ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2020, № 1, с. 91–103

УДК 532.546

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТЕРЬ ДАВЛЕНИЯ НА ТРЕНИЕ В ПРИЗАБОЙНОЙ ЗОНЕ ТРЕЩИНЫ ГРП

© 2020 г. И. К. Гималтдинов[a,b,]*, А. М. Ильясов[c,]**

[a] *Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия*

[b] *Академия наук Республики Башкортостан, Уфа, Россия*

[c] *Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия*

**E-mail:iljas_g@mail.ru*

***E-mail: amilyasov67@gmail.com*

Поступила в редакцию 10.04.2019 г.
После доработки 10.07.2019 г.
Принята к публикации 12.07.2019 г.

Предложена математическая модель, описывающая изменение давления в трещине гидравлического разрыва пласта (ГРП) после остановки закачки жидкости гидроразрыва и учитывающая потери на трение в призабойной зоне скважины вследствие искривления траектории трещины и наличия перфорационных отверстий. Получены аналитические решения для давления в трещине ГРП после остановки закачки жидкости гидроразрыва при монотонном и колебательном режимах течения в трещине, а также аналитические выражения для падения давления в призабойной зоне скважины. Выполнено параметрическое исследование полученных решений.

Ключевые слова: трещина гидроразрыва пласта, монотонный и осцилляционный режимы течения, потери давления на трение

DOI: 10.31857/S0568528120010053

Для приложений представляет интерес задача о полных потерях давления на трение во время закачки жидкости ГРП. Эти потери складываются из потерь давления в насосно-компрессорных трубах (НКТ) в скважине, потерь в перфорационных отверстиях и потерь в трещине. Если известны реологические свойства жидкости ГРП, то потери давления в НКТ и в большей части трещины ГРП известны. Однако потери давления в призабойной зоне трещины заранее не известны и могут быть существенными. Эти потери возникают из-за наличия перфорационных отверстий и искривления траектории трещины ГРП при ее развитии. Основные потери давления в перфорационных отверстиях будут происходить в перфорационных отверстиях, вовлеченных в развитие трещины ГРП.

При формировании вертикальной трещины ГРП ее траектория стремится отклониться в направлении максимального горизонтального напряжения, рис. 1. В результате траектория трещины становится криволинейной. Актуальной задачей при моделировании процесса развития трещины ГРП является адекватный учет потерь давления в такой криволинейной трещине. Эти потери давления складываются из потерь на вязкое трение, потерь в перфорационных отверстиях скважины и потерь вследствие искривления траектории трещины ГРП после выхода из перфорационных каналов. Последние возникают из-за дополнительных потерь (по сравнению с потерями в трещине с прямолинейной траекторией) на вязкое трение и потерь, связанных с тем, что на некотором расстоянии ε от скважины после поворота траектории трещины из-за падения давления образуется самое узкое, исключая край трещины, поперечное сечение трещины — своеобразный “клапан”, который создает дополнительные потери давления [1]. Если за пространственную координату s принять естественную координату — дугу траектории трещины, то для симметричной относительно скважины трещины ГРП при $|s| > \varepsilon$ траектория трещины становится практически прямолинейной, а потери на трение определяются только вязким трением, рис. 1.

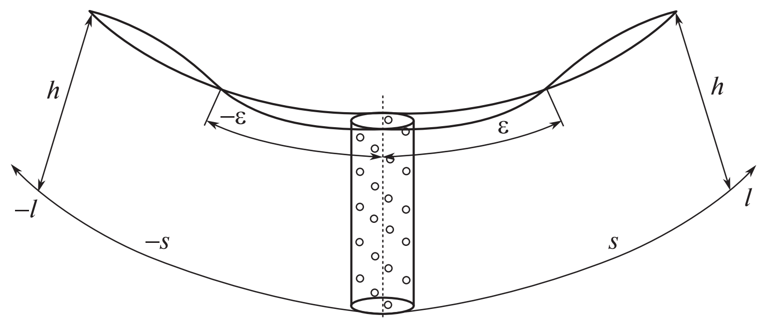

Рис. 1. Схема к постановке задачи.

