}, \quad \Pi_L = \frac{P_L}{P_g}, \quad \omega = \frac{kP_a}{\phi\mu}, \quad G = \frac{\rho g L}{P_g}, \quad \tau = \frac{t\omega}{L^2}, \quad \beta = b_c L$$

Интегрируя уравнение (2.3) и удовлетворяя начальному условию $\Gamma(0) = h/L \equiv \Gamma_0$, получаем решение в неявном виде для закона движения поверхности раздела в квазистационарном приближении

$$\Gamma_{st}(\tau) - \Gamma_0 - \alpha \ln \frac{\alpha - 1 + \Gamma_{st}(\tau)}{\alpha - 1 + \Gamma_0} = G\tau, \quad \alpha = \frac{\Pi_L - (1 + a_c + \beta)}{G - \beta} \quad (2.4)$$

Рассмотрим зависимость положения поверхности раздела от капиллярного давления при характерных параметрах, соответствующих течению грунтовых вод (рис. 2). Кривая 1 соответствует нулевому капиллярному давлению. Кривые 2 и 3 – смачиваемому и несмачиваемому грунту соответственно. Капиллярное давление здесь предполагалось постоянным ($b_c = 0$).

Указанные на рис. 2 параметры таковы, что поверхность раздела стремится к некоторому конечному положению внутри слоя $0 < z < L$, определяемому по гидростатической формуле (2.1). Как показывают расчеты, качественное поведение траекторий для случая движения грунтовых вод (рис. 3) и нефти (рис. 4) одинаково. При низком давлении в водоносном горизонте в смачиваемом грунте (рис. 3) траектория выходит на некоторое предельное положение уровня грунтовых вод (кривая 1), соответствующего гидростатическому равновесию при давлении P_L . Для несмачиваемого грунта траектория поверхности раздела (кривая 2) достигает водоносного горизонта за конечное время. Заметим, в первом случае траектория выпукла вверх и поверхность раздела замедляет свое движение, а во втором случае ускоряется. Аналогичная картина наблюдается при движении нефти (рис. 4). Отличие состоит в том, что для грунтов определяющее значение имеет капиллярное давление, а в случае нефтяного пласта абсолютные значения давления велики и капиллярными силами можно пренебречь. Выход траектории в высокопроницаемый пласт реализуется при падении давления P_L ниже давления P_g в газовой шапке.

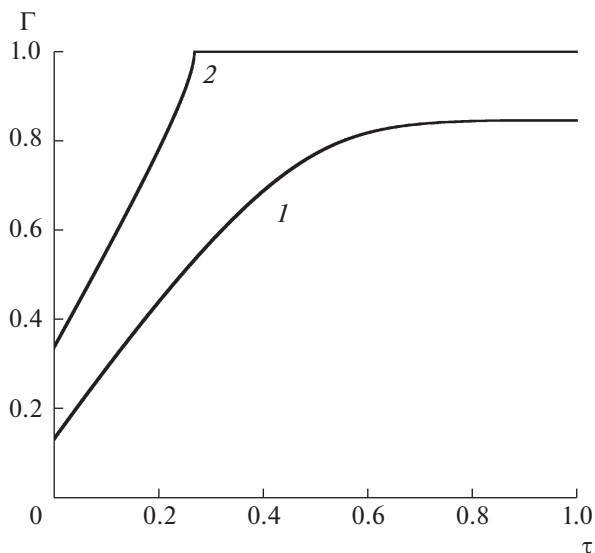


Рис. 3. Два типа траекторий движения поверхности раздела при течении грунтовых вод для смачиваемой и несмачиваемой среды при $L = 20$ м, $P_{L0} = 2.5 \times 10^5$ Па, $P_L = 1.1 \times 10^5$ Па, $b_c = 0$: 1–2 – $a_c = -0.2, 0.2$.

