

УДК 532.5

## К ЗАДАЧЕ ОБ ОБТЕКАНИИ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

© 2020 г. А. Г. Хакимов\*

*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия*

*\*E-mail: hakimov@anrb.ru*

Поступила в редакцию 13.09.2019 г.

После доработки 08.10.2019 г.

Принята к публикации 08.10.2019 г.

Представлены результаты моделирования струйного безотрывного обтекания упругой цилиндрической оболочки с нелинейными граничными условиями. Учитывается действие среднего давления на оболочку. Решение получено в виде рядов по степеням параметра аэрогидроупругости. Приводятся формы поперечного сечения оболочки, распределение давлений на деформированной и недеформированной оболочках, распределение безразмерного изгибающего момента, перерезывающей силы, усилия натяжения.

*Ключевые слова:* безотрывное обтекание, цилиндрическая оболочка, параметры аэрогидроупругости, среднее давление, форма оболочки, усилия, момент

**DOI:** 10.31857/S0568528120020073

Н.Е. Жуковский, первым исследовавший струйные течения с учетом капиллярных сил, построил точное решение задачи о симметричном обтекании газового пузыря в прямолинейном канале [1]. В работах [2, 3] исследованы задачи о струйном обтекании упругой пластины и цилиндрической оболочки малой кривизны. В линеаризованной постановке названная задача рассматривалась в [4]. Нелинейные граничные условия и некоторые численные результаты впервые получены в [5]. В [6] доказана теорема о существовании и единственности решения нелинейной задачи при заданных условиях на параметры и решение может быть найдено методом простых итераций при любом начальном приближении.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается поперечное обтекание круговой цилиндрической оболочки плоским безграничным потоком идеальной несжимаемой невесомой жидкости плотностью  $\rho$  с учетом действия среднего давления (рис. 1а).

Ставится задача определения формы оболочки, поля скоростей течения жидкости, усилий и моментов в оболочке, если заданы давление внутри оболочки  $P_1$ , полное давление в потоке  $P^*$ , скорость жидкости на бесконечности  $V_\infty$ .

Ось  $x$  направим по потоку, а начало координат совместим с точкой пересечения вертикальной оси симметрии с линией поперечного сечения оболочки (рис. 1а).

В качестве параметрической области примем круг единичного радиуса на плоскости вспомогательного переменного  $\zeta$ , причем потребуем, чтобы линии поперечного сечения оболочки соответствовала дуга окружности  $\zeta^{i\sigma}$ ,  $0 \leq \sigma \leq 2\pi$ , а бесконечно удаленной точке потока – точка  $\zeta = 0$  (рис. 1б).

Комплексный потенциал  $W$  на плоскости единичного круга имеет вид

$$W = NV_\infty \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \quad (1.1)$$

где  $N$  – характерный размер деформированной оболочки.

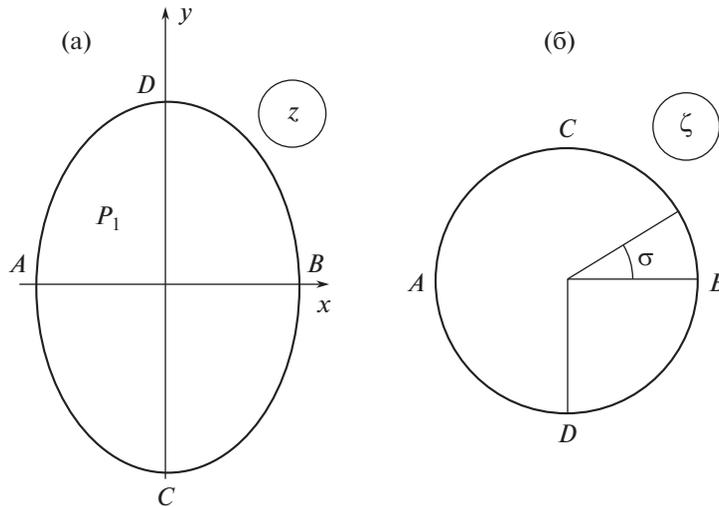


Рис. 1. Плоскость течения  $z$  и вспомогательная плоскость  $\zeta$ .

Когда жесткость оболочки стремится к бесконечности, функция, отображающая круг единичного радиуса в плоскости  $\zeta$  на область течения в плоскости  $z = x + iy$ , записывается

$$z = f(\zeta) = \frac{R_0}{\zeta} \tag{1.2}$$

где  $R_0$  – радиус круговой недеформированной оболочки,  $i$  – мнимая единица.

Безразмерная комплексно-сопряженная скорость при обтекании недеформированной оболочки также находится из выражений (1.1), (1.2)

$$\frac{1}{V_\infty} \frac{dW}{dz} = \frac{N}{R_0} (1 - \zeta^2)$$

индекс 0 относится к величинам при недеформированной оболочке. В общем случае, когда цилиндрическая жесткость оболочки имеет конечную величину и деформированная оболочка остается гладкой, безразмерную комплексно-сопряженную скорость будем определять в виде [2]

$$\frac{1}{V_\infty} \frac{dW}{dz} = \frac{N}{R_0} (1 - \zeta^2) \exp(-\omega(\zeta)) \tag{1.3}$$

Здесь  $\omega(\zeta)$  – функция, аналитическая в круге  $\zeta \leq 1$  и обращается в нуль при  $\zeta = 0$ . Из условий на бесконечности ( $\zeta = 0$ ):  $V(\zeta) = 0$  и вычет функции  $dz/d\zeta = 0$  следует, что аналитическая функция  $\omega(\zeta)$  представима в виде ряда

$$\omega(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \zeta^n \tag{1.4}$$

с комплексными коэффициентами  $c_n = a_n + ib_n$ . Форма деформируемой поверхности находится из выражений (1.1), (1.3)

$$\frac{dz}{d\zeta} = -\frac{N}{\zeta^2} \exp(\omega(\zeta)). \tag{1.5}$$

Для элемента деформированной оболочки запишем уравнения равновесия [7] с учетом действия среднего давления [8, 9]

$$\frac{dT}{ds} + \frac{Q}{R} = 0 \tag{1.6}$$

$$\frac{dQ}{ds} - \frac{T}{R} + P_1 - P - \frac{(P_1 + P)h}{2R} = 0 \tag{1.7}$$

$$Q = \frac{dM}{ds} \tag{1.8}$$

где  $T$ ,  $Q$ ,  $M$  – усилие натяжения, перерезывающая сила и изгибающий момент,  $R$ ,  $s$  – радиус кривизны и длина дуги поперечного сечения оболочки,  $P$  – давление в жидкости, которое определяется из уравнения Бернулли

$$P = P^* - \frac{\rho V^2}{2}$$

где  $\rho$ ,  $V$  – плотность и скорость жидкости на поверхности оболочки. Изгибающий момент определяется

$$M = D \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_u} \right), \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (1.9)$$

где  $E$ ,  $\nu$ ,  $h$  – модуль упругости, коэффициент Пуассона и толщина оболочки,  $D$  – цилиндрическая изгибная жесткость оболочки,  $R_u$  – радиус кривизны в недеформированном начальном состоянии. Из (1.6) с учетом (1.8) и (1.9) следует

$$T = T_1 - \frac{D}{2} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) \quad (1.10)$$

где  $T_1$ ,  $R_1$  – усилие натяжения и радиус кривизны линии поперечного сечения деформированной оболочки в точке  $A$ . Уравнение (1.7) с учетом (1.8)–(1.10),  $R = ds/d\theta$  и уравнения Бернулли запишется

$$\begin{aligned} \frac{d^3\theta}{ds^3} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^3 - \frac{\alpha}{N^2} \frac{d\theta}{ds} - \frac{(P_1 + P^*)h}{2D} \frac{d\theta}{ds} + \frac{\rho V^2 h}{4D} \frac{d\theta}{ds} + \frac{P_1 - P^*}{D} + \frac{\rho V^2}{2D} = 0 \\ \alpha = N^2 \left( \frac{1}{2R_1^2} + \frac{T_1}{D} \right) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь  $\theta$  – угол между осью  $x$  и касательной к линии поперечного сечения оболочки. Угол  $\theta$ , скорость на поверхности оболочки  $V$ , элемент длины дуги  $ds$  находятся из выражений (1.3)–(1.5). Полагая  $\zeta = \exp(i\sigma)$ , получим

$$\begin{aligned} \theta = \theta_0 + \mu, \quad V = V_\infty g e^{-\lambda}, \quad ds = -N e^\lambda d\sigma, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2} - \sigma; \quad 0 < \sigma < \pi \\ \theta_0 = \frac{3\pi}{2} - \sigma, \quad 0 < \sigma < 2\pi, \quad g = |2 \sin \sigma| \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь  $\lambda$ ,  $\mu$  – действительная и мнимая части функции  $\omega(\exp(i\sigma))$ . Дифференциальное уравнение (1.11) с учетом соотношений (1.12) и  $h/R_0 = \delta$  записывается

$$\begin{aligned} \mu''' - 3\lambda'\mu'' + \left[ -\lambda'' + 2\lambda'^2 + \frac{1}{2}(\mu' - 1)^2 - \alpha e^{2\lambda} - \left( \beta_m e^{2\lambda} - \frac{g^2}{2} \right) e^\lambda \gamma \delta \right] (\mu' - 1) - (\beta e^{2\lambda} + g^2) e^\lambda \gamma = 0 \\ \beta = \frac{2(P_1 - P^*)}{\rho V_\infty^2}, \quad \beta_m = \frac{P_1 + P^*}{\rho V_\infty^2}, \quad \gamma = \frac{\rho V_\infty^2 N^3}{2D} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Здесь  $\beta$ ,  $\beta_m$ ,  $\gamma$  – параметры аэрогидроупругости. Штрихи обозначают производную по переменной  $\sigma$ . Условия для дифференциального уравнения (1.13). На оси симметрии поперечного сечения оболочки в точках  $C$  и  $D$  угол  $\theta = 0$ , также равна нулю перерезывающая сила  $Q$ , поэтому при  $\sigma = \pi/2$ ,  $\sigma = 3\pi/2$ :  $\mu = \mu'' = 0$ . Когда оболочка имеет две оси симметрии, то функция  $\omega(\zeta)$  представима в виде ряда

$$\omega(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \zeta^{2n} \quad (1.14)$$

поэтому на единичной окружности  $\zeta = \exp(i\sigma)$  справедливы выражения

$$\begin{aligned} \lambda(\sigma) = \lambda(\pi - \sigma), \quad \mu(\sigma) = -\mu(\pi - \sigma) \\ \lambda'(\sigma) = -\lambda'(\pi - \sigma), \quad \mu'(\sigma) = \mu'(\pi - \sigma) \\ \lambda''(\sigma) = \lambda''(\pi - \sigma), \quad \mu''(\sigma) = -\mu''(\pi - \sigma) \end{aligned}$$

2. РЕШЕНИЕ В ВИДЕ РЯДОВ ПО СТЕПЕНЯМ ПАРАМЕТРА  $\gamma$

Пусть  $\gamma = 0$ , тогда уравнение (1.13) удовлетворится, если положить  $\omega(\zeta) = 0$  ( $\lambda = \mu = 0$ ),  $\alpha = \alpha_0$ ,  $N = N_0 = R_0$ . В общем случае  $\omega(\zeta)$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $N$  зависят от  $\gamma$ . Считая эти зависимости аналитическими в окрестности  $\gamma = 0$ , будем искать решение в виде рядов по степеням параметра аэрогидроупругости  $\gamma$

$$\omega(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k \omega_k(\zeta), \quad \alpha = \alpha_u + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k \alpha_k \tag{2.1}$$

На единичной окружности  $\zeta = \exp(i\sigma)$ :

$$\omega_k(\exp(i\sigma)) = \lambda_k(\sigma) + i\mu_k(\sigma)$$

Из (1.14) следует

$$\lambda_k(\sigma) = \sum_{n=1}^k a_{2n}^k \cos 2n\sigma, \quad \mu_k(\sigma) = \sum_{n=1}^k a_{2n}^k \sin 2n\sigma \tag{2.2}$$