В приложениях потери давления из-за вязкого трения в прямолинейной трещине рассчитываются по обычным гидравлическим формулам [2]. Потери давления в перфорационных отверстиях определяются согласно [3]:

$$\Delta p_{per} = \rho(v_{per}/C_d)^2/2$$

где ρ – плотность жидкости; C_d – коэффициент сжатия струи; v_{per} – скорость жидкости в перфорационных отверстиях.

Потери давления вследствие кривизны траектории трещины ГРП рассчитываются согласно формуле [1]:

$$\Delta p_c = Kv^{\beta}$$

где K – коэффициент пропорциональности, v – скорость жидкости в трещине, а параметр β принадлежит интервалу $0.25 \le \beta \le 1$.

Однако для каждой операции ГРП (скважины) потери давления на трение индивидуальны, поскольку, во-первых, неизвестно число перфорационных отверстий, вовлеченных в процесс развития трещины, от которого зависит скорость течения v_{per} в перфорационных отверстиях. Во-вторых, в зависимости от направлений перфорационных каналов, а также минимального и максимального горизонтального напряжений в призабойной зоне скважины зависит кривизна траектории трещины ГРП в этой зоне. Как следствие, являются неизвестными коэффициент K и показатель степени β.

Одним из способов оценки потерь на трение в прискважинной зоне является использование данных забойных датчиков давления после остановки закачки жидкости гидроразрыва. На практике динамика падения забойного давления после остановки насоса представлена двумя основными режимами – монотонным и колебательным. Монотонный режим падения забойного давления в трещине ГРП без проппанта можно описать уравнениями параболического типа, например, уравнением Перкинса–Керна-Нордгрена (ПКН) [4, 5]. Классическая модель ПКН использует гидравлическое приближение, приближение теории смазки и решение Снеддона [6] о раскрытии трещины в плоскости, находящейся в состоянии плоской деформации, на берега которой действуют нормальные напряжения. В классической модели ПКН жидкость гидроразрыва является ньютоновской. Имеются обобщения этой модели, когда в качестве жидкости ГРП рассматриваются неньютоновские жидкости [1]. В недавних работах [7, 8] для закрепленной проппантом полубесконечной трещины ГРП на основе уравнения пъезопроводности выведено интегро-дифференциальное уравнение для давления в трещине и получены его автомодельные решения в виде бегущих волн давления, когда трещину и пласт насыщают ньютоновские жидкости, а на скважине задан гармонический сигнал.

Однако для трещин ГРП конечной длины колебательный режим падения давления при стационарных граничных условиях можно описать только уравнениями гиперболического типа. В работе [9] выполнено обобщение классической модели ПКН с учетом инерционных слагаемых. В результате параболическая система уравнений изменяет свой тип, преобразуясь в систему уравнений строго гиперболического типа. В работе [10] на базе модели, развитой в работе [9], предложена математическая модель для описания изменения давления после остановки закачки жидкости гидроразрыва в прямолинейной симметричной трещине ГРП без учета влияния скважины.

В данной работе предпринята попытка оценить потери давления на трение в призабойной зоне трещины ГРП (по первой амплитуде в колебательном режиме и по полному падению в монотонном режиме) во время закачки жидкости гидроразрыва по данным забойных датчиков давления после остановки закачки жидкости гидроразрыва в “тестовом” ГРП. Для этой цели предлагается обобщение модели [10] и решается прямая задача об изменении давления в призабойной зоне трещины после остановки насоса с учетом перфорационных отверстий и кривизны траектории трещины. В свою очередь, это решение можно использовать для решения обратной задачи по данным забойных манометров после остановки насоса.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Как было отмечено во введении, описание течения в трещине ГРП основано на обобщении модели ПКН гиперболического типа [9].

