ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2020, № 1, с. 33–44

УДК 532.517.2

УСТОЙЧИВОСТЬ АДВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ УСЛОВИЯ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ НАВЬЕ

© 2020 г. К. Г. Шварц[a,*], Ю. А. Шварц[a,**]

[a] Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

*E-mail: kosch@psu.ru

**E-mail: jul-schwarz@psu.ru

Поступила в редакцию 14.05.2019 г.
После доработки 08.07.2019 г.
Принята к публикации 22.07.2019 г.

Представлено точное решение уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска, описывающее плоскопараллельное адвективное течение в плоском слое несжимающейся жидкости с горизонтальными границами, на которых задано условие проскальзывания Навье и линейное распределение температуры. Исследуется поведение скорости и температуры с ростом значения параметра проскальзывания. В рамках линейной теории исследуется устойчивость адвективного течения на плоские и спиральные возмущения. В рамках нелинейной постановки задачи изучаются конечно-амплитудные возмущения в надкритической области вблизи минимумов нейтральных кривых.

Ключевые слова: горизонтальная конвекция, адвективные течения, условие проскальзывания Навье, точное решение, устойчивость

DOI: 10.31857/S0568528120010119

В горизонтальном слое жидкости при наличии на его границах продольного градиента температуры под действием горизонтальной конвекции возникают адвективные течения [1]. Их специфика состоит в том, что скорость течения перпендикулярна силе плавучести, которая является основной причиной движения. Когда температура на границах слоя является линейной функцией ($T = Ax$, где x – продольная координата, A – постоянный горизонтальный температурный градиент на границах слоя), течение описывается аналитически, являясь точным решением уравнений Навье-Стокса [2, 3]. В случае твердых границ, на которых задано условие прилипания, возникает течение Остроумова-Бириха [4], адвективное термокапиллярное течение, возникающее при наличии свободных границ, описано в [5]. Найдены точные решения, описывающие адвективные течения с усложняющими факторами. В [6] представлено такое течение в вибрационном поле, в [7] описано адвективное течение, возникающее в условиях невесомости под действием линейных высокочастотных колебаний. В [8, 9] описаны адвективные течения, возникающие в магнитном поле. Недавно получено точное решение, описывающее плоскопараллельное адвективное течение в плоском слое несжимающейся жидкости с твердыми границами, на которых задано линейное распределение температуры разных знаков, либо линейный горизонтальный температурный градиент [10] и представлено плоскопараллельное адвективное течение, возникающее при наличии внутреннего линейного относительно горизонтальной координаты источника тепла [11]. Задача о конвекции в плоском горизонтальном слое несжимаемой жидкости с твердыми границами, на нижней из которых температура постоянная, а верхняя граница нагрета параболически, сводится к решению нелинейной системы нестационарных одномерных уравнений [12]. В [13] представлен новый класс адвективных течений, возникающий в горизонтальном слое жидкости. Устойчивость адвективного течения в горизонтальном слое с твердыми границами исследована в [1, 14].

С середины прошлого века сложилось так, что при решении задач с твердыми границами используется условие прилипания на границах соприкосновения жидкостей с твердыми поверхностями [15], на которых скорость равна нулю. В большинстве случаев это справедливо. Однако в работе [16] отмечена особая важность учета эффекта проскальзывания жидкости вдоль границы.

При учете скольжения касательная составляющая скорости отлична от нуля и связана с компонентами тензора напряжений. За последние годы проведено много новых исследований, посвященных явлению прилипания/скольжения ньютоновских жидкостей (см. обзоры [17–19]), сделаны аналитические исследования [20, 21], произведено численное исследование устойчивости конвективных течений в наклонном слое при наличии проскальзывания [22].

В данной работе представлена процедура получения нового точного решения уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска, описывающего плоскопараллельное адвективное течение в горизонтальном слое жидкости с твердыми границами, на которых заданы условия скольжения Навье с целью учета гидродинамики жидкости, протекающей мимо газовых секторов однонаправленных супергидрофобных поверхностей [23]. Изучена устойчивость течения при значении числа Прандтля $Pr = 6.7$. Исследовано влияние величины параметра проскальзывания b на характер адвективного течения и его устойчивость.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим бесконечный горизонтальный слой несжимаемой жидкости с твердыми границами шириной $2h$, помещенный в однородное поле тяжести. Движение жидкости описывается уравнениями конвекции в приближении Буссинеска [1] в декартовой системе координат $Oxyz$ (z – вертикальная координата, x, y – горизонтальные координаты), обезразмерив которые подобно [10, 24], получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Gr\left[u\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{v}\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \Delta u \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} + Gr\left[u\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} + \mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}\right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \Delta \mathrm{v} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + Gr\left[u\frac{\partial w}{\partial x} + \mathrm{v}\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \Delta w + T \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + Gr\left[u\frac{\partial T}{\partial x} + \mathrm{v}\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z}\right] = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta T \tag{1.5}$$

$$Gr = \frac{g\beta A h^4}{\nu^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{\chi}$$

На горизонтальных границах слоя задано условие проскальзывания в простейшей формулировке [23] и линейное распределение температуры

$$z = \pm 1: \quad \mu\bar{b}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{z}} = u, \quad \mu\bar{b}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{z}} = v, \quad w = 0, \quad T = \mathrm{x} \tag{1.6}$$

Здесь $\bar{b} = b/h$ – безразмерная длина скольжения. При этом случай $b = 0$ соответствует условию прилипания, а $b = \infty$ – граничному условию при отсутствии трения.