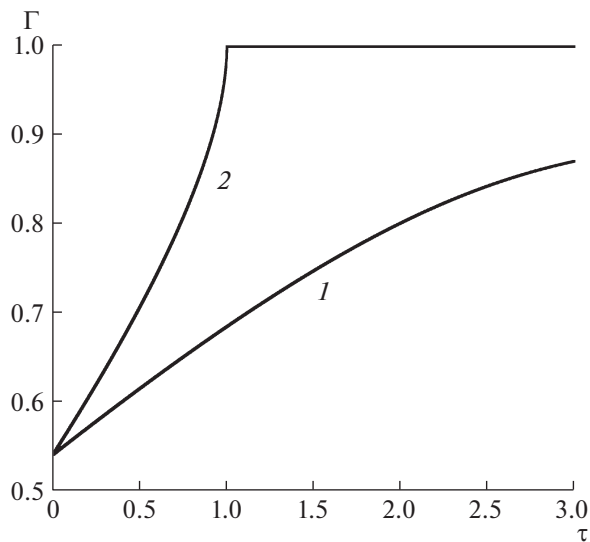


Рис. 4. Характерные траектории движения поверхности нефть–газ при различных давлениях в высокопроницаемом пропластке при $L = 200$ м, $P_{L0} = 1.09 \times 10^7$ Па, $P_c = 0$: 1–2 – $P_L = 1.02 \times 10^7, 0.96 \times 10^7$ Па.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Исследуем линейную устойчивость полученного квазистационарного решения обобщенным методом нормальных мод. Пусть δP и η обозначают соответственно возмущения давления и положения поверхности раздела

$$\Pi(\chi, \zeta, \tau) = \Pi_{st}(\zeta, \tau) + \delta \Pi(\chi, \zeta, \tau), \quad \Gamma(\chi, \tau) = \Gamma_{st}(\tau) + \eta(\chi, \tau),$$

$$\zeta = z/L, \quad \chi = x/L$$

Уравнение для давления (1.2) является линейным, поэтому уравнение для возмущения давления имеет аналогичный вид. Условия на поверхности раздела (1.3) и (1.4) после линеаризации приводятся к соотношениям

$$\delta \Pi + \frac{d\Pi_{st}}{d\zeta} \eta = \frac{d\Pi_c}{d\zeta} \eta \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = - \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \delta \Pi \right)_l \quad (3.2)$$

Здесь индекс st соответствует квазистационарному решению.

Пусть возмущения давления и положения плоского фронта имеют вид

$$\delta \Pi = \Pi'(\zeta) \eta'(\tau) \exp(iK\chi)$$

$$\eta = \eta_+ \eta'(\tau) \exp(iK\chi), \quad \eta_+ = \text{const}$$

Тогда из уравнения для возмущений

$$\frac{\partial^2 \Pi'}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial \chi^2} = 0 \quad (3.3)$$

следует уравнение

$$\frac{d^2 \Pi'}{d\zeta^2} - K^2 \Pi' = 0 \quad (3.4)$$

Учитывая условия убывания возмущений на границе $\zeta = 1$, имеем

$$\Pi'(\zeta) = \Pi'_+ \frac{\exp(K(1 - \zeta)) - \exp(-K(1 - \zeta))}{\exp(K(1 - \Gamma_{st})) - \exp(-K(1 - \Gamma_{st}))}$$

Отсюда находим

$$\left(\frac{d\Pi'(\zeta)}{d\zeta} \right)_{\zeta=\Gamma_{st}} = -K\Pi'_+ \coth K(1 - \Gamma_{st}) \quad (3.5)$$

Подставляя выражение (3.5) в условия (3.1)–(3.2) и предполагая нетривиальность решения для амплитуд η_+ и Π'_+ , получаем дифференциальное уравнение для амплитуды возмущений поверхности раздела

$$\frac{1}{\eta'(\tau)} \frac{d}{d\tau} \eta'(\tau) = \frac{1 + a_c + \beta - \Pi_L}{1 - \Gamma_{st}(\tau)} K \coth[K(1 - \Gamma_{st}(\tau))] \quad (3.6)$$