Путем линеаризации модели, предложенной в работе [9], получена математическая модель, описывающая течение жидкости в прямолинейной трещине ГРП после остановки закачки жидкости гидроразрыва [10]

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + w_0 \frac{\partial v'}{\partial x} = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{b}{\rho}\frac{\partial w'}{\partial x} = -\frac{12\mu v'}{\rho w_0^2} \tag{1.2}$$

где w' – возмущения раскрытия трещины; v' – возмущения скорости течения жидкости ГРП в трещине; ρ – постоянная плотность жидкости ГРП в трещине; $b = 4G/(\pi h(1-\nu)) > 0$ – жесткость трещины, где h – постоянная высота трещины, а G, ν – соответственно модуль сдвига и коэффициент Пуассона породы; μ – вязкость жидкости.

Возмущенные поля раскрытия трещины и скорости течения рассматриваются относительно стационарного “фонового” решения системы уравнений ПКН гиперболического типа без учета утечек жидкости через стенки трещины. Это фоновое решение подчиняется системе уравнений

$$v_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} + w_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0$$

$$\frac{b}{\rho}\frac{\partial w_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} = -\frac{12\mu v_0}{\rho w_0^2}$$

Величину $w_0 = \mathrm{const}$ можно трактовать как эффективное раскрытие трещины, на фоне которого происходят ее собственные колебания с нулевой скоростью частиц жидкости $v_0 = 0$.

Рассмотрим, например, правое “крыло” симметричной трещины ГРП, рис. 1. Как было сказано во введении, на расстоянии ε вдоль траектории трещины от перфорационных отверстий траектория трещины становится прямолинейной. При $x > \varepsilon$ потери давления в трещине определяются только вязким трением. Разумеется, в интервале $0 \le x \le \varepsilon$ также действует вязкое трение, как и для прямолинейной трещины, но в интервале $0 \le x \le \varepsilon$ еще имеются дополнительные потери давления, которые определяются кривизной траектории трещины и наличием “клапана” в точке с координатой $x = \varepsilon$.

Обозначим через $(\Delta p)_1$ перепад давления за счет вязкого трения в прямолинейной трещине в интервале $0 \le x \le \varepsilon$. Просуммируем дополнительные потери давления в этом интервале за счет кривизны и перфорационных отверстий и обозначим соответствующий перепад давления через $(\Delta p)_2$. Поставим прямую задачу определения введенных перепадов после остановки закачки жидкости ГРП. При этом будем опираться на уравнения (1.1), (1.2) модели течения в прямолинейной трещине ГРП без учета скважины.

Для учета суммарного гидравлического сопротивления в прискважинном интервале трещины ГРП ($-\varepsilon \le x \le \varepsilon$) за счет потерь в перфорационных отверстиях и поворота трещины ГРП при выходе из перфорационных каналов систему уравнений из работы [9] необходимо модифицировать (здесь не приведена). Для этого добавим в уравнение импульсов дополнительное линейное слагаемое, отвечающее за указанные потери давления. Тогда система уравнений для возмущенного течения примет вид

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + w_0 \frac{\partial v'}{\partial x} = 0 \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{b}{\rho}\frac{\partial w'}{\partial x} = -\frac{12\mu v'}{\rho w_0^2} - K_c v' \tag{1.4}$$

где K_c – коэффициент трения, имеющий в системе единиц СИ размерность с$^{-1}$. Последнее слагаемое в (1.4) действует не на всей длине симметричной трещины ГРП, а только в некотором интервале ($-\varepsilon \le x \le \varepsilon$) призабойной зоны. При этом в правой части уравнения движения фонового решения появится аналогичное линейное слагаемое $-K_c v_0$, но указанное выше стационарное решение останется таким же, как и в работе [10]. Линейное представление потерь давления на дополнительное трение в призабойной зоне является модельным допущением.