2. АДВЕКТИВНОЕ ТЕЧЕНИЕ

Учитывая граничное условие (1.6) и условие несжимаемости жидкости (1.4), точное решение системы (1.1)–(1.5) будем искать в следующем виде

$$u = u_0(z), \quad v \equiv 0, \quad w \equiv 0, \quad T = T_0 \equiv x + \theta_0(z), \quad p = p_0(x, z) \tag{2.1}$$

Подставив (2.1) в (1.1)–(1.5), получим систему уравнений для скорости, температуры и давления

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = T_0 \tag{2.2}$$

$$u_0''(z) = \frac{\partial p_0}{\partial x} \tag{2.3}$$

$$Gr\,Pr\;u_0\;(z) = \theta_0''(z) \tag{2.4}$$

Граничные условия для скорости и температуры имеют вид

$$\mu\bar{b}u_0'(\pm 1) = u_0(\pm 1), \quad \theta_0(\pm 1) = 0 \tag{2.5}$$

Отметим, что $\theta_0(z)$ – это температура жидкости при $x = 0$. Продифференцируем (2.2) по x, а (2.3) по z. Избавившись от давления, получим уравнение для скорости

$$u_0'''(z) = 1$$

К граничным условиям (2.5) добавим условие замкнутости течения

$$\int_{-1}^{1} u_0(z)\,dz = 0$$

Сначала находим скорость, а затем, с помощью уравнения (2.4), температуру

$$u_0(z) = \frac{z^3 - z}{6} - \frac{1}{6}\frac{2\bar{b}}{\bar{b}+1}z, \quad \theta_0(z) = \frac{3z^5 - 10z^3 + 7z}{360} - \frac{2\bar{b}}{\bar{b}+1}\frac{z^3 - z}{36},$$
$$T_0 = x + GrPr\theta_0(z) \tag{2.6}$$

Скорость адвективного течения (2.6) – это линейная комбинация течения Остроумова-Бириха и течения Куэтта. Причем вторая производная скорости течения Остроумова-Бириха по z равна скорости течения Куэтта. Профиль скорости и температуры симметричен, рис. 1, *а, б*. Максимальное и минимальное значение скорости $u_0(z)$ достигается при $z_{\text{ext}} = \pm\sqrt{(3\bar{b}+1)/(3\bar{b}+3)}$ и равно $u_{\text{ext}} = \mu\frac{1}{3}((3\bar{b}+1)/(3\bar{b}+3))^{3/2}$ (рис. 1, *в, г*), с ростом коэффициента $\bar{b}$ убывают значения z_{ext} от $-1/\sqrt{3}$ до -1, а максимум скорости растет от $1/(9\sqrt{3})$ до 1/3. Аналогичным образои меняется максимум температуры. В предельных случаях при $b = 0$ получаем течение [4], а при $b = \infty$ – течение, подобное [5] при отсутствии вращения.

3. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ

Для исследования устойчивости адвективного течения (2.6) применим метод малых возмущений [14]

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{V}, \quad \mathbf{v}_0 = (u_0, 0, 0), \quad \mathbf{V} = (U, V, W), \quad T = T_0 + \theta, \quad P = p_0 + P' \tag{3.1}$$

Здесь $\mathbf{V}$, θ, P' – малые возмущения. Подставив возмущенные поля скорости, температуры и давления (3.1) в исходную систему (1.1)–(1.5) и граничные условия (1.6), получим следующую задачу

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + Gr\left[(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{V}\right] = -P' + \Delta\mathbf{V} + \theta \mathrm{e}_z$$
$$\mathrm{e}_z = (0,0,1) \quad \mathrm{div}\mathbf{V} = 0 \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + Gr\left[\mathbf{V}\nabla\theta + \mathbf{V}\nabla T_0 + \mathbf{v_0}\nabla\theta\right] = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta\theta \tag{3.3}$$

$$z = \pm 1: \quad \mu\bar{b}\frac{\partial U}{\partial \mathrm{z}} = U, \quad \mu\bar{b}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{z}} = V, \quad W = 0, \quad \theta = 0 \tag{3.4}$$

В рамках линейной теории устойчивости в уравнениях (3.2)–(3.4) пренебрегаем малыми квадратичными по возмущениям $\mathbf{V}$ и θ слагаемыми. Полученная система линейных уравнений имеет решения в виде нормальных возмущений, пропорциональных $\exp(-\lambda t + k_x x + k_y y)$, где $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, – декремент, определяющий временной ход возмущений. Вещественные коэффициенты k_x и k_y – компоненты волнового вектора вдоль осей X и Y.

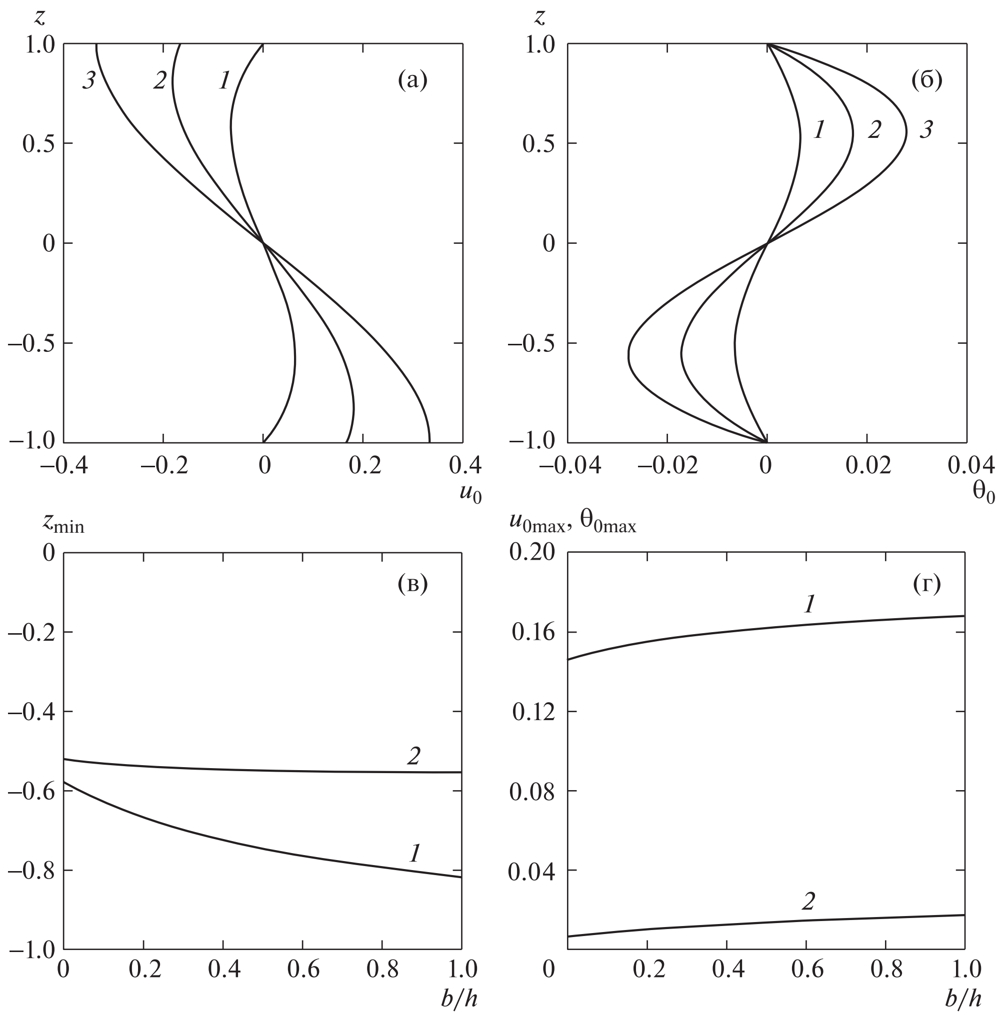

Рис. 1. Профили (*а*) скорости $u_0(z)$ и (*б*) температуры $\theta_0(z)$ при $\bar{b} = 0$, 1 и ∞ (*1 – 3*); (*в*. *г*) зависимости координаты z_{min} – точки минимального значения и максимального значения скорости (*1*) и температуры (*2*) адвективного течения жидкости.

Будем рассматривать два предельных случая: плоские периодические возмущения в виде валов с осью, параллельной оси X, и пространственные спиральные периодические по y возмущения в виде валов с осью, перпендикулярной к оси X.

Случай плоских возмущений

Уравнения возмущений выводятся из линеаризованной системы (3.2)–(3.4) в предположении, что производная по y от всех функций равна нулю ($k_y = 0$). Учитывая дивергентность возмущений скорости, введем функцию тока возмущений $\psi(t,x,z)$ и вихря возмущения скорости $\phi(t,x,z)$

$$U = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad W = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \phi = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} = -\Delta\psi, \quad \Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$$

Рассмотрим нормальные возмущения вида

$$\phi = [\phi_1(t,z) + i\phi_2(t,z)]\exp(ik_x x), \quad \psi = [\psi_1(t,z) + i\psi_2(t,z)]\exp(ik_x x),$$
$$\vartheta = [\vartheta_1(t,z) + i\vartheta_2(t,z)]\exp(ik_x x)$$

В результате задача сведется к решению системы линейных уравнений в частных производных по времени t и переменной z

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial t} - k_x Gr[u_0(z)\phi_2 + u_0''(z)\psi_2] = \frac{\partial^2\phi_1}{\partial z^2} - k_x^2\phi_1 + k_x\theta_2 \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial^2\psi_\alpha}{\partial z^2} - k_x^2\psi_\alpha + \phi_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2), \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial t} + k_x Gr[u_0(z)\phi_1 + u_0''(z)\psi_1] = \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2} - k_x^2\phi_2 - k_x\theta_1 \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial\vartheta_1}{\partial t} - k_x Gr[u_0(z)\vartheta_2 + \Pr Gr\theta_0'(\mathrm{z})\psi_2] - Gr\frac{\partial\psi_1}{\partial z} = \frac{1}{\Pr}\left[\frac{\partial^2\vartheta_1}{\partial z^2} - k_x^2\vartheta_1\right] \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial\vartheta_2}{\partial t} + k_x Gr[u_0(z)\,\vartheta_1 + \Pr Gr\theta_0'(\mathrm{z})\psi_1] - Gr\frac{\partial\psi_2}{\partial z} = \frac{1}{\Pr}\left[\frac{\partial^2\vartheta_2}{\partial z^2} - k_x^2\vartheta_2\right] \tag{3.9}$$

с граничными условиями

$$z = \pm 1: \quad \psi_\alpha = \vartheta_\alpha = 0, \quad \mu\bar{b}\phi_\alpha = \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial z} \quad (\alpha = 1, 2) \tag{3.10}$$

В качестве начальных возмущений для неизвестных берем функции, удовлетворяющие граничным условиям (3.10).

Система (3.5)–(3.10) решается по численной методике [24, 25], аналогичной схемам двухполевого метода [26], который используется для решения двухмерных задач в переменных функции тока и вихря скорости. В данном случае функции тока и вихря возмущения скорости зависят от одной пространственной координаты поперек слоя – вторая переменная исчезла в предположении периодичности решения по этой координате. Уравнения для возмущения вихря скорости и функции тока решаются с помощью классической неявной схемы [27], погрешность аппроксимации $O(\Delta t + h_z^2)$, где Δt – шаг по времени, h_z – шаг по z. Остальные уравнения системы решаются с помощью схемы Кранка–Николсона [27], погрешность аппроксимации $O(\Delta t^2 + h_z^2)$. Учитывая граничные условия (3.10) для функции тока и вихря скорости возмущения для аппроксимации вихря на границах на $(n+1)$-ом временном слое вместо формулы Тома [26] используются формулы

$$\varphi_{\alpha_1}^{n+1} = -\frac{2\psi_{\alpha_2}^{n+1}}{h_z\left(h_z + 2\bar{b}\right)}, \quad \varphi_{\alpha_N}^{n+1} = -\frac{2\psi_{\alpha_{N-1}}^{n+1}}{h_z\left(h_z + 2\bar{b}\right)} \quad (\alpha = 1, 2) \tag{3.11}$$

При построении нейтральной кривой, описывающей зависимость критического числа Грасгофа от волнового числа, для каждого выбранного значения k_x требуется найти такое число Грасгофа, при котором действительная часть декремента возмущений $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ равна нулю. Иными словами, решается задача о поиске корня $\lambda_1 = 0$ для неявной функции $\lambda_1(k_x, Gr, \bar{b})$. Эта функция строится дискретно по точкам с помощью многократного решения эволюционной задачи (3.5)–(3.10) методом сеток. Для нахождения действительной части декремента возмущений λ_1 прослеживалась эволюция во времени максимумов по модулю неизвестных. В качестве аппроксимации зависимости амплитуд по времени использовалась экспоненциальная формула $C\exp(-\lambda_1 t)$. Неизвестные λ_1 и C определяются методом наименьших квадратов [28] по ходу вычислений уравнений системы. Нулевое значение декремента возмущений уточняется методом половинного деления [28]. Характер поведения возмущений от времени существенно зависит от всех параметров задачи; в области неустойчивости все возмущения нарастают, а в области устойчивости затухают.

Расчеты показали (рис. 2, *а*), что при $Pr = 6.7$ сохраняется колебательный характер неустойчивости, с ростом параметра $\bar{b}$ критическое число Грасгофа и соответствующее ему волновое число k_x убывают

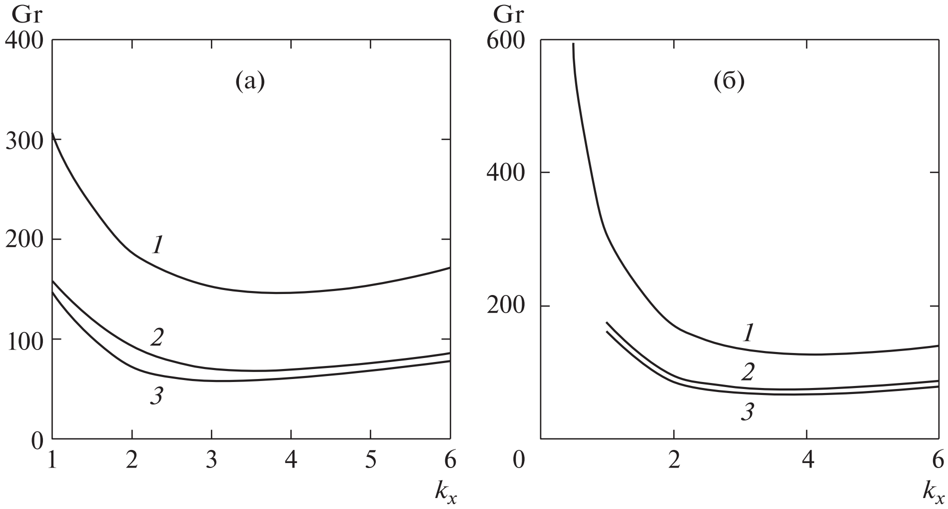

Рис. 2. Нейтральные кривые адвективного течения для случая плоских (*а*) и спиральных (*б*) возмущений: *1* – *3* – $\bar{b}$ = 0, 0.4, 0.5.

$$Gr_{\text{кр}} \approx 42.44 + \frac{15.8}{\bar{b} + 0.154}, \quad k_x \approx 2.2 + \frac{2.27}{\bar{b} + 1.26},$$

Таким образом, учет проскальзывания Навье делает течение менее устойчивым по сравнению со случаем прилипания на твердых границах.

Случай спиральных возмущений

Уравнения спиральных возмущений выводятся из системы (3.2)–(3.4) в предположении, что производные в ней по x от всех функций равны 0 ($k_x = 0$). Имеются три компоненты вектора возмущения скорости и возмущения температуры, которые являются функциями времени t и двух пространственных переменных y, z.

Учитывая дивергентность возмущений скорости, введем функцию тока возмущений $\psi(t,y,z)$ и вихря возмущения скорости $\varphi(t,y,z)$

$$V = -\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad W = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \varphi = \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} = -\Delta\psi, \quad \Delta = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$$

Рассмотрим нормальные возмущения вида

$$\varphi = [\varphi_1(t,z) + i\varphi_2(t,z)]\exp(ik_y y), \quad \psi = [\psi_1(t,z) + i\psi_2(t,z)]\exp(ik_y y)$$

$$u = [u_1(t,z) + iu_2(t,z)]\exp(ik_y y), \quad \theta = [\theta_1(t,z) + i\theta_2(t,z)]\exp(ik_y y)$$

В результате задача сведется к решению системы линейных уравнений в частных производных по времени t и переменной z

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2} - k_y^2\varphi_1 + k_y\theta_2 \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial^2\psi_\alpha}{\partial z^2} - k_y^2\psi_\alpha + \varphi_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1,2), \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} = \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2} - k_y^2\varphi_2 - k_y\theta_1 \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - k_y Gr[u_0'(z)\psi_2] = \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - k_y^2 u_1 \tag{3.15}$$

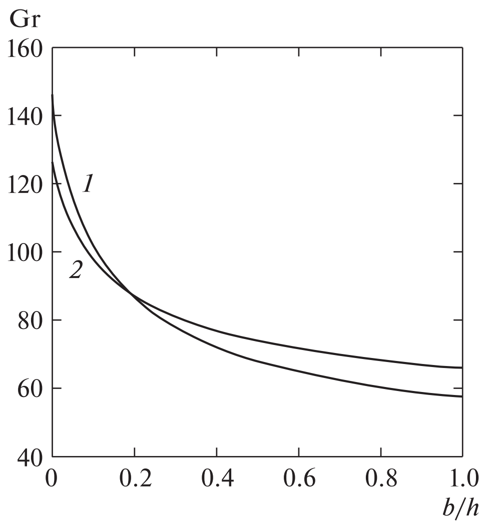

Рис. 3. Зависимость критического числа Грасгофа от $\bar{b}$ для случая плоских (*1*) и спиральных (*2*) возмущений.

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + k_y Gr[u_0'(z)\psi_1] = \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} - k_y^2 u_2 \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} - k_y Gr[\Pr Gr\theta_0'(z)\psi_2] + Gru_1 = \frac{1}{\Pr}\left[\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} - k_y^2\theta_1\right] \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} + k_y Gr[\Pr Gr\theta_0'(z)\psi_1] + Gru_2 = \frac{1}{\Pr}\left[\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2} - k_y^2\theta_2\right] \tag{3.18}$$

с граничными условиями

$$z = \pm 1 \quad \psi_\alpha = u_\alpha = \theta_\alpha = 0, \quad \mu\bar{b}\varphi_\alpha = \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial z} \quad (\alpha = 1, 2) \tag{3.19}$$

Система (3.11)–(3.18) решается по вычислительной схеме аналогично случаю плоских возмущений. В качестве начальных возмущений для неизвестных возьмем функции, удовлетворяющие граничным условиям (3.19).

Также как и для плоских возмущений, с ростом параметра $\bar{b}$ критическое число Грасгофа и соответствующее ему волновое число k_y убывают (рис. 2, *б*), монотонный характер неустойчивости сохраняется

$$\mathrm{Gr}_{\text{кр}} \approx 52.58 + \frac{13.703}{\bar{b} + 0.1875}$$

$$k_y \approx 3.8 + \frac{0.0052}{\bar{b} + 0.0144}$$

При $\bar{b} < 0.177$ более опасными являются спиральные возмущения (рис. 3), а при $\bar{b} > 0.177$ наиболее опасными являются плоские возмущения.

4. КОНЕЧНО-АМПЛИТУДНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Поведение возмущений конечной амплитуды в надкритической области исследуются на основе нелинейной системы уравнений (3.1)–(3.4).

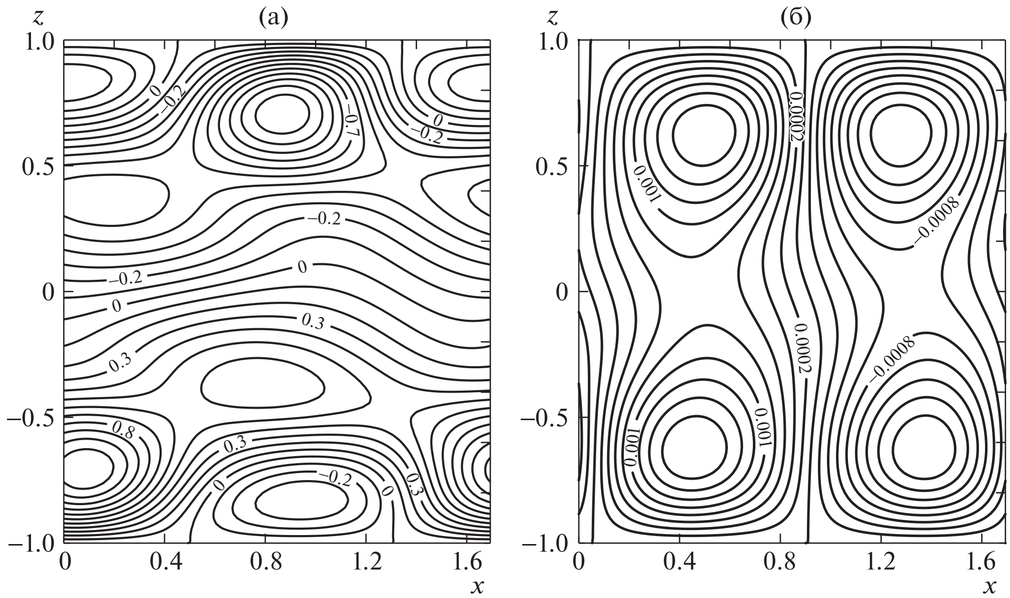

Рис. 4. Изолинии конечно-амплитудных возмущений (*а*) температуры $\theta(t, x, z)$ и (*б*) функции тока $\psi(t, x, z)$ при $\bar{b} = 0.3$, $Gr = 120$, $k_x = 3.71$.

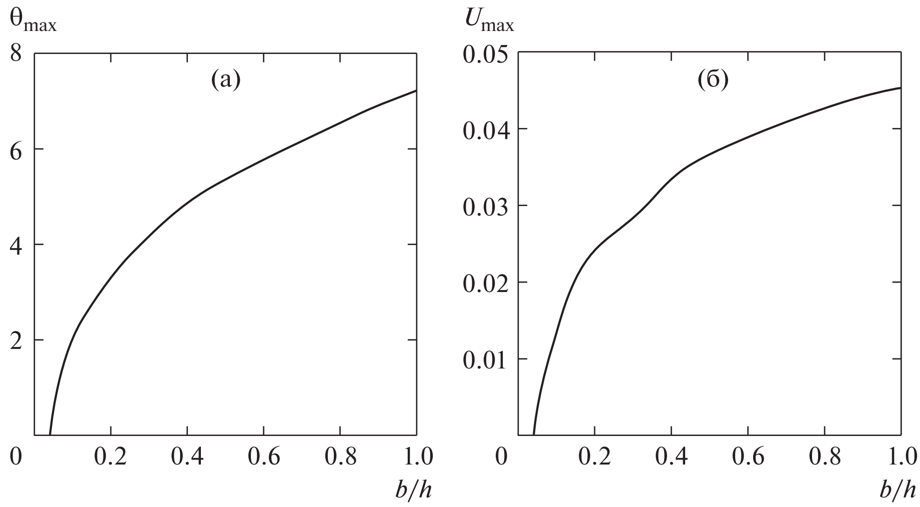

Рис. 5. Зависимость максимума возмущений температуры (*а*) и скорости (*б*) от величины $\bar{b}$ при $Gr = 120$ для случая плоских возмущений.

Случай плоских возмущений

Для плоских периодических по x возмущений система имеет вид

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + Gr\left[-\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial z} + u_0(z)\frac{\partial\phi}{\partial x} + u_0''(z)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right] = \Delta\phi - \frac{\partial\theta}{\partial x} \tag{4.1}$$

$$\Delta\psi + \phi = 0 \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + Gr\left[-\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial z} + u_0(z)\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial z} + PrGr\theta_0'(z)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right] = \frac{1}{\Pr}\Delta\theta \tag{4.3}$$

$$z = \pm 1: \quad \mu\bar{b}\phi = \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad \psi = 0, \quad \theta = 0 \tag{4.4}$$

$$\psi(t, 0, z) = \psi(t, L, z), \quad \phi(t, 0, z) = \phi(t, L, z), \quad \theta(t, 0, z) = \theta(t, L, z) \tag{4.5}$$

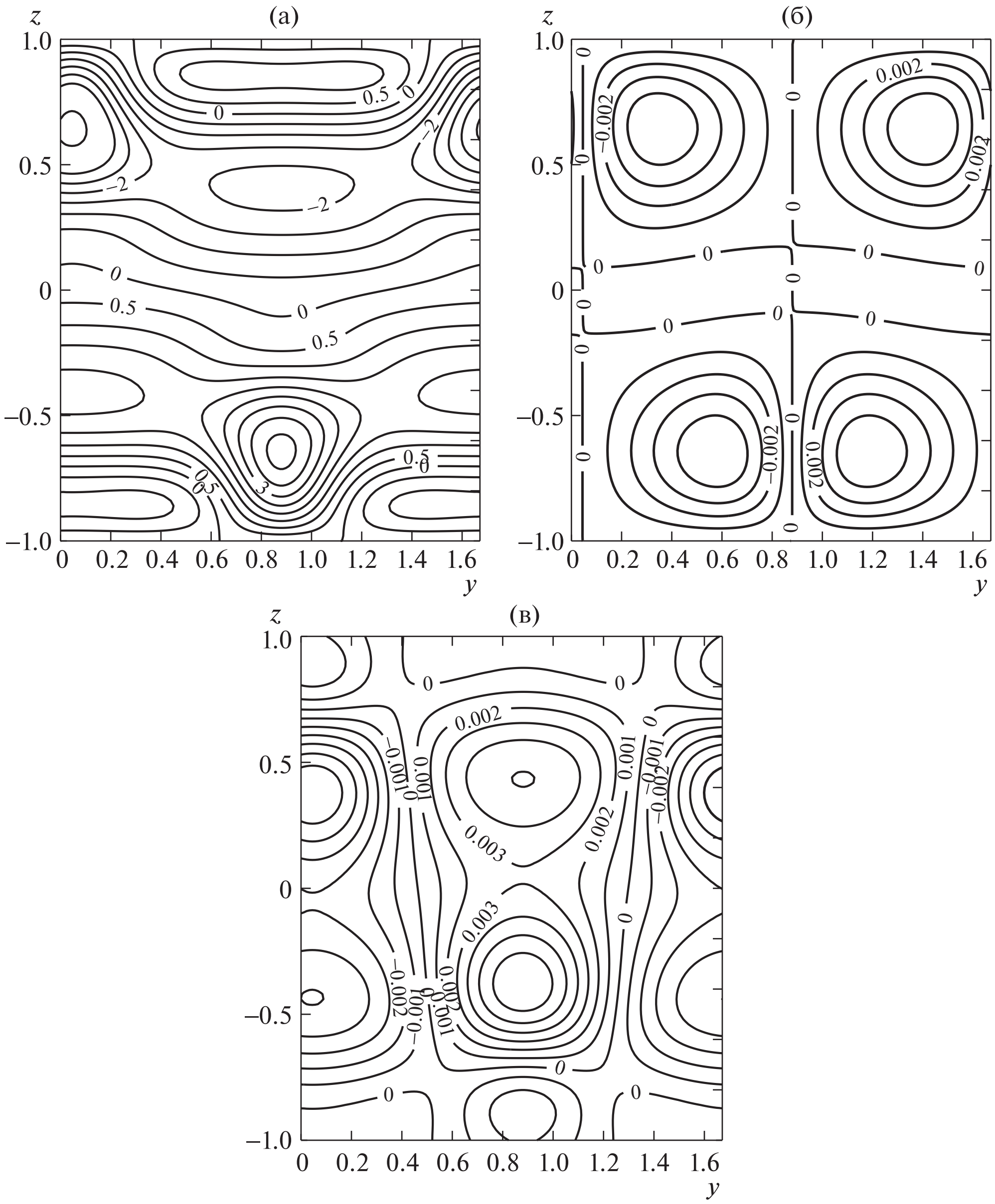

Рис. 6. Изолинии конечно-амплитудных возмущений (*а*) температуры $\theta(t,x,z)$, (*б*) функции тока $\Psi(t,y,z)$ и (*в*) первой компоненты скорости $U(t,y,z)$ при $\overline{b}=0.3$, $Gr=120$, $k_y=3.76$.

где L – длина волны возмущений, оператор Лапласа $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial z^2$, $\psi(t,x,z)$, $\phi(t,x,z)$, $\theta(t,x,z)$ – конечно-амплитудные возмущения функции тока, вихря скорости и температуры.

Нелинейная двумерная задача (4.1)–(4.5) решалась численно методом сеток. В рамках двухполевого метода [26] использовалась явная конечно-разностная схема. Уравнение Пуассона (4.2) для функции тока решалось методом последовательной верхней релаксации. Вихрь на горизонтальных границах аппроксимировался по формуле, аналогичной (3.11). Основные расчеты проводились на сетке 101×150 при $0\le\overline{b}\le1$.

Вычисления, сделанные при $\overline{b}=0$, совпали с результатами [1, 14] для случая твердых границ. Вблизи минимумов нейтральных кривых конечно-амплитудные возмущения температуры $\theta(t,x,z)$ представляют собой систему чередующихся теплых и холодных пятен, а функция тока возмущений $\psi(t,x,z)$ описывает систему вихрей, локализированных и движущихся вдоль горизонтальных границ

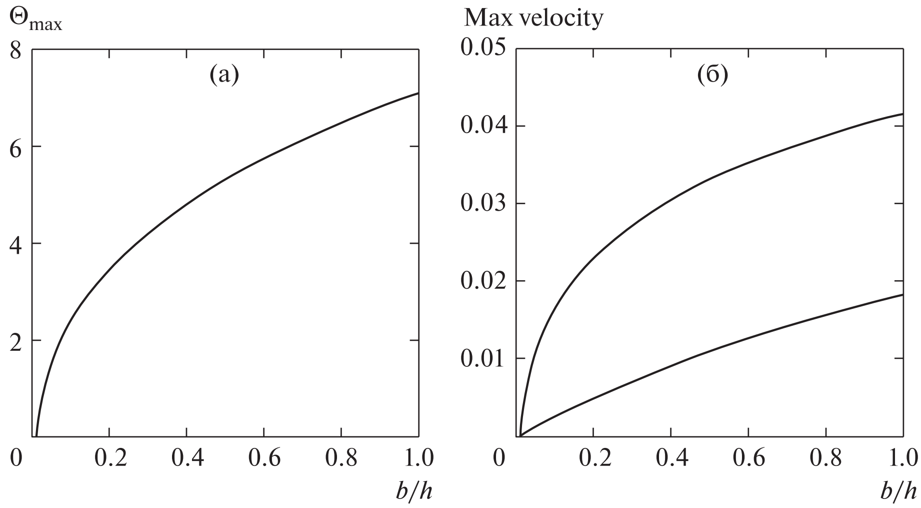

Рис. 7. Зависимость максимума возмущений температуры (*а*), возмущений модуля скорости $V_{max} = \max\sqrt{U^2 + (\partial\Psi/\partial y)^2 + (\partial\Psi/\partial z)^2}$ (*1*) и первой компоненты скорости U_{max} (*2*) от величины $\bar{b}$ при $Gr = 120$ для случая спиральных возмущений.

слоя. С ростом значения параметра $\bar{b}$ характер конечно-амплитудных возмущений качественно не меняется (рис. 4), максимум возмущений температуры и скорости возрастает (рис. 5)

$$\theta_{max} \approx \frac{1.8437\bar{b}}{0.18025\bar{b} + 0.0783}$$

$$U_{max} \approx \frac{0.15336\bar{b}}{2.5658\bar{b} + 0.8169}$$

Случай спиральных возмущений

Для пространственных периодических по y возмущений система имеет вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\Phi}{\partial t} + Gr\left[-\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial z} + v_0(z)\frac{\partial\Phi}{\partial y} + v_0''(z)\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right] = \Delta\Phi - \frac{\partial\theta}{\partial y} \\
\Delta\Psi + \Phi = 0 \\
\frac{\partial U}{\partial t} + Gr\left[-\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial z} + v_0(z)\frac{\partial U}{\partial y} + u_0'(z)\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right] = \Delta U \\
\frac{\partial\theta}{\partial t} + Gr\left[-\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial z} + v_0(z)\frac{\partial\theta}{\partial y} + u + \Pr Gr\theta_0'(z)\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right] = \frac{1}{\Pr}\Delta\theta \\
z = \pm 1: \quad \mu\bar{b}\Phi = \frac{\partial\Psi}{\partial z}, \quad \Psi = 0, \quad U = 0 \quad \theta = 0 \\
\Psi(t,0,z) = \Psi(t,L,z), \Phi(t,0,z) = \Phi(t,L,z), \quad U(t,0,z) = U(t,L,z), \quad \theta(t,0,z) = \theta(t,L,z)
\end{gathered} \tag{4.6}$$

где оператор Лапласа $\Delta = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$. Имеются все три компоненты возмущений скорости, которые зависят от времени t и двух пространственных координат y и z. $\Psi(t,y,z)$ – конечно-амплитудные возмущения функции тока, описывающие проекцию возмущений скорости на плоскость yOz, $U(t,y,z)$ – конечно-амплитудные возмущения первой компоненты скорости, описывающие проекцию возмущений скорости на плоскость xOz или xOy, $\Phi(t,y,z)$, $\theta(t,y,z)$ – конечно-амплитудные возмущения вихря скорости и температуры.

Нелинейная двумерная задача (4.6) решалась численно методом сеток, аналогично задаче (4.1)–(4.5). Основные расчеты проводились на сетке 101 × 150 при $0 \le \bar{b} \le 1$.

Вычисления, сделанные при $\overline{b} = 0$, совпали с результатами [1, 14] для случая твердых границ. Вблизи границ слоя формируются цепочка теплых и холодных пятен (рис. 6, *a*). Возмущения функции тока представляют собой структуру, состоящую в плоскости yOz из четырех вихрей. Вихри расположены вблизи горизонтальных границ слоя. Одновременно возмущения первой компоненты скорости описывают в плоскости xOy вихревые движения в центре слоя. С ростом значения параметра $\overline{b}$ характер конечно-амплитудных возмущений качественно не меняется, максимум возмущений температуры и скорости возрастает (рис. 7)

$$\Theta_{\max} \approx \frac{1.8967\overline{b}}{0.2027\overline{b} + 0.0718}$$

$$V_{\max} \approx \frac{0.1395\overline{b}}{2.7876\overline{b} + 0.6663}, \quad U_{\max} \approx \frac{0.05633\overline{b}}{0.9569\overline{b} + 2.13145}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлено точное решений уравнений Навье-Стокса, записанное в приближении Обербека-Буссинеска. Описано адвективное течение несжимаемой жидкости в бесконечном горизонтальном слое с условием проскальзывания Навье на границах, при наличии на них линейного распределения температуры. Профили скорости и температуры антисимметричны, показано, что с ростом длины скольжения точки их экстремума сдвигаются к границам горизонтального слоя, максимум и минимум скорости и температуры адвективного течения растут. Линейный анализ устойчивости свидетельствует, что с ростом $\overline{b}$ устойчивость течения падает: уменьшается критическое число Грасгофа. При $\overline{b} < 0.177$ более опасными являются спиральные возмущения, а при $\overline{b} > 0.177$ наиболее опасными являются плоские возмущения. Численное исследование конечно-амплитудных возмущений показало, что с ростом значения параметра проскальзывания $\overline{b}$ характер конечно-амплитудных возмущений качественно не меняетя, максимумы возмущений температуры и скорости возрастают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А.* Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 320 с.
2. *Остроумов Г.А.* Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М.: Гостехтеориздат, 1952. 286 с.
3. *Андреев В.К.* Решения Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения. Препринт СО РАН. ИВМ, № 1–10. Красноярск, 2010.
4. *Бирих Р.В.* О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. 1966. № 3. С. 69–72.
5. *Аристов С.Н., Шварц К.Г.* Адвективное течение во вращающейся жидкой пленке // Прикладная механика и техническая физика. 2016. Т. 57. № 1(335). С. 216–223. https://doi.org/10.15372/PMTF20160121
6. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Плоскопараллельные адвективные течения в вибрационном поле // Инженерно-физический журнал. 1989. Т. 56. № 2. С. 238–242.
7. *Бирих Р.В.* О вибрационной конвекции в плоском слое с продольным градиентом температуры // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1990. № 4. С. 12–15.
8. *Kaddeche S., Hendry D. and Benhadid H.* Magnetic stabilization of the buoyant convection between infinite horizontal walls with a horizontal temperature gradient // J. Fluid Mech. 2003. V. 480. P. 185–216. https://doi.org/10.1017/S0022112002003622
9. *Hudoba A., Molokov S., Aleksandrova S., and Pedcenko A.* Linear stability of buoyant convection in a horizontal layer of an electrically conducting fluid in moderate and high vertical magnetic field // Phys. Fluids 2016. V. 28. 094104; https://doi.org/10.1063/1.4962741
10. *Шварц К.Г.* Плоскопараллельное адвективное течение в горизонтальном слое несжимаемой жидкости с твердыми границами // Изв.РАН. МЖГ. 2014. № 4. С. 26–30.
11. *Шварц К.Г.* Плоскопараллельное адвективное течение в горизонтальном слое несжимаемой жидкости с внутренним линейным источником тепла // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82. Вып. 1. С. 25–30.
12. *Аристов С.Н., Шварц К.Г.* Конвективный теплообмен при локализованном нагреве плоского слоя несжимаемой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2013. № 3. С. 53–58.

13. *Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю.* Новый класс точных решений трехмерных уравнений термодиффузии // Теоретические основы химической технологии. 2016. Т. 50. № 3. С. 294–301.
14. *Gershuni G.Z., Laure P., Myznikov V.M., Roux B., Zhukhovitsky E.M.* On the stability of plane-parallel advective flows in long horizontal layers // Microgravity Q. 1992. V. 2. № 3. P. 141–151.
15. *Goldstein S.* Modern Developments In Fluid Mechanics. Oxford: Oxford Univ. Press, 1938. 330 p.
16. *Раджагопал К.Р.* О некоторых нерешенных проблемах нелинейной динамики жидкостей // Успехи математических наук. 2003. Вып. 58. № 2. С. 111–121.
17. *Lauga E., Brenner M.P., Stone H.A.* Microfluidics: The no-slip boundary condition / Springer Handbook of Experimental Fluid Mechanics / Ed by *Tropea C., Yarin A.L., Foss J.F.*). Springer, 2007. 1557 p.
18. *Neto C., Evans D.R., Bonaccurso E., Butt H.-J., Craig V.S.J., Williams D.R.M.* Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies // Rep. Prog. Phys. 2005. V. 68. P. 2859–2897.
19. *Granick S., Zhu Y., Lee H.* Slippery questions about complex fluids flowing past solids // Nature Materials. 2003. V. 2. P. 221–227.
20. *Шелухин В.В., Христенко У.А.* Об одном условии проскальзывания для уравнений вязкой жидкости // ПМТФ. 2013. Т. 54. № 5. С. 101–109.
21. *Борзенко Е.И., Дьякова О.А., Шрагер Г.Р.* Исследование явления проскальзывания в случае течения вязкой жидкости в изогнутом канале // Вестн. ТГУ. Механика. 2014. № 2 (28). С. 35–44.
22. *Сагитов Р.В., Шарифулин А.Н.* Влияние проскальзывания на бифуркацию конвективных режимов в наклонной замкнутой полости // Пермские гидродинамические научные чтения: материалы всерос. конф. с междунар. участием, посвящ. памяти проф. Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкого и Д.В. Любимова / отв. ред. М.А. Кашина; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2018. С. 268–270.
23. *Dubov A.L., Nizkaya T.V., Asmolov E.S., and Vinogradova O.I.* Boundary conditions at the gas sectors of superhydrophobic grooves // Phys. Rev. Fluids. 2018. V. 3. 014002. https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.3.014002
24. *Аристов С.Н., Шварц К.Г.* Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. Пермь: Перм. ун-т, 2006. 155 с.
25. *Тарунин Е.Л., Шварц К.Г.* Исследование линейной устойчивости адвективного течения методом сеток // Вычисл. технологии. 2001. Т. 6. № 6. С. 108–117.
26. *Тарунин Е.Л.* Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. Ун-та, 1990. 225 с.
27. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
28. *Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.* Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. Спб.: Изд-во "Лань", 2008. 400 с.