Скорость роста возмущений зависит от волнового числа K . При $K \rightarrow 0$ правая часть уравнения (3.6) стремится к постоянной величине в каждый фиксированный момент времени

$$\frac{1 + a_c + \beta - \Pi_L}{1 - \Gamma_{st}(\tau)} K \coth[K(1 - \Gamma_{st}(\tau))] \sim \frac{1 + a_c + \beta - \Pi_L}{(1 - \Gamma_{st}(\tau))^2}$$

В случае неустойчивости скорость роста возмущений возрастает с увеличением волнового числа, но для больших K , соответствующих мелкомасштабным движениям, используемая здесь модель фильтрации Дарси некорректна и не может быть применена для анализа устойчивости. При формулировке уточненной модели надо учитывать механизмы, нивелирующие бесконечный рост коротковолновых возмущений, но не влияющие на длинноволновые процессы.

4. АНАЛИЗ ВОЗНИКНОВЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Поверхность раздела является неустойчивой, если правая часть соотношения (3.6) больше нуля. Знак правой части совпадает со знаком выражения $1 + a_c + \beta - \Pi_L$, которое не зависит от времени. Скорость роста возмущений при неустойчивости поверхности раздела зависит также от положения поверхности раздела. При приближении поверхности к высокопроницаемому слою скорость роста возрастает вместе со скоростью поверхности. В случае устойчивости скорость поверхности падает, как это хорошо видно на рис. 3 и 4.

Для задачи движения грунтовых вод давление P_g равно атмосферному давлению P_a . При повышении давления P_L в водоносном горизонте уровень грунтовых вод повышается и в случае смачиваемого грунта, согласно уравнению (3.6), поверхность раздела всегда устойчива. Неустойчивость может возникнуть для несмачиваемого грунта и смачиваемого с градиентом капиллярного давления. Для практических задач, связанных с выпадением солей в осадок, интерес представляет случай понижения давления в водоносном горизонте, однако давление P_L в естественных условиях не может упасть ниже атмосферного. Поэтому величина $P_L - P_a$ всегда больше нуля, и при отсутствии капиллярного давления поверхность раздела всегда устойчива. Поскольку капиллярное давление в грунтах не превышает атмосферного давления [17], то определяющую роль капиллярность играет при значительном падении давления в водоносном горизонте, когда $P_L \sim P_a$. Расчеты показывают, что представленные на рис. 2 варианты движения поверхности раздела грунтовых вод устойчивы. Неустойчивость возникает под действием капиллярных сил в несмачиваемом грунте и низком давлении P_L , когда поверхность раздела достигает водоносного горизонта за конечное время (кривая 2 на рис. 3).

Для течения нефти при эксплуатации нефтяных месторождений характерно наличие высокого давления. Тогда, в случае общего положения, влиянием капиллярного давления можно пренебречь и считать $P_c = 0$. При нулевом капиллярном давлении анализ уравнения (3.6) упрощается и устойчивость зависит только от знака разности давления в высокопроницаемом пропластке (трещине) и газовой шапке $P_L - P_g$. Отсюда следует, что поверхность раздела газ–нефть устойчива, если добыча нефти происходит в гравитационном режиме [15], когда $P_g < P_L$. При снижении пластового давления ниже давления в газовой шапке правая часть уравнения (3.6) становится положительной, возмущения растут со временем, и развивается неустойчивость поверхности

раздела. Если $P_L \sim P_g$, то разница $P_L - P_g$ может быть соизмерима с величиной капиллярного давления и анализ устойчивости аналогичен оному для грунтовых вод.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучено движение поверхности раздела в вертикальном направлении, когда легкая жидкость расположена над тяжелой. Проведено исследование устойчивости построенного квазистационарного решения. Показано, что в однородной среде неустойчивость развивается, если давление жидкости на уровне поверхности раздела больше, чем давление в нижележащем слое. Такое течение формируется в несмачиваемых грунтах или в смачиваемых грунтах с градиентом капиллярного давления. При отборе нефти из высокопроницаемого пропластка неустойчивость возникает в месторождениях с газовой шапкой, когда давление в пропластке падает ниже давления в газовой шапке. Неустойчивость поверхности раздела минерализованная вода—воздух в грунтах и ее дальнейший распад на несвязанные части может приводить к возникновению включений твердой соли. В месторождениях нефти с газовой шапкой неустойчивость поверхности раздела газ—нефть вызывает образование неизвлекаемой остаточной нефти.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 16-11-10195.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Homsy G.M. Viscous fingering in porous media // Ann. Rev. Fluid Mech. 1987. V. 19. P. 271–311.
2. Nield D.A., Bejan A. Convection in porous media. New York: Springer. 2006. 640 p.
3. Rostami I.B., Kharat R., Ghotbi C., Tabatabaie S.H. Gas-Oil Relative Permeability and Residual Oil Saturation as Related to Displacement Instability and Dimensionless Numbers // Oil and Gas Sci. Technol.: Rev. IFP. 2010. V. 65. № 2. P. 299–313.
4. Kim V.C., Kim S., Chung B.-J., Choi C.K. Convective instability in a horizontal porous layer saturated with oil and a layer of gas underlying it // Int. Comm. Heat Mass Transfer. 2003. V. 30. № 2. P. 225–234.
5. Tsytkin G.G., Brevdo L. A phenomenological model of the increase in solute concentration in ground water due to the evaporation Transport in Porous Media. 1999. V. 37. № 2. P. 129–151.
6. Rose D.A., Konukcu I.F., Gowing J.W. Effect of watertable depth on evaporation and salt accumulation from saline groundwater // Aust. J. Soil Res. 2005. V. 43. P. 565–573.
7. Il'ichev A.T., Tsytkin G.G., Pritchard D.T., Richardson C.N. Instability of the salinity profile during the evaporation of saline groundwater // J. Fluid Mech. 2008. V. 614. P. 87–104.
8. Цыпкин Г.Г. Об устойчивости поверхностей испарения и конденсации в пористой среде // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 6. С. 70–78.
9. Saffman P.G., Taylor G.I. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele–Shaw cell containing a more viscous liquid // Proc. Roy. Soc. London. A. 1958. V. 245. P. 312–329.
10. Schubert G., Straus J.M. Gravitational stability of water over steam in vapour-dominated geothermal system // J. Geoph. Res. 1980. V. 85. P. 6505–6512.
11. Il'ichev A.T., Tsytkin G.G. Transition to instability of the interface in geothermal systems // European Journal of Mech. B: Fluids. 2005. V. 24. № 4. P. 491–501.
12. Ильичев А.Т., Цыпкин Г.Г. Неустойчивости однородных фильтрационных течений с фазовым переходом // ЖЭТФ. 2008. Т. 134. Вып. 4 (10). С. 815–830.
13. Шаргатов В.А. О неустойчивости фронта фазового перехода жидкость—пар в неоднородных пористых смачиваемых средах // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 1. С. 148–159.
14. Shargatov V.A., Il'ichev A.T., Tsytkin G.G. Dynamics and stability of moving fronts of water evaporation in a porous medium // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2015. V. 83. P. 552–561.
15. Ланук Б.Б. Теоретические основы разработки месторождений природных газов. ГОСТОПТЕХИЗДАТ, 1948. 296 с.
16. Tsytkin G.G., Shargatov V.A. Influence of capillary pressure gradient on connectivity of flow through a porous medium // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2018. V. 127. P. 1053–1063.
17. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М. Наука, 1977. 664 с.