ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2020, № 2, с. 111–122

УДК 533.7

О ВОЛНАХ РАЗРЕЖЕНИЯ ПРИ ИСПАРЕНИИ МАТЕРИАЛА В ВАКУУМ И МАЛОПЛОТНУЮ СРЕДУ

© 2020 г. А. Л. Кусов[a,*], В. В. Лунёв[a,**]

[a] *Центральный научно-исследовательский институт машиностроения, Королев, Московская обл., Россия*

* *E-mail: kusov_al@mail.ru*

** *E-mail: lunev_vv@mail.ru*

Поступила в редакцию 10.06.2019 г.
После доработки 24.07.2019 г.
Принята к публикации 24.07.2019 г.

Рассмотрена задача об одномерных интенсивных волнах испарения, т.е. о нестационарном внезапном разлете в вакуум или в среду с малой плотностью паров перегретого материала с пластины, цилиндра или сферы, с последующими постоянными (“звуковыми”) граничными условиями на их поверхностях.

Ключевые слова: сублимация, нестационарные волны разрежения, характеристики уравнений, ударные волны

DOI: 10.31857/S0568528120020085

Задача об испарении вещества в вакуум или в среду с малой плотностью ρ_∞ с нагретых до высокой температуры T_W пластины или сферы, рассматривалась в работах [1–7] и других главным образом в рамках приближенных уравнений Больцмана или методов Монте-Карло. В невязкой постановке задачи о разлете сильно сжатой массы газа или о нестационарном сферическом источнике (все в вакуум) рассматривались в цикле работ А.Н. Крайко с сотрудниками (см. библиография в их последней работе [8]).

Ранее в работе авторов [7] в нестационарной задаче о внезапном, но далее стационарном, испарении с поверхности пластины был обнаружен “парадокс двух предельных решений”: при конечных, но малых ρ_∞, по газу распространяется “ударный предвестник”, т.е. ударная волна с “горячим ударным слоем” газа за ней (с температурой, много бóльшей T_W), не исчезающим в пределе при $\rho_\infty \to 0$. Но в то же время при тождественном начальном условии $\rho_\infty = 0$ реализуется классическое решение о распространении волны разрежения в вакуум. Этот эффект проявляется как в рамках автомодельной невязкой постановке задачи, так и при численном (методом Монте-Карло) исследовании волн испарения в разреженном газе с автоматическим учетом вязких эффектов и эффектов термической неравновесности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Ниже рассмотрена аналогичная задача о волнах испарения материалов с поверхностей цилиндра или сферы. Такая задача, в отличие от плоской, не автомодельна и имеет два размерных параметра: радиус этих тел r_0 и характерное время $t_* = r_0/a_*$, где $a_* = a_W$ скорость звука при температуре стенки T_W. Имея в виду лишь газодинамические аспекты этой проблемы, ограничимся физически упрощенными граничными условиями на испаряющейся поверхности: будем задавать на ней давление p_W, температуру T_W и массовую скорость паров (определяемой в общем случае формулой Кнудсена–Ленгмюра), которую при заданном уравнении состояния паров заменим просто заданием их скорости истечения u_W. Строго, граничные условия для подобных задач ставятся на внешней границе примыкающего к поверхности слоя Кнудсена (в предположении относительно малой его толщины), и при $p_W/p_\infty \gg 1$, как известно [3, 6], скорость истечения паров оказывается звуковой, т.е. $u_W = u_* = a_*$ при $t \geq 0$, $r = r_0$. Это условие и будет принято ниже, что эквивалентно задаче о невязком звуковом истечении газа со звуковой поверхности соответствующих источников (более общие в этом отношении условия рассмотрены в работе [8]). Испаряющийся газ будем считать совершенным с показателем адиабаты γ, при этом из внешнего условия $\rho = \rho_\infty \to 0$ будет следовать и p_∞, $a_\infty \to 0$, что и будем считать признаком вакуума. В задаче же с противодавлением внешними условиями будут соотношения на головной ударной волне. И, имея в виду прежде всего пары металла, в численных примерах будем считать их одноатомным газом с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$.

Одномерное невязкое адиабатическое равновесное течение газа описывается системой двух уравнений волновых характеристик 1-го и 2-го семейств, $r = r_+(t)$ и $r = r_-(t)$ (ниже C^+- и C^--характеристики соответственно) и дифференциальных условий совместности вдоль них (например, [9–11] и др.)

$$\frac{dr_\pm}{dt} = u \pm a$$
$$dp \pm \rho a du = \rho a df_\pm, \quad df_\pm = -\nu \frac{1}{r} u a dt_\pm = -\nu \frac{ua}{(u \pm a)} \frac{dr_\pm}{r} \tag{1.1}$$

Здесь r — расстояние от центра цилиндра или сферы, или, в плоской волне, до испаряемой пластины; t — время, числа $\nu = 0, 1, 2$ относятся к плоским, цилиндрическим и сферическим волнам соответственно, дифференциалы $dr_\pm$ и $dt_\pm$ взяты вдоль своих характеристик. Используя соотношения

$$\frac{dp}{\rho} - dh = -Tds = -\frac{h}{\theta} d\theta, \quad h = \frac{a^2}{\gamma - 1}, \quad \theta = \frac{p^{1/\gamma 1}}{\rho} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \exp\left(\frac{s - s_0}{c_p}\right) \tag{1.2}$$

где $h = c_p T$ — энтальпия газа, c_p — его теплоемкость при постоянном давлении, а s — энтропия, определяемая в газовой динамике с точностью до постоянной s_0, преобразуем условия совместности (1.1) к виду

$$du \pm \frac{2a}{\gamma - 1} = dF_\pm, \quad dF_\pm = \pm\left(df_\pm + \frac{a}{\gamma - 1} \frac{d\theta}{\theta}\right) \tag{1.3}$$