Дифференцируя уравнение (1.3) по времени, а уравнение (1.4) по пространственной координате, получим уравнение для возмущений раскрытия трещины в рассматриваемом случае

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + b_0 \frac{\partial w'}{\partial t} = f(x,t) = -K_c \frac{\partial w'}{\partial t}, \quad a_0^2 = \frac{b w_0}{\rho}, \quad b_0 = \frac{12\mu}{\rho w_0^2} \tag{1.5}$$

2. НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Предлагается постановка начально-краевой задачи о собственных колебаниях трещины ГРП после остановки насоса, рассмотренная в работе [10]. Найти решение уравнения (1.5) для возмущений раскрытия трещины при следующих граничных и начальных условиях (края трещины фиксированы)

$$w'(-l,t) = w'(l,t) = 0 \tag{2.1}$$

$$w'(x,0) = \begin{cases} \dfrac{w'_{\max}}{l}(x+l), & x \in [-l,0] \\ \dfrac{w'_{\max}}{l}(l-x), & x \in [0,l] \end{cases}, \quad w'_t(x,0) = 0 \tag{2.2}$$

Условия (2.1) и (2.2) означают, что возмущения граничных условий равны нулю, после остановки закачки жидкости ГРП возмущение раскрытия трещины линейно распределено вдоль трещины (первое начальное условие) и скорость возмущения раскрытия трещины равна нулю (второе начальное условие).

3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Сделаем замену переменных

$$x' = (x+l)/2 \tag{3.1}$$

Тогда в новых переменных уравнение (1.5) примет вид

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} - \frac{a_0^2}{4}\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + b_0 \frac{\partial w'}{\partial t} = f(x,t) = -K_c \frac{\partial w'}{\partial t} \tag{3.2}$$

где y независимой пространственной переменной штрихи опущены, а слагаемое в правой части уравнения (3.2) действует на интервале $(1-\varepsilon)/2 \le x \le (1+\varepsilon)/2$.

Граничные и начальные условия (2.1) в новых переменных примут вид

$$w'(0,t) = w'(l,t) = 0 \tag{3.3}$$

$$\varphi(x) = w'(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2w'_{\max}x}{l}, & x \in [0,l/2] \\ \dfrac{2(l-x)w'_{\max}}{l}, & x \in [l/2,l] \end{cases}, \quad \psi(x) = w'_t(x,0) = 0 \tag{3.4}$$

В работе [10] получено аналитическое решение уравнения (3.2) без правой части при начально-краевых условиях (3.3), (3.4). Показано, что возможны два основных типа решения для поведения давления (раскрытия) в трещине после остановки насоса –монотонное и колебательное.

Монотонное решение реализуется для гармоник с преобладанием инерционных сил над вязкими силами и в новых переменных (3.1) имеет вид

$$
\begin{gathered}
b_0^2 > a_0^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1,\ldots,m, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{b_0^2 - \lambda_n^2 a_0^2}{4}}, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l} \\
w_1'(x,t) = \exp(-b_0 t/2)\sum_1^{\infty}\left(A_n \exp(\omega_n t) + B_n \exp(-\omega_n t)\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \\
b_0 = \frac{12\mu}{\rho w_0^2}, \quad a_0^2 = \frac{b w_0}{\rho}, \quad A_n = \frac{b_n(\omega_n + b_0/2)}{2\omega_n} \\
B_n = \frac{b_n(\omega_n - b_0/2)}{2\omega_n}, \quad b_n = \frac{8w'_{\max}}{(\pi n)^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)
\end{gathered}
\tag{3.5}
$$

Колебательное решение реализуется для гармоник с преобладанием вязких сил над силами инерции и в новых переменных (3.1) имеет вид

$$
\begin{gathered}
b_0^2 < a_0^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = m+1,\ldots \quad \omega_n = \sqrt{\frac{\lambda_n^2 a_0^2 - b_0^2}{4}} \\
w_2'(x,t) = \exp(-b_0 t/2)\sum_1^{\infty}\left(A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \\
A_n = b_n, \quad B_n = \frac{b_0 b_n}{2\omega_n}
\end{gathered}
\tag{3.6}
$$

Допустим, что для уравнения (3.2) при начально-краевых условиях (3.3), (3.4) решение для раскрытия трещины в интервале $(l-\varepsilon)/2 \le x \le (l+\varepsilon)/2$ будет иметь тот же вид (3.5) или (3.6), что и в случае собственных колебаний трещины ГРП без учета наличия скважины и кривизны ее траектории.