Подставляя (2.1) в (1.14), далее в (1.13) и сравнивая коэффициенты при  $\gamma^k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), получим бесконечную систему уравнений вида

$$\begin{aligned} \mu_k'''' + \lambda_k'' + \left(\frac{3}{2} - \alpha_u\right)\mu_k' + 2\alpha_u\lambda_k + \alpha_k &= G_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ G_1 &= 4(1 + h^*/2)\sin^2 \sigma + \beta - \beta_m \delta \\ G_2 &= 3\lambda_1'\mu_1'' + \lambda_1''\mu_1' + 2(\lambda_1')^2 + \frac{3}{2}(\mu_1')^2 - 2\alpha_u\lambda_1^2 + 2\alpha_u\lambda_1\mu_1' - 2\alpha_1\lambda_1 + \\ &+ \alpha_1\mu_1' + 3(\beta - \beta_m\delta)\lambda_1 + \beta_m\delta\mu_1' + 4(1 + \delta/2)\lambda_1\sin^2 \sigma - 2\delta\mu_1'\sin^2 \sigma \\ G_3 &= 2\alpha_u\lambda_2\mu_1' + 2\alpha_1\lambda_1\mu_1' + 2\alpha_u\lambda_1\mu_2' - \frac{4}{3}\alpha_u\lambda_1^3 + 2\alpha_u\lambda_1^2\mu_1' - 4\alpha_u\lambda_1\lambda_2 - \\ &- 2(\lambda_1')^2\mu_1' + 4\lambda_1'\lambda_2' + 3\mu_1'\mu_2' + \alpha_2\mu_1' + \alpha_1\mu_2' - 2\alpha_1\lambda_1^2 - 2\alpha_2\lambda_1 - 2\alpha_1\lambda_2 + \\ &+ \lambda_2''\mu_1' + \lambda_1''\mu_2' + 3\lambda_2'\mu_1'' + 3\lambda_1'\mu_2'' + 3(\beta - \beta_m\delta)\lambda_2 + \frac{9}{2}(\beta - \beta_m\delta)\lambda_1^2 + \\ &+ \beta_m\delta(\mu_2' + 3\lambda_1\mu_1') + 4\lambda_2(1 + \delta/2)\sin^2 \sigma + 2\lambda_1^2(1 + \delta/2)\sin^2 \sigma - \\ &- 2\delta(\mu_2' + \lambda_1\mu_1')\sin^2 \sigma - \frac{1}{2}(\mu_1')^3 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Функция  $G_k$  разлагается в ряд Фурье по косинусам

$$G_k = \sum_{n=0}^k G_{2n}^k \cos 2n\sigma. \tag{2.4}$$

В табл. 1 приводятся значения коэффициентов  $G_{2n}^k$  для  $\beta = 0$ ,  $\beta_m = 1$ ,  $\delta = 0.01$ .

Подставляя в (2.3), (2.2), (2.4) и сравнивая коэффициенты при косинусах с одинаковыми аргументами, получим систему алгебраических уравнений, решение которой имеет вид

$$\alpha_k = G_0^k, \quad a_{2n}^k = -\frac{G_{2n}^k}{8n^3 + 4n^2 - (3 - 2\alpha_u)n - 2\alpha_u}$$

Таблица 1

k	n = 0	2	4	6
1	-1.99	-2.01	0	0
2	-1.449111	2.452199	1.045200	0
3	-1.489232	-0.414129	2.486437	-0.293890

Таблица 2

k	$\alpha_k$	$a_2^k$	$a_4^k$	$a_6^k$
1	1.99	0.22333	0	0
2	-1.449111	-0.272466	0.013936	0
3	-1.489232	-0.046014	-0.033152	0.001199

Значения коэффициентов  $\alpha_k, a_{2n}^k$  даны в табл. 2 для  $\beta = 0, \beta_m = 1, \delta = 0.01$ .

Постоянная  $N$  находится из условия нерастяжимости срединной поверхности оболочки

$$N = \frac{\pi R_0}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} e^{\lambda} d\sigma$$

Функция  $\omega(\zeta)$  с точностью до  $\gamma^3$  включительно находится

$$\omega(\zeta) = \gamma a_2^1 \zeta^2 + \gamma^2 (a_2^2 \zeta^2 + a_4^2 \zeta^4) + \gamma^3 (a_2^3 \zeta^2 + a_4^3 \zeta^4 + a_6^3 \zeta^6)$$

Разлагая в ряд  $\exp(\omega(\zeta))$ , получим

$$\exp \omega(\zeta) = 1 + \gamma a_2^1 \zeta^2 + \gamma^2 [a_2^2 \zeta^2 + (a_4^2 + (a_2^1)^2 / 2) \zeta^4] + \gamma^3 [a_2^3 \zeta^2 + (a_4^3 + a_2^1 a_2^2) \zeta^4 + (a_6^3 + a_2^1 a_4^2 + (a_2^1)^3 / 6) \zeta^6]$$

Функция  $z(\zeta)$  определяется, интегрируя (1.5), получим

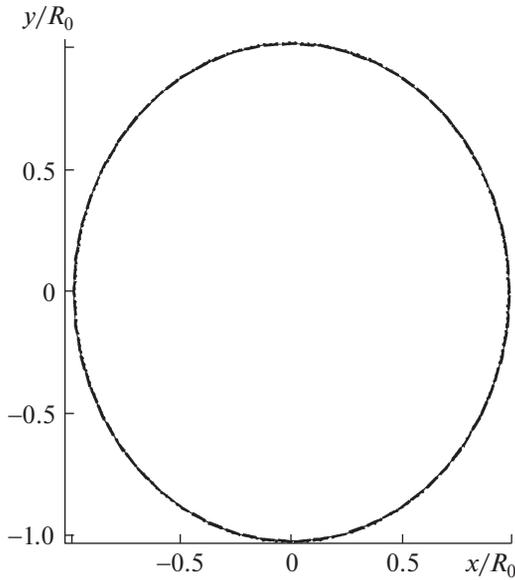
$$z(\zeta) = N \left[ \frac{1}{\zeta} - \gamma a_2^1 \zeta - \gamma^2 \left( a_2^2 \zeta + \frac{a_4^2 + (a_2^1)^2}{3} \zeta^3 \right) - \gamma^3 \left( a_2^3 \zeta + \frac{a_4^3 + a_2^1 a_2^2}{3} \zeta^3 + \frac{6a_6^3 + 6a_2^1 a_4^2 + (a_2^1)^3}{30} \zeta^5 \right) \right] \quad (2.5)$$

### 3. ФОРМА ОБОЛОЧКИ

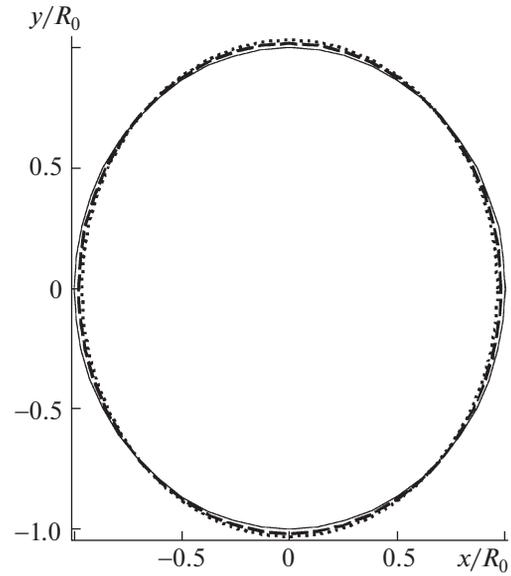
Форма деформированной оболочки находится из (2.5) при  $\zeta = \exp(i\sigma)$ :

$$\begin{aligned} x &= N \left[ \cos \sigma - \gamma a_2^1 \cos \sigma - \gamma^2 \left( a_2^2 \cos \sigma + \frac{2a_4^2 + (a_2^1)^2}{6} \cos 3\sigma \right) - \right. \\ &\quad \left. - \gamma^3 \left( a_2^3 \cos \sigma + \frac{a_4^3 + a_2^1 a_2^2}{3} \cos 3\sigma + \frac{6a_6^3 + 6a_2^1 a_4^2 + (a_2^1)^3}{5} \cos 5\sigma \right) \right] \\ y &= N \left[ \sin \sigma + \gamma a_2^1 \sin \sigma + \gamma^2 \left( a_2^2 \sin \sigma + \frac{2a_4^2 + (a_2^1)^2}{6} \sin 3\sigma \right) + \right. \\ &\quad \left. + \gamma^3 \left( a_2^3 \sin \sigma + \frac{a_4^3 + a_2^1 a_2^2}{3} \sin 3\sigma + \frac{6a_6^3 + 6a_2^1 a_4^2 + (a_2^1)^3}{30} \sin 5\sigma \right) \right] \quad (3.1) \end{aligned}$$

На рис. 2 приводятся формы поперечного сечения оболочек для  $\beta = 0, \beta_m = 1, \delta = 0.01$ , определенные по формулам (3.1) с учетом одного, двух, трех членов разложения решения в ряд по степеням  $\gamma$  (пунктирная, штриховая, сплошная линии соответственно). Форма оболочки, определенная с учетом одного члена разложения в ряд по степеням  $\gamma$ , незначительно отличается от формы, определенной с учетом двух и трех членов. Формы поперечного сечения оболочек, определенные с учетом двух и трех членов разложения в ряд по степеням  $\gamma$ , практически совпадают. Формы оболочек для  $\beta = 0, \beta_m = 1, \delta = 0.01$  при различных  $\gamma = 0.2; 0.1; 0$  (пунктирная, штриховая, сплошная линии соответственно) приводятся на рис. 3. С увеличением параметра аэрогидроупругости  $\gamma$  оболочки вытягиваются в направлении, перпендикулярном скорости потока на бесконечности.



**Рис. 2.** Формы поперечного сечения оболочек, определенные по формулам (3.1) с учетом одного, двух, трех членов разложения решения в ряд по степеням  $\gamma$  (пунктирная, штриховая, сплошная линии соответственно):  $\beta = 0, \beta_m = 1, \delta = 0.01$ .



**Рис. 3.** Формы поперечного сечения оболочек при различных  $\gamma = 0.2; 0.1; 0$  (пунктирная, штриховая, сплошная линии соответственно):  $\beta = 0, \beta_m = 1, \delta = 0.01$ .

Длина дуги линии поперечного сечения оболочки, отсчитываемая от точки  $C$ , находится интегрированием модуля  $dz$ :

$$s = N \left[ \sigma + \gamma \frac{a_2^1}{2} \sin \sigma + \frac{\gamma^2}{4} \left( (a_2^1)^2 \sigma + 2a_2^2 \sin 2\sigma + \frac{4a_4^2 + (a_2^1)^2}{4} \sin 4\sigma \right) + \gamma^3 \left( a_2^1 a_2^2 \sigma + \left( a_2^3 + \frac{a_2^1 a_4^2}{2} + \frac{(a_2^1)^3}{8} \right) \sin 2\sigma + \frac{1}{4} \left( a_4^3 + \frac{a_2^1 a_2^2}{2} \right) \sin 4\sigma + \frac{1}{6} \left( a_6^3 + \frac{a_2^1 a_4^2}{2} + \frac{(a_2^1)^3}{24} \right) \sin 6\sigma \right) \right]$$

#### 4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЙ

Коэффициент давления  $C_p$  в жидкости на поверхности оболочки определяется

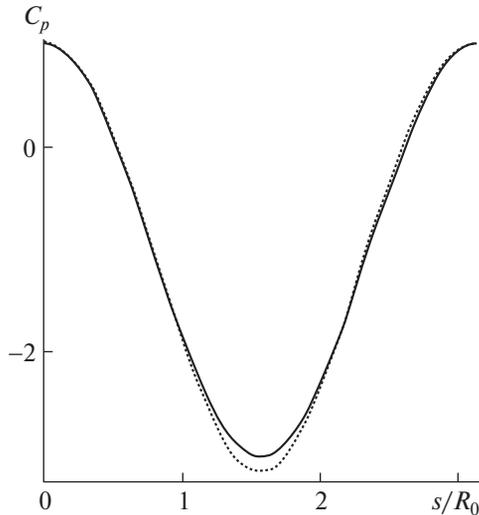
$$C_p = 2 \frac{P - P_\infty}{\rho V_\infty^2} = 1 - 4 \sin^2 \sigma \exp(-2\lambda).$$

Распределение давлений на оболочке дается рис. 4 для  $\beta = 0, \beta_m = 1, \delta = 0.01, \gamma = 0.1; 0$  (пунктирная, сплошная линии соответственно). Деформация оболочки вызывает уменьшение давления в точках, удаленных от оси  $x$  и увеличение давления в окрестности точек  $A$  и  $B$ .

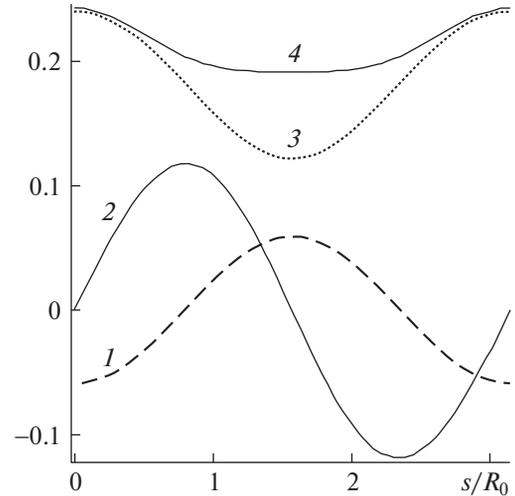
#### 5. УСИЛИЯ И МОМЕНТЫ В ОБОЛОЧКЕ

Безразмерные изгибающий момент, перерезывающая сила, усилие натяжения определяются по формулам (1.8)–(1.10):

$$\begin{aligned} \frac{MR_0}{D} &= \frac{1 - \mu'}{N_1 e^\lambda} - 1, & N_1 &= \frac{N}{R_0} \\ \frac{QR_0^2}{D} &= \frac{\mu'' - \lambda'(\mu' - 1)}{N_1^2 e^{2\lambda}} \\ \frac{TR_0^2}{D} &= \frac{1}{N_1^2} \left( \alpha - \frac{R_0^2}{R^2} \right) \end{aligned}$$



**Рис. 4.** Распределение давлений на оболочке:  $\beta = 0$ ,  $\beta_m = 1$ ,  $\delta = 0.01$ ,  $\gamma = 0.1$ , 0 (пунктирная, сплошная линии соответственно).



**Рис. 5.** Распределение безразмерного изгибающего момента (кривая 1), перерезывающей силы (кривая 2), усилия в оболочке (кривая 3 по формуле (1.7)), усилия в оболочке (кривая 4 по формуле (1.10)):  $\beta = 0$ ,  $\beta_m = 1$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $\delta = 0.01$ .

Распределение безразмерного изгибающего момента (кривая 1), перерезывающей силы (кривая 2), усилия (кривая 3 по формуле (1.7), кривая 4 по формуле (1.10)) в оболочке для  $\beta = 0$ ,  $\beta_m = 1$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $\delta = 0.01$  приводится на рис. 5. Видно, что усилия натяжения меньше в точках удаленных от оси  $x$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С увеличением параметра аэрогидроупругости оболочка вытягивается в направлении, перпендикулярном скорости потока на бесконечности. Деформация оболочки вызывает уменьшение давления в точках, удаленных от оси  $x$ . Усилия натяжения меньше в точках, удаленных от оси  $x$ . Решение получено с учетом действия среднего давления на оболочку.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуковский Н.Е. Определение движения жидкости при каком-нибудь условии, данном на линии тока. Собр. соч. Т. II. Гидродинамика. М.–Л.: ОГИЗ, 1949. 763 с.
2. Киселев О.М., Рапопорт Э.Ф. О струйном обтекании упругой пластины // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 4. С. 35–42.
3. Киселев О.М., Рапопорт Э.Ф. О струйном обтекании упругой оболочки // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 2. С. 24–32.
4. Ильгамов М.А. Изгиб и устойчивость цилиндрической оболочки при ее поперечном обтекании жидкостью // Прикл. мех. 1975. Т. 11. Вып. 3. С. 12–19.
5. Хакимов А.Г. Обтекание гибкой цилиндрической оболочки плоским потоком идеальной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 6. С. 147–151. <https://doi.org/10.1007/BF01023279>
6. Киселев О.М. Безотрывное обтекание круговой цилиндрической оболочки // Тр. сем. по краев. задачам. 1982. Вып. 18. С. 104–115.
7. Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1969. 695 с.
8. Ильгамов М.А. Взаимодействие неустойчивостей в гидроупругой системе // ПММ. 2016. Т. 80. Вып. 5. С. 566–579. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2017.02.007>
9. Ильгамов М.А. Влияние давления окружающей среды на изгиб тонкой пластины и пленки // ДАН. 2017. Т. 476. № 4. С. 402–405. <https://doi.org/10.1134/S1028335817100020>