Для изоэнтропийных течений "энтропийная" функция θ постоянна, $d\theta = 0$, и уравнения (1.3) в дифференциальной и интегральной формах примут вид

$$\frac{dr_+}{dt} = u + a, \quad du + \frac{2da}{\gamma - 1} = -\nu \frac{ua}{r} dt_+ = -\nu \frac{ua}{(u + a)} \frac{dr_+}{r}$$
$$u + \frac{2a}{\gamma - 1} = C_+ - J^{(+)}, \quad J^{(+)} = \nu \int_{t_0}^{t} \frac{ua}{r} dt_+ = \nu \int_{r_0}^{r} \frac{ua}{(u + a)} \frac{dr_+}{r} > 0 \tag{1.4}$$

$$\frac{dr_-}{dt} = u - a, \quad du - \frac{2da}{\gamma - 1} = \nu \frac{ua}{r} dt_- = \nu \frac{ua}{(u - a)} \frac{dr_-}{r}$$
$$u - \frac{2a}{\gamma - 1} = C_- + J^{(-)}, \quad J^{(-)} = \nu \int_{t_0}^{t} \frac{ua}{r} dt_- = \nu \int_{r_0}^{r} \frac{ua}{(u - a)} \frac{dr_-}{r} > 0 \tag{1.5}$$

Здесь нижние пределы t_0 и r_0 интегралов $J^{(\pm)}$, вычисляемых вдоль характеристик, обозначают точки выхода данных характеристик с оси Ot или с окружности $r = r_0$. В плоской задаче эта ось будет C^--характеристикой с $u = a_*$ на ней, а C^--характеристики, выходящие из точки O, образуют расходящийся пучок прямых лучей или центрированную волну разрежения со своими постоянными параметрами вдоль них. Но при $\nu = 1, 2$ ось Ot характеристикой уже не будет из-за невыполнения вдоль нее неоднородных условий совместности, а будет касательной к выходящим из нее криволинейным C^--характеристикам (рис. 1а, здесь и ниже $\tau = t/t_*$).

Определим константы $C_\pm$ в интегральных уравнениях характеристик. При $t \to t_0$, $r \to r_0$ интегралы $J^{(\pm)} \to 0$, и интегральные соотношения (1.4), (1.5) в любом случае совпадут в пределе с инвариантами Римана для плоских волн с константами

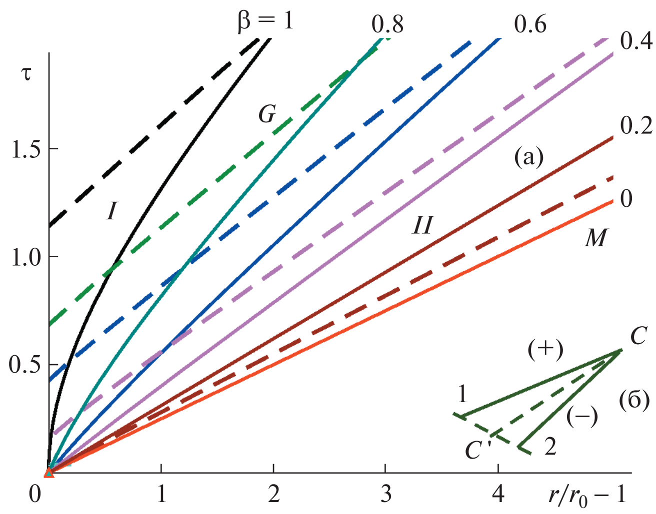

Рис. 1. Характеристики вблизи сферы (а) и элементарный характеристический треугольник (б): C^+ (штрихи), C^- (сплошные линии); I – область стационарного решения, II – центрированная волна разрежения, OG – разделяющая характеристика, OM – головная характеристика волны разрежения в вакуум.

$$C_+ = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}a_* = u_m, \quad C_- = -\frac{3-\gamma}{\gamma+1}u_m, \quad (1<\gamma<3) \tag{1.6}$$

Здесь u_m – максимальная скорость нестационарного расширения плоской волны в пустоту. Вследствие изотермичности стенки эти константы будут одинаковыми для всех характеристик, выходящих из оси Ot. Для определения же постоянных C_- на C^--характеристиках (1.5), выходящих из точки O, пометим каждую из них параметром $\beta = a_\beta/a_*$, где a_β скорость звука на этой характеристике при $r = r_0$, а β изменяется в пределах 1...0 при переборе этих характеристик слева направо. Тогда

$$u_\beta = u_m\left(1-\frac{2}{\gamma+1}\beta\right), \quad C_- = u_m\left(1-\frac{4}{\gamma+1}\beta\right) \tag{1.7}$$

Как видно, C_- есть знакопеременная функция β, которая обращается в нуль при $\beta = (\gamma+1)/4$ и совпадает с (1.6) при $\beta = 1$. Такие течения можно назвать «обобщенными» простыми волнами.

2. ИСПАРЕНИЕ ПЛОСКОЙ СТЕНКИ

Исследуем далее структуру плоской волны испарения в вакуум вблизи головной, предельной характеристики при $t/t_0 \to \infty$ в целях последующего сравнения плоских волн с цилиндрическими и сферическими. В этом случае постоянная C_- на произвольной прямолинейной характеристике – луче OC, определяется ее наклоном $r_c/t_c = u_c - a_c$ и комбинируя это соотношение с инвариантом Римана (1.4), получим

$$u_c = \frac{1}{\gamma+1}\left[(\gamma-1)u_m + 2\frac{r_c}{t_c}\right], \quad a_c = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(u_m - \frac{r_c}{t_c}\right) \tag{2.1}$$

Поскольку эти формулы справедливы для любого луча, то они являются и общим решением $u = u(t,r)$, $a = a(t,r)$ данной задачи.

C^+-характеристики (1.4) пересекают центрированную волну с центром в точке O, и их форма с учетом (2.1) описывается уравнением

$$\frac{dr_+}{dt} = u + a = (1-\alpha)u_m + \alpha\frac{r}{t}, \quad \alpha = \frac{3-\gamma}{\gamma+1} \tag{2.2}$$

Решение этого уравнения определяет форму C$^+$-характеристик, проходящих через точки $(t_0, 0)$, и, с учетом (2.1), распределение параметров вдоль них

$$r_+ = u_m t\left[1 - \left(\frac{t_0}{t}\right)^{1-\alpha}\right], \quad \frac{r_m - r_+}{r_m} = \left(\frac{t_0}{t}\right)^{1-\alpha}, \quad u_m - \frac{dr_+}{dt} = \alpha\left(\frac{t_0}{t}\right)^{1-\alpha} \tag{2.3}$$

$$u = u_m\left[1 - \frac{2}{\gamma+1}\left(\frac{t_0}{t}\right)^{1-\alpha}\right], \quad a = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}u_m\left(\frac{t_0}{t}\right)^{1-\alpha}, \quad 1-\alpha = 2\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \tag{2.4}$$

Здесь $r_m = u_m t$ — уравнение головной C$^-$-характеристики. Поскольку $0 < \alpha < 1$, то при $t/t_0 \gg 1$ наклон всех C$^+$-характеристик при любом t_0 стремится к наклону головной C$^-$-характеристики. Относительное расстояние между этими C$^+$-характеристиками уменьшается как $(t_0/t)^{1-\alpha}$, при этом вдоль них скорость $u \to u_m$, $a/a_* \to 0$. Абсолютное же расстояние между ними и головной C$^-$-характеристикой $(r_m - r_+)$ растет со временем как $t_0\,(t/t_0)^{1-\alpha}$ (т.е. медленней, чем расстояние между соседними лучами в пучке C$^-$-характеристик), но, естественно, уменьшается с уменьшением t_0. Иными словами, все C$^+$-характеристики пересекают все C$^-$-характеристики, кроме “крайней” или “предельной” C$^+$-характеристики с $t_0 = 0$, которая совпадает с головной C$^-$-характеристикой.

3. ИСПАРЕНИЕ СФЕРЫ И ЦИЛИНДРА В ВАКУУМ

Начнем с анализа поведения решения в окрестности оси Ot, для чего рассмотрим малый характеристический треугольник *1–2–3* на рис. 2б. Расписывая для малых отрезков характеристик $t_{32} = t_3 - t_2$, $t_{31} = t_3 - t_1$ условия совместности (1.4), (1.5) и комбинируя их с учетом условия $u = a = u_* = a_*$ в точках *1* и *2*, получим формулы для параметров в точке *3*

$$u_3' = u_3 - a_* = \frac{\nu a_*^2}{2r_0}(t_{32} - t_{31}), \quad a_3' = a_3 - a_* = -\frac{\nu(\gamma-1)a_*^2}{4r_0}(t_{31} + t_{32}) \tag{3.1}$$

Так как дуга *2–3* касается оси Ot, то отрезок $t_{31} \ll t_{32}$ и им в (3.1) можно пренебречь. Тогда, интегрируя первые уравнения (1.4) и (1.5) вдоль соответствующих характеристик, получим следующее решение для окрестности произвольной точки t_0 на оси Ot, где $r' = r - r_0$

$$r_+' = 2a_*(t - t_0), \quad r_-' = \mathrm{const}\chi(t - t_0)^2, \quad u' = 2a_*\sqrt{\frac{\nu}{\gamma+1}\frac{r'}{r_0}}, \quad a' = -\frac{(\gamma-1)a_*}{2}\sqrt{\frac{\nu}{\gamma+1}\frac{r'}{r_0}} \tag{3.2}$$

Характеристика $r_- = r_g(t)$, выходящая из точки O, или $t_0 = 0$, и касательная к оси Ot, ограничивает область *I* исключительного влияния данных на оси Ot от области *II* — собственно центрированной волны, зависящей от внешних условий справа. Эта “разделяющая” характеристика OG показана на рис. 2а для $\nu = 2$, $\gamma = 5/3$. В плоской волне такой разделяющей характеристикой является ось Ot.

В области *I* решение совпадает с решением для стационарного звукового истечения газа как из источника с цилиндрической или сферической поверхностью (или, что то же, из прямолинейного плоского или конического сопла). Это решение зависит только от переменной r и определяется условиями постоянства полной энтальпии, энтропии и расхода

$$\frac{1}{2}u^2 + \frac{a^2}{\gamma-1} = \frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}a_*^2, \quad \theta = \theta_*, \quad \rho_* a_* r_0^\nu = \rho u r^\nu \tag{3.3}$$

Решение этой системы, $u = u_g(r)$, $a = a_g(r)$, и используется в правой части первого уравнения (1.5) для определения разделяющей C$^-$-характеристики $r_g(t)$. При $r/r_0 \gg 1$ это решение имеет асимптотику

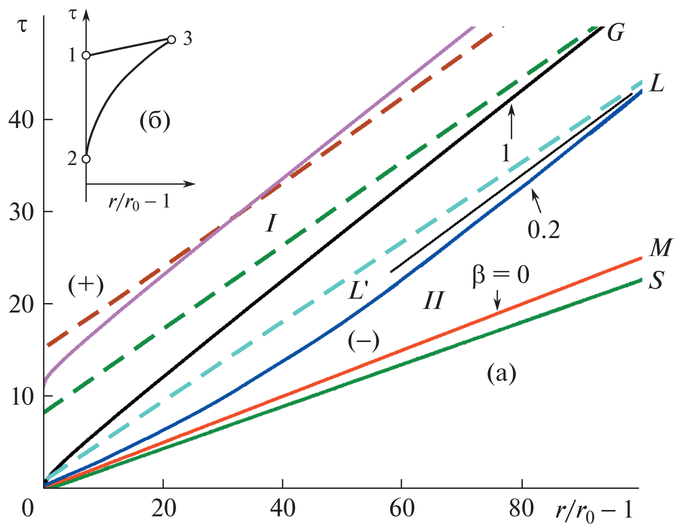

Рис. 2. Характеристики при больших r/r_0 (а) и элементарный характеристический треугольник (б): 1–3–C^+, 2–3–C^- -характеристики; I – стационарная область, II – центрированная волна; S – передняя ударная волна, OM – головная характеристика, OG – разделяющая характеристика, $L'L$ – предельная траектория, t_{OG} – начальная точка C^+-характеристики.

$$\frac{a_g}{a_*} = B_a\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\mu} \to 0, \quad \frac{\rho_g}{\rho_*} = B_\rho\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\nu}, \quad u = u_{gm} = a_*\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$
$$\mu = \frac{1}{2}\nu(\gamma-1), \quad B_a = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{(\gamma-1)/4}, \quad B_\rho = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{1/2}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\nu} \tag{3.4}$$

Как видно, $u_{gm} = u_m/2 = 2a_*$, $B_a = 0.79$, $B_\rho = 0.5$, при $\gamma = 5/3$. Формулы (3.4) следуют из системы (3.3) с опущенным вторым членом слева в первом уравнении (Бернулли), что при $\gamma = 5/3$ с точностью около одного процента допустимо уже при $a_g \leq 0.2a_*$, или при $r/r_0 \geq (B_0/0.2)^{1/\mu} \approx 8$. Заметим, что скорость убывания a_g с ростом r уменьшается с уменьшением γ.

Рассмотрим, далее, характеристические свойства уравнений (1.4), (1.5) для не плоских волн. Все поле их C^+-характеристик делится характеристикой OG на “внутреннюю” область характеристик, выходящих из оси Ot и расположенных в области I стационарного источника, и “внешнюю” область характеристик, переходящих уже в область II волны разрежения, заполненную C^--характеристиками с параметрами β (см. рис. 2а).

Предельные, при $t, r \to \infty$ скорости вдоль этих характеристик: $u_{t0\infty}$ на C^+-характеристиках, выходящих из точек t_0 на оси Ot (помечены индексом t_0) и $u_{\beta\infty}$ на C^--характеристиках, выходящих из точки O с параметрами β (помечены индексом β), при $a/a_* \to 0$ оказываются равными

$$u_{t0\infty} = u_m - J_\infty^{(+)}, \quad J_\infty^{(+)} = \nu\int_{t_0}^{\infty}\frac{ua}{r}dt = \nu\int_{r_0,t_0}^{\infty}\frac{ua}{u+a}\frac{dr}{r} \tag{3.5}$$
$$u_{\beta\infty} - u_m\left(1 - \frac{4\beta}{\gamma+1}\right) = J_{\beta\infty}^{(-)}$$

Нижний индекс t_0 у интеграла $J^{(+)}$ означает точку на оси Ot, из которой выходит данная C^+-характеристика, индекс β у интеграла $J^{(-)}$ указывает на вычисление его вдоль соответствующей β-характеристики. Сходимость интегралов $J^{(\pm)}$ при $a/a_* \to 0$ вдоль соответствующих характеристик не вызывает сомнений в силу асимптотик (3.4). Для примера на рис. 3 для $\gamma = 5/3$ приведены

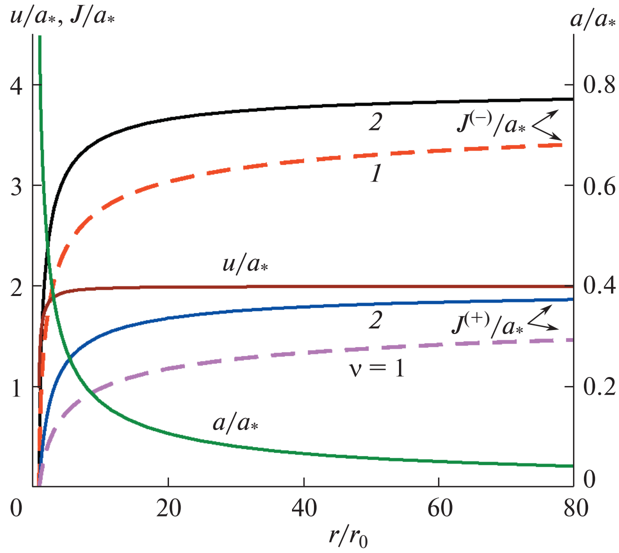

Рис. 3. Распределение параметров вдоль разделяющих характеристик: $J^{(-)}/a_*$, u/a_*, a/a_* – вдоль характеристики OG, и $J^{(+)}/a_*$ вдоль $t_{0G}G$; сплошные линии – $\nu = 2$, штрихи – $\nu = 1$.

зависимости от r интеграла $J_\infty^{(-)}$, скорости u и (для $\nu = 2$) скорости звука a вдоль характеристики OG. Там же приведен интеграл $J_\infty^{(+)}$ вдоль некой G^+-характеристики в области I ($t_{0G}G$ на рис. 2а), пересекающей характеристику OG в достаточно удаленной точке G с условием $a \ll a_*$ в ней, обеспечивающим предельное значение этого интеграла. Причем согласно (3.4), (3.5) предельные, при $r \to \infty$, величины $J_\infty^{(\mp)}$ одинаковы для цилиндрических и сферических волн, и при $\gamma = 5/3$ равны $J_\infty^{(-)} = 4a_*$, $J_\infty^{(+)} = 2a_*$.

Как показано выше, при расчетной величине $\gamma = 5/3$ скорость газа выходит на свое предельное значение $u = 2a_*$ уже при величинах $r/r_0 \geq 10$. В то же время при $\nu = 2$ интегралы $J^{(\pm)}$ выходят на значения, близкие к своим предельным, лишь при $r > 80r_0$, $a/a_* < 4\times10^{-2}$, $\rho/\rho_* < 6.4\times10^{-5}$. Из-за различия этих пределов и из интегральных уравнений (1.4), (1.5) при $r/r_0 \geq 10$ справедливы соотношения

$$J_{t_0}^{(+)} + \frac{2a}{\gamma-1} = J_\infty^{(+)} = 2a_*, \quad J^{(-)} + \frac{2a}{\gamma-1} = J_\infty^{(-)} = 4a_* \tag{3.6}$$

Для цилиндрических волн эта асимптотика достигается заметно позднее, что следует из рис. 3. Напомним, что все эти оценки относятся лишь к области I, для области II некоторые оценки получим в конце раздела.

В области II каждой паре характеристик двух семейств (с индексами t_0, β, рис. 1б) будет соответствовать "своя" точка их пересечения C, разрешая систему интегральных уравнений (1.4), (1.5), в которой получим соотношения

$$u_C = u_m\left(1 - \frac{2\beta}{\gamma+1}\right) + \frac{1}{2}(J_C^{(-)} - J_C^{(+)}), \quad a_C = u_m\frac{\beta(\gamma-1)}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{4}(J_C^{+} + J_C^{(-)}) \tag{3.7}$$

Полагая здесь $a_C/a_* \to 0$, получим предельные, при t, $r \to \infty$, величины

$$u_m\beta_C = \frac{\gamma+1}{4}(J_C^{(+)} + J_C^{(-)}), \quad u_C = u_L = u_m - J_C^{(+)}, \quad C = C(r_C, t_C) = C(t_0, \beta) \tag{3.8}$$

Очевидно, точка C, в этом случае, не может лежать на головной характеристике с $\beta = 0$, или прямой $r = u_m t$ (OM на рис. 2а), в том числе и при малых $t_0 \ll t_*$, при которых интегралы

$J_C^{(\pm)} \sim t_0/t_*$, согласно (3.5), также малы вместе с β, но отличны от нуля. Координаты же (t_C, r_C) точки C, естественно, зависят одновременно от обоих параметров t_0 и β, что и отражает последняя формула (8).

Схематично, предельный переход в волне можно представить в виде последовательности сменяемых вдоль траекторий частиц точек C пересечений пар характеристик (t_0, β), углы между которыми и при $r_C/r_0 \to \infty$, $a_C/a_* \to 0$ стремятся к нулю. Поэтому их биссектрисы ($L'L$ на рис. 2а) могут быть приняты за (почти) предельные "L-траектории" с их предельными скоростями u_L. Таким образом, в дальней периферии волны II между характеристиками OG и $r_m = u_m t$ образуется область "инерционного" течения, заполненная семейством (почти) прямолинейных L-траекторий со скоростями, лежащими в пределах $u_{gm} \le u_L \le u_m$.

Конечно, строго, "паутина" взаимно пересекающихся характеристик и L-траекторий и в инерционной зоне простирается до бесконечности, и именно этот процесс ответственен за установление асимптотических законов затухания возмущений, типа (3.4), в волне II (к этому вопросу вернемся в конце раздела).

Из изложенного следует, что в отличие от плоских волн (см. разд. 2), в сферических и цилиндрических волнах C^+-характеристики, выходящие из оси Ot, "не догоняют" головную характеристику и не параллельны ей в пределе, при $t \to \infty$. Этот результат справедлив для всех характеристик, в том числе для их крайне правового пучка с малыми параметрами t_0, $\beta \ll 1$, предельные углы наклонов которых не будут совпадать с наклоном головной характеристики $r = u_m t$. С этой характеристикой, как и в плоской волне, "сольется" лишь "предельная" C^+-характеристика с параметром $t_0 = 0$.

Заметим, что приведенные в статье характерные кривые для сферических волн в основном рассчитаны (для $\gamma = 5/3$) методом характеристик, в котором за искомые функции были взяты скорость газа u и скорость звука a, как более консервативная величина, чем обычно используемое давление p. При этом тактика расчетов состояла в последовательном построении, начиная от характеристики OG с параметром $\beta = 1$ на ней, "параллельных" ей C^--характеристик с уменьшающимися параметрами β.

На рис. 4 результаты таких расчетов представлены в виде "a-изолиний" $a/a_* = \mathrm{const}$. Эти изолинии, касаясь в точке O C^--характеристик с различными параметрами β, с уменьшением последнего и в ближней окрестности точки O "прижимаются" к головному фронту (т.е. к тоже изолинии с $a/a_* = \beta = 0$). Но в процессе расширения волны эти изолинии отходят от головного фронта и заканчиваются на разделяющей характеристике OG (в не показанной на рис. 4 точке $r \approx 3\times 10^4 r_0$ для последней приведенной там изолинии $a/a_* = 10^{-3}$ или $\rho/\rho_* \approx 10^{-9}$).

Таким образом, в дальней периферии волны разрежения, при t, $r \to \infty$ между характеристикой OG и головным фронтом образуется область как бы "квази-пустого" пространства с параметрами $a/a_* \ll 1$, заполненного инерционно разлетающимся газом с упомянутыми выше скоростями u_L. Так что в этом пределе реальным фронтом основной массы разлетающегося газа будет характеристика OG.

В связи с этим оценим еще долю газа, ушедшего через характеристику OG в центрированную волну II. Газ протекает через эту характеристику с относительной скоростью, равной местной скорости звука a, поэтому относительный расход газа через всю характеристику будет равен

$$\lambda = \frac{1}{\rho_* a_* r_0^2 t}\int_0^t \rho a r^2 dt = \frac{1}{t}\int_{r_0}^{r}\left(\frac{a}{a_*}\right)^{1/k}\frac{r^2}{r_0^2}\frac{dr}{u-a}, \quad k = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \tag{3.9}$$

Очевидно, $\lambda \approx 1$ при $t \approx 0$, но вследствие асимптотик (3.4) интеграл по r в (3.8) сходится при $r \to \infty$, поэтому и $\lambda \to 0$. Таким образом, действительно при $t \to \infty$ лишь относительно ничтожно малая доля испускаемой источником массы будет сосредоточена в передней центрированной волне разрежения.

Заметим, что ввиду известных трудностей расчетов гиперзвуковых течений методом характеристик не удалось получить более или менее достоверных результатов в области $a/a_* \le 10^{-3}$ или

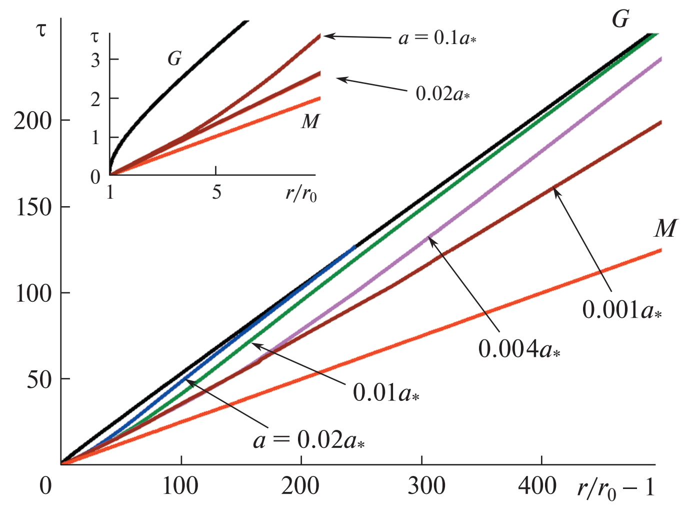

Рис. 4. Распределение a-изолиний в сферической волне.

$\rho/\rho_* \le 10^{-9}$. Однако с некоторыми допущениями можно оценить характер асимптотики решения в указанной области сверхнизкой плотности в волне разрежения. Для этого в выбранном малом характеристическом треугольнике на рис. 1б вычтем из условия совместности (1.4) такое же условие (1.5) и, для получения качественных обозримых результатов, положим

$$du_{1C} - du_{2C} = \frac{u_2 - u_1}{r_2 - r_1}\Delta r \approx 2\frac{u_a}{r}\frac{a}{u_C}dr$$
$$\left(\Delta r = r_2 - r_1 = 2\frac{a}{u_C}dr, \quad dr = r_{C'} - r_C\right) \tag{3.10}$$

Здесь в верхнем равенстве сделана замена $\Delta u/\Delta r \approx u_a/r$, где u_a есть некоторая средняя характерная скорость, причем $\Delta u > 0$, так как при переборе предельных траекторий от линии OG к OM скорость u должна, очевидно, возрастать. Положив далее отношение $u_a/\nu u = \kappa_\nu$ постоянным, а полусумму $(a_1 + a_2)/2$ приравняв скорости a в точке C', получим вдоль продолженной траектории $C' - C$ (в удаленной области, где уже $r_C \gg r_0$, $u_C \gg a_C$) уравнение $da/a = -\mu_1 dr/r$ и его решение

$$a/a_C = (r_C/r)^{\mu_1}, \quad \mu_1 = \mu(1 + \kappa_\nu) \tag{3.11}$$

с той же степенью μ, что и в формуле (3.4). Величина κ_ν заранее неизвестна и может быть определена лишь трудоемким расчетом всей области волны разрежения или более серьезным математическим исследованием, что здесь не сделано. Можно предположить лишь, что величины κ_ν будут различными для разных траекторий.

Из сравнения (3.11) с (3.4) следует, что в волне разрежения II при $r \to \infty$ решение быстрее стремится к пределу, чем в стационарном источнике I. Это обусловлено тем, что в последнем случае траектории частиц ортогональны “жидким” линиям постоянной скорости, или изотахам, которые представляют собой концентрические круги ($\nu = 1$) или сферы ($\nu = 2$), распространяющимися вдоль оси r с одинаковой предельной скоростью. Поэтому падение плотности газа с ростом r происходит в этом случае только за счет его “поперечного” расширения, а в (3.10) имеем $u_2 - u_1 = 0$ и, следовательно, $\mu_1 = \mu$. В случае же центрированной волны разрежения скорости таких предельных жидких изотах растут с ростом r вместе с ростом расстояния между соседними изотахами, что и приводит к дополнительному “продольному” разрежению газа, с сопутствующим неравенством $\mu_1 \ge \mu$.

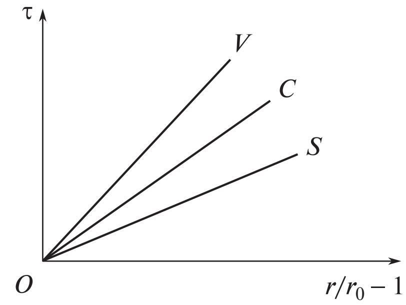

Рис. 5. Пространственно-временная диаграмма: к задаче об образовании ударной волны перед волной разрежения.

4. ИСПАРЕНИЕ СФЕРЫ В МАЛОПЛОТНУЮ СРЕДУ

В этом случае, как показано в работе [7], перед плоской волной испарения возникает сильная, гиперзвуковая ударная волна с примыкающим к ней высокотемпературным ударным слоем, не исчезающим с уменьшением плотности $\rho_\infty \to 0$. При этом температура T_s в этом слое в несколько раз превышает температуру испарения пластины T_W, причем величина T_s оказалась не зависящей от плотности ρ_∞ или давления p_∞ внешней среды при малых их величинах.

Этот результат получен в работе [7] путем численных расчетов, поэтому ниже придадим ему аналитический, асимптотический характер. Параметры газа за сильной головной ударной волной (помечены индексом "S") с ее скоростью D определяются соотношениями [10]

$$p_S = \rho_\infty D^2(1-k), \quad u_S = D(1-k), \quad h_S = \frac{1}{2}D^2(1-k^2), \quad k = \frac{\rho_\infty}{\rho_S} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \tag{4.1}$$

$$a_S^2 = \gamma\frac{p_S}{\rho_S} = \gamma k D^2(1-k) = (\gamma-1)h_S, \quad h_S = c_p T_S$$

Условием замыкания совместной задачи "волна разрежения – ударная волна" будет равенство давления и скорости за ударной волной одноименным параметрам (помечены индексом "V") на C^--характеристике OV, с ее параметром β_V, (рис. 5), ограничивающей область свободного распространения простой волны. То есть на контактном разрыве OC должны выполняться условия

$$u_V = u_S, \quad p_V = p_S \tag{4.2}$$

При этом характеристика OV заранее не известна и определяется в процессе решения совместной задачи. Параметры на ней связаны соотношением

$$u_V + \frac{2a_V}{\gamma-1} = u_m = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}a_*, \quad \left(a_V^2 = \gamma\frac{p_V}{\rho_V} = \gamma\theta_V p_V^{(\gamma-1)/\gamma}, \theta_V = \theta_* = \frac{p_*^{1/\gamma}}{\rho_*}\right) \tag{4.3}$$

Равенство $\theta_V = \theta_*$ следует из изоэнтропичности течения в волне разрежения. В то же время на контактном разрыве OC претерпевают разрыв энтропия s, а следовательно, и скорость звука a, которые, однако, будут постоянными в своих треугольниках $V-O-C$ и $C-O-S$.

Таким образом, для определения пяти неизвестных u_S, p_S, u_V, p_V, D есть 5 уравнений (4.1)–(4.3). Параметр β_V, определяющий C^--характеристику OV, находится из определения $a_V = a_\beta = \beta a_*$ в п. 1 по полученной величине a_V

$$a_V = \sqrt{\gamma\theta_*}p_V^\varepsilon = a_*\left(\frac{p_V}{p_*}\right)^\varepsilon = a_*\left[\frac{(1+k)^2 D^2}{(1-k)u_m^2}\right]^\varepsilon\left(\frac{\rho_\infty}{\rho_*}\right)^\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{\gamma-1}{2\gamma} \tag{4.4}$$

Как видно, строго решение нашей задачи зависит от плотности ρ_∞ внешней среды, что, казалось бы, противоречит приведенному выше выводу работы [7] об отсутствии такой зависимости. Однако, положив в (4.3), с учетом (4.2), $u_V = u_S$ и используя для u_S соотношение (4.1), получим

$$u_S + \frac{2a_V}{\gamma - 1} = (1-k)D + \frac{2a_V}{\gamma - 1} = u_m \tag{4.5}$$

Но согласно (4.4) $a_V/a_* \to 0$ при $\rho_\infty/\rho_* \to 0$. Следовательно, членом с a_V в соотношении (4.5) можно пренебречь, и оно примет свой предельный вид: $u_S = u_m$.

Таким образом, соотношения (4.1) для гиперзвуковой ударной волны примут следующий предельный вид

$$\begin{gathered} D = \frac{u_m}{1-k}, \quad u_S = u_m, \quad \rho_S = \frac{\rho_\infty}{k}, \quad p_S = \frac{\rho_\infty (u_m)^2}{1-k}, \quad h = \frac{1}{2}(1-k^2) \\ \frac{a_S^2}{a_*^2} = \frac{T_S}{T_*} = \frac{\gamma p_S}{\rho_S a_*^2} = \gamma \frac{k(u_m/a_*)^2}{1-k} = \frac{\gamma}{k(1-k)}, \quad k = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \end{gathered} \tag{4.6}$$

Итак, при $\rho_\infty \ll \rho_*$ из параметров в ударном слое от ρ зависят только плотность и давление и не зависит энтальпия, или температура, которая в горячем ударном слое при $\gamma = 5/3$ будет равна

$$T_{S*} = T_S/T_* = a_S^2/a_*^2 = 8.(8) \approx 8.9 \tag{4.7}$$

При этом скорость ударной волны D будет превосходит предельную скорость распространения волны разрежения в пустоту в 4/3 раз. Но плотность и давление в горячем слое будут, естественно, пропорциональны плотности внешней среды. Более того, из (4.4) следует, что при $\rho_\infty/\rho_* \to 0$ “энтропийная” функция

$$\theta_S = \theta_* \left(\frac{a_S^2}{a_*^2}\right)^{1/\gamma} \left(\frac{\rho_*}{\rho_\infty}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} = \left(kT_{S*}\right)^{1/\gamma} \theta_* \left(\frac{\rho_*}{\rho_\infty}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} \to \infty \tag{4.8}$$

неограниченно возрастает (вместе с энтропией), что, однако, не мешает определению предельной температуры горячего слоя, главной его отличительной черты.

В задаче об испарении изотермической сферы при $r \to r_0$, $t \to 0$ локальная картина течения в координатах $\left(r - r_0\right)/a_* t$ будет плоской, т.е. описанной выше соотношениями и изображенной на рис. 5. В то же время при предельно низкой плотности $\rho_\infty \ll \rho_*$ и, следовательно, при $a_V \ll a_*$, характеристика OV, с ее малым параметром $\beta_V \ll 1$, продолженная в расширенную область течения, будет составлять лишь малый, порядка β_V, угол с контактным разрывом OC, и, следовательно, относительно близка к нему. А скорость газа в таком продолженном (и криволинейном, вообще) треугольнике VOC будет близка к максимальной, т.е. $u_V \approx u_m$. И это условие будет сохраняться при любой вариации достаточно малых плотностей внешнего газа, удовлетворяющих условию $\rho_\infty \ll \rho_*$. Но в таком приближении нашу задачу можно смоделировать задачей о расширении сферического (или цилиндрического) поршня с постоянной гиперзвуковой скоростью $u_C = u_m$ на рис. 5. Решение такой задачи получено численно методом характеристик, основанным на уравнениях (1.3)

$$\begin{gathered} \frac{dr_+}{dt} = u + a, \quad du + \frac{2da}{\gamma-1} = -\nu \frac{ua}{u+a}\frac{dr_+}{r} + \frac{a}{\gamma-1} d\ln\theta \\ \frac{dr_-}{dt} = u - a, \quad du - \frac{2da}{\gamma-1} = \nu \frac{ua}{u-a}\frac{dr_-}{r} - \frac{a}{\gamma-1} d\ln\theta \end{gathered} \tag{4.9}$$

Дополнительным при этом будет условие постоянства параметра θ вдоль траектории газовых частиц: $d\theta/dt = 0$. Алгоритм решения этой системы сводится сначала к определению координат точки C на рис. 1б и переноса в нее параметра θ вдоль траектории частиц из точки C', в которой величина θ приравнивается к полусумме ее значений в точках *1* и *2*. После этого при известном уже члене $\ln\theta$ система (4.9) разрешается стандартным образом. Поскольку параметр θ определя-

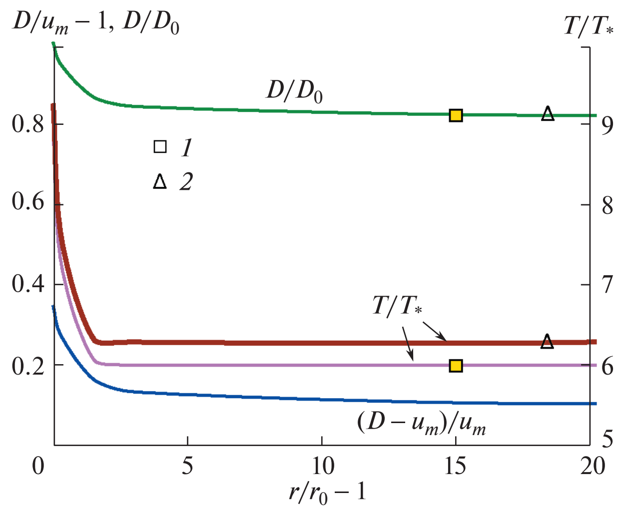

Рис. 6. Зависимость толщины ударного слоя, скорости ударной волны и температуры за передней волной от расстояния до сферы: *1* – приближенное решение (4.11), *2* – схема С.К. Годунова.

ем только с точностью до коэффициента, то в качестве граничного условия для него в соответствии с (4.8) достаточно взять условие $\theta_S = a_S^{2/\gamma}$.

Такая модель достаточна для определения скорости D_s распространения головной ударной волны и температуры в ударном слое, что собственно только и представляет интерес в нашем случае. Но при конкретизации внешних условий определяются и плотность, и давление за ударной волной, причем в нашем гиперзвуковом приближении эти параметры зависят лишь от внешней плотности и не зависят от внешних давления и температуры, т.е. от энтропии. Преодоление же трудностей, связанных с расчетом распределения этих параметров в ударном слое, сочтено неоправданным.

Рассчитанная форма ударной волны $r_s(r)$ приведена на рис. 2а, а скорость ее распространения $D(r)$, толщина ударного слоя и температура за ней приведены на рис. 6. Как отмечено выше, эта задача в целом не автомодельна вследствие наличия определяющего параметра r_0. Но для дальней периферии волны отношение D/u_m на рис. 6 стремится к постоянной величине уже при $r/r_0 \geq 20$, по-видимому, соответствующей автомодельному решению с началом движения поршня в точке $r = 0$. (При $\nu = 1$ в рамках гиперзвуковой нестационарной аналогии такое течение соответствовало бы обтеканию острого конуса). В дополнение проведены расчеты и методом Годунова [12], результаты которых оказались близкими к приведенными выше, кроме окрестности ударной волны, сильно “размазанной” при использовании этого метода.

Эта задача допускает, кстати, простую оценку предельной скорости ударной волны D_∞ в рамках модели “сжатого ударного слоя” Г.Г. Черного [13]. Пусть $\delta = r_s - r_m$ есть толщина такого слоя за ударной волной $r_s(t)$. Тогда, полагая среднюю плотность в этом слое равной $\rho_s = \rho_\infty/k$, из баланса массы получим

$$\frac{4}{3}\pi\rho_\infty r_S^3 = 4\pi\rho_S r_S^2\delta, \quad r_S = \frac{3r_m}{3-k}, \quad D_\infty = \frac{3u_m}{3-k} = 3D_0\frac{1-k}{3-k} \qquad (4.11)$$

При $k = 1/4$ отношения $D_\infty/D_0 = 0.82$, $D_\infty/u_m = 1.09$, $T_S/T_* \approx 6$, т.е. приближенное решение близко к точному на рис. 6, а температура за сферической ударной волной оказывается примерно на треть меньше, чем за плоской.

Заметим, что проведенный выше анализ дает лишь “невязкий газодинамический образ” картины данного течения, которую реальные диссипативные эффекты могут исказить. Однако эти эффекты, учтенные в работе [7] для плоской задачи в рамках метода Монте-Карло, сохранили все основные черты невязкой картины течения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Показано, что при внезапном интенсивном испарении (истечении) газа в сильно разреженную среду с поверхности цилиндра или сферы область передней центрированной волны разрежения, опережающей область течения от стационарного источника, асимптотически содержит лишь относительно предельно малый поток массы.

2. В этой волне предельные скорости газа вдоль характеристик 1-го семейства, в отличие от плоских волн, оказываются меньшими максимальной скорости нестационарного истечения, и изменяются между максимальными скоростями при стационарных и нестационарных истечениях газа.

3. При достаточно малых, но конечных плотностях и давлениях внешней среды, перед центрированной волной возникает ударная волна гиперзвуковой интенсивности (“ударный предвестник”), за которой температура в ударном (или “горячем”) слое в несколько раз превышает температуру поверхности испаряемых тел и не зависит, в пределе, от параметров внешней среды. Тем самым “парадокс двух предельных решений”, установленный ранее для плоских течений, распространен и на пространственные течения.

Авторы благодарят проф. А.Н. Крайко за большую помощь в научном редактировании работы и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Анисимов С.И., Рахматуллина А.Х.* Динамика расширения пара при испарении в вакуум // ЖЭТФ. 1973. Т. 64. № 3. С. 869–876.
2. *Knight Ch.J.* Theoretical modeling of rapid surface vaporization with back pressure // AIAA Journal. 1979. V. 17. № 5. P. 519–523.
3. *Абрамов А.А.* Решение задачи о сильном испарении одноатомного газа методом Монте-Карло // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 1. С. 185–188.
4. *Титарев В.А., Шахов Е.М.* Теплоотдача и испарение с плоской поверхности в полупространство при внезапном повышении температуры тела // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 1. С. 141–153.
5. *Титарев В.А., Шахов Е.М.* Численное исследование нестационарного испарения и теплоотдачи с поверхности сферы // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 1. С. 181–192.
6. *Кусов А.Л., Лунев В.В.* Применение метода Прямого Статистического Моделирования Монте-Карло при решении задачи о нестационарном разлете разреженного газа в случае его испарения с перегретой поверхности материала в вакуум // Космонавтика и ракетостроение. 2010. № 1 (58). С. 36–45.
7. *Кусов А.Л., Лунев В.В.* О нестационарном разлете разреженного газа при испарении конденсированного материала с его перегретой поверхности. Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 4. С. 130–144.
8. *Валиев Х.Ф., Крайко А.Н.* Истечение идеального газа из цилиндрического или сферического источника в пустоту // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 5.
9. *Черный Г.Г.* Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
10. *Лунев В.В.* Течение реальных газов с большими скоростями. М.: Физматлит, 2007. 766 с.
11. *Крайко А.Н.* Теоретическая газовая динамика: классика и современность. М.: ТОРУС ПРЕСС, 2010. 440 с.
12. Численное решение многомерных задач газовой динамики / Под ред. С.К. Годунова М.: Наука, 1976.
13. *Черный Г.Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.