Дифференцирование по времени решения (3.5) дает вид слагаемого в правой части уравнения (1.5), отвечающего за дополнительные потери давления на трение из-за кривизны трещины и потерь в перфорационных отверстиях в призабойной зоне трещины ГРП в случае монотонного режима течения в трещине:

$$
\begin{gathered}
f(x,t) = -K_c \exp(-b_0 t/2)\sum_1^{\infty}\left(\alpha_m \exp(\omega_m t) - \gamma_m \exp(-\omega_m t)\right)\sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right) \\
\alpha_m = A_m(\omega_m - b_0/2), \quad \gamma_m = B_m(\omega_m + b_0/2)
\end{gathered}
\tag{3.7}
$$

Дифференцирование по времени решения (3.6) дает вид аналогичного слагаемого в правой части уравнения (1.5) в случае колебательного режима течения в трещине:

$$
\begin{gathered}
f(x,t) = K_c \exp(-b_0 t/2)\sum_1^{\infty}\left(\alpha_m \cos(\omega_m t) + \gamma_m \sin(\omega_m t)\right)\sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right) \\
\alpha_m = A_m b_0/2 - B_m\omega_m = 0, \quad \gamma_m = B_m b_0/2 + \omega_m A_m
\end{gathered}
\tag{3.8}
$$

Первое равенство во второй строке (3.8) следует из двух последних соотношений (3.6).

Для нахождения аналитического решения задач (3.2)–(3.4), (3.7) или (3.2)–(3.4), (3.8) применим метод разделения переменных [11]. Будем искать решение этой задачи в виде разложения в ряд Фурье по синусам

$$
w'(x,t) = \sum_1^{\infty} w_n(t)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)
\tag{3.9}
$$

Очевидно, что представление (3.9) удовлетворяет граничным условиям (3.3). Также представим в виде рядов Фурье функцию $f(x, t)$ и начальные условия $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

$$f(x,t) = \sum_1^\infty f_n(t)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\left(\frac{\pi n \xi}{l}\right)d\xi \tag{3.10}$$

$$\varphi(x) = \sum_1^\infty \varphi_n\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\left(\frac{\pi n \xi}{l}\right)d\xi \tag{3.11}$$

$$\psi(x) = \sum_1^\infty \psi_n\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad \psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\sin\left(\frac{\pi n \xi}{l}\right)d\xi \tag{3.12}$$

Из выражений (3.9), (3.11) и (3.12) следуют равенства

$$w_n(0) = \varphi_n, \quad \dot{w}_n(0) = \frac{dw_n(0)}{dt} = \psi_n \tag{3.13}$$

Подстановка выражений (3.9) и (3.10) в уравнение (3.2) приводит к уравнению

$$\ddot{w}_n(t) + b_0\dot{w}_n(t) + \frac{a_0^2}{4}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad w_n(t) = f_n(t) \tag{3.14}$$

По принципу суперпозиции решение уравнения (3.14) можно представить в виде суммы решения однородной задачи $w_n^{(1)}$ сданными начальными условиями (3.4) и решения неоднородной задачи $w_n^{(2)}$ с однородными начальными условиями

$$w_n = w_n^{(1)} + w_n^{(2)} \tag{3.15}$$

Монотонное решение однородного уравнения (3.14) имеет вид

$$w_n^{(1)}(t) = \exp(-b_0t/2)\left(A_n\exp(\omega_nt) + B_n\exp(-\omega_nt)\right) \tag{3.16}$$

а колебательное решение однородного уравнения (3.14) имеет вид

$$w_n^{(1)}(t) = \exp(-b_0t/2)\left(A_n\cos(\omega_nt) + B_n\sin(-\omega_nt)\right) \tag{3.17}$$

Решение неоднородной задачи $w_n^{(2)}$ с однородными начальными условиями представляется в виде [11]:

$$w_n^{(2)}(t) = \int_0^t w_n^{(1)}(t-\tau)f_n(\tau)d\tau \tag{3.18}$$

где решение $w_n^{(1)}$ удовлетворяет начальным условиям

$$w_n^{(1)}(0) = 0, \quad \frac{dw_n^{(1)}(0)}{dt} = 1 \tag{3.19}$$

Из уравнений (3.16)–(3.19) находятся решения неоднородного уравнения в случае монотонного движения в трещине

$$w_n^{(2)}(t) = \int_0^t \frac{e^{-b_0(t-\tau)/2}}{\omega_n}sh(\omega_n(t-\tau))f_n(\tau)d\tau \tag{3.20}$$

и в случае колебательного движения

$$w_n^{(2)}(t) = \int_0^t \frac{e^{-b_0(t-\tau)/2}}{\omega_n}\sin(\omega_n(t-\tau))f_n(\tau)d\tau \tag{3.21}$$

Вычисление коэффициентов $f_n(t)$ согласно (3.10), (3.7) и (3.8) дает следующие выражения. Для монотонного течения

$$f_n(t) = -\frac{2K_c}{l}\exp(-b_0t/2)\sum_1^\infty\left(\alpha_m\exp(\omega_mt) - \gamma_m\exp(-\omega_mt)\right)z_{nm} \tag{3.22}$$

а для колебательного течения

$$f_n(t) = \frac{2K_c}{l}\exp(-b_0t/2)\sum_1^\infty \gamma_m \sin(\omega_m t) z_{nm} \tag{3.23}$$

где коэффициенты z_{nm} определяются по формуле

$$z_{nm} = \begin{cases} \varepsilon - \dfrac{l}{2\pi n}\sin\dfrac{\pi n\varepsilon}{l}\cos(\pi n), & n = m \\ \dfrac{l}{\pi(n-m)}\sin\dfrac{\pi(n-m)\varepsilon}{2l}\cos\dfrac{\pi(n-m)}{2} - \\ -\dfrac{l}{\pi(n+m)}\sin\dfrac{\pi(n+m)\varepsilon}{2l}\cos\dfrac{\pi(n+m)}{2}, & n \neq m \end{cases} \tag{3.24}$$

Подстановка (3.22) и (3.23) соответственно в (3.20) и (3.21), применение принципа суперпозиции (3.15) и разложения (3.9) дает следующие решения для возмущенного раскрытия трещины ГРП после остановки насоса. В случае монотонного течения в "старых" переменных имеем решение

$$\begin{gathered} w_1'(x,t) = \exp(-b_0t/2)\sum_{n=1}^\infty \left(A_n\exp(\omega_n t) + B_n\exp(-\omega_n t)\right)\sin\left(\frac{\pi n(x+l)}{2l}\right) - \\ -\frac{K_c}{l}\exp(-b_0t/2)\sum_{n=1}^\infty\sum_{m=1}^\infty \frac{z_{nm}}{\omega_n}\left(\alpha_m\beta_{nm}(t) - \gamma_m\delta_{nm}(t)\right)\sin\left(\frac{\pi n(x+l)}{2l}\right) \end{gathered} \tag{3.25}$$

где α_m, γ_m выражаются через константы A_m, B_m согласно двум последним формулам (3.7), а функции времени $\beta_{nm}(t)$ и $\delta_{nm}(t)$ равны соответственно

$$\beta_{nm}(t) = \begin{cases} t\exp(\omega_n t) - \dfrac{1}{\omega_n}\mathrm{sh}(\omega_n t), & n = m \\ \dfrac{1}{\omega_m - \omega_n}\left(\exp(\omega_m t) - \exp(\omega_n t)\right) - \dfrac{1}{\omega_m + \omega_n}\left(\exp(\omega_m t) - \exp(-\omega_n t)\right), & n \neq m \end{cases} \tag{3.26}$$

$$\delta_{nm}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_n}\mathrm{sh}(\omega_n t) - t\exp(-\omega_n t), & n = m \\ \dfrac{1}{\omega_m + \omega_n}\left(\exp(\omega_n t) - \exp(-\omega_m t)\right) - \\ -\dfrac{1}{\omega_n - \omega_m}\left(\exp(-\omega_m t) - \exp(-\omega_n t)\right), & n \neq m \end{cases} \tag{3.27}$$

В случае колебательного течения в "старых" переменных решение имеет вид

$$\begin{gathered} w_2'(x,t) = \exp(-b_0t/2)\sum_{n=1}^\infty \left(A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t)\right)\sin\left(\frac{\pi n(x+l)}{2l}\right) + \\ +\frac{2K_c}{l}\exp(-b_0t/2)\sum_{n=1}^\infty\sum_{m=1}^\infty \frac{z_{nm}}{\omega_n}\gamma_m\beta_{nm}(t)\sin\left(\frac{\pi n(x+l)}{2l}\right) \end{gathered} \tag{3.28}$$

где γ_m выражается через константы A_m, B_m согласно последней формуле (3.8), а функция времени $\beta_{nm}(t)$ равна

$$\beta_{nm}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\omega_n}\sin(\omega_n t) - \dfrac{t}{2}\cos(\omega_n t), & n = m \\ \dfrac{1}{2(\omega_m + \omega_n)}\left(\sin(\omega_n t) - \sin(\omega_m t)\right) - \\ -\dfrac{1}{2(\omega_m - \omega_n)}\left(\sin(\omega_m t) - \sin(\omega_n t)\right), & n \neq m \end{cases} \tag{3.29}$$

В решениях (3.25) и (3.28) выполнена обратная замена пространственной переменной (3.1).

Согласно допущениям модели ПКН изменение давления в трещине подчиняется уравнению [10]

$$p(x,t) = \sigma + bw_0 + bw'(x,t) \tag{3.30}$$

где σ – постоянное минимальное горизонтальное напряжение в окрестности стенок трещины ГРП. Для монотонного и колебательного режимов течения после остановки закачки жидкости ГРП в последнее слагаемое в правой части (3.30) нужно подставить решения (3.25) и (3.28) соответственно.

4. ПОТЕРИ ДАВЛЕНИЯ НА ТРЕНИЕ В ПРИСКВАЖИННОЙ ОБЛАСТИ

Дифференцирование (3.25) по времени, подстановка в уравнение (1.3) и последующее интегрирование полученного уравнения по пространственной координате дают поле возмущенной скорости в трещине при монотонном течении

$$v_1'(x,t) = v_1 + v_2$$
$$v_1 = \frac{\exp(-b_0t/2)}{w_0}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\exp(\omega_nt) - \gamma_n\exp(-\omega_nt)\right)\frac{2l}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n(x+l)}{2l}\right) \tag{4.1}$$
$$v_2e^{(b_0t/2)} = \frac{K_c}{w_0l}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z_{nm}}{\omega_n}[\alpha_m(\beta_{nm}(t)b_0/2 - \beta'_{nm}(t)) + \gamma_m(\delta'_{nm}(t) - \delta_{nm}(t)b_0/2)]\frac{2l}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n(x+l)}{2l}\right)$$

В формуле (4.1) введены обозначения

$$\beta'_{nm}(t) = \left[\begin{array}{l}\exp(\omega_nt) + \omega_nt\exp(\omega_nt) - \mathrm{ch}(\omega_nt), \quad n = m\\ \dfrac{1}{\omega_m - \omega_n}\left(\omega_m\exp(\omega_mt) - \omega_n\exp(\omega_nt)\right) - \\ -\dfrac{1}{\omega_m + \omega_n}\left(\omega_m\exp(\omega_mt) + \omega_n\exp(-\omega_nt)\right), \quad n \neq m\end{array}\right. \tag{4.2}$$

$$\delta'_{nm}(t) = \left[\begin{array}{l}\mathrm{ch}(\omega_nt) - \exp(-\omega_nt) + \omega_nt\exp(-\omega_nt), \quad n = m\\ \dfrac{1}{\omega_m + \omega_n}\left(\omega_n\exp(\omega_nt) + \omega_m\exp(-\omega_mt)\right) - \\ -\dfrac{1}{\omega_n - \omega_m}\left(\omega_n\exp(-\omega_nt) - \omega_m\exp(-\omega_mt)\right), \quad n \neq m\end{array}\right. \tag{4.3}$$

Дифференцирование (3.28) по времени, подстановка в уравнение (1.3) и интегрирование полученного уравнения по пространственной координате дают поле возмущенной скорости в трещине при колебательном течении

$$v_2'(x,t) = v_1 + v_2$$
$$v_1 = -\frac{\exp(-b_0t/2)}{w_0}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos(\omega_nt) + \gamma_n\sin(\omega_nt)\right)\frac{2l}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n(x+l)}{2l}\right) \tag{4.4}$$
$$v_2 = \frac{2K_c\exp(-b_0t/2)}{w_0l}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z_{nm}}{\omega_n}\gamma_m(\beta'_{nm}(t) - \beta_{nm}(t)b_0/2)\frac{2l}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n(x+l)}{2l}\right)$$

где введено обозначение

$$\beta'_{nm}(t) = \left[\begin{array}{l}\omega_n\dfrac{t}{2}\sin(\omega_nt) - \dfrac{1}{2}\cos(\omega_nt), \quad n = m\\ \dfrac{1}{2(\omega_m + \omega_n)}\left(\omega_n\cos(\omega_nt) - \omega_m\cos(\omega_mt)\right) - \\ -\dfrac{1}{2(\omega_m - \omega_n)}\left(\omega_m\cos(\omega_mt) - \omega_n\cos(\omega_nt)\right), \quad n \neq m\end{array}\right. \tag{4.5}$$

Часть поля скорости v_1 в трещине не учитывает наличие скважины и кривизну траектории трещины. Эта часть всегда присутствует в симметричной прямолинейной трещине. Дополнительная часть поля скорости v_2 связана с кривизной траектории трещины и потерями на трение в перфорационных отверстиях.

Наконец, перепад давления $\Delta p(t)$ в призабойной зоне симметричной трещины можно определить по формуле

$$\Delta p(t) = \frac{12\mu}{w_0^2}\int_0^{\varepsilon}\left|v_1(x,t)\right| dx + K_c\rho\int_0^{\varepsilon}\left|v_2(x,t)\right| dx \tag{4.6}$$

Подстановка (4.1)–(4.3) в уравнение (4.6) дает величину перепада давления в ε окрестности скважины как функцию времени для монотонного режима течения в трещине

$$\begin{gathered}
\Delta p(t) = (\Delta p)_1(t) + (\Delta p)_2(t)\\
(\Delta p)_1 = \frac{12\mu}{w_0^3}\left|\exp(-b_0t/2)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\exp(\omega_n t) - \gamma_n\exp(-\omega_n t)\right)\left(\frac{2l}{\pi n}\right)^2\left(\sin\frac{\pi n(\varepsilon + l)}{2l} - \sin\frac{\pi n}{2}\right)\right|\\
(\Delta p)_2 = \frac{K_c^2\rho}{w_0 l}\left|\exp(-b_0t/2)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z_{nm}}{\omega_n}g_{nm}\left(\frac{2l}{\pi n}\right)^2\left(\sin\frac{\pi n(\varepsilon + l)}{2l} - \sin\frac{\pi n}{2}\right)\right|\\
g_{nm} = \alpha_m(\beta_{nm}(t)b_0/2 - \beta'_{nm}(t)) + \gamma_m(\delta'_{nm}(t) - \delta_{nm}(t)b_0/2)
\end{gathered} \tag{4.7}$$

Подстановка (4.4) и (4.5) в (4.6) дает величину перепада давления в ε-окрестности скважины как функцию времени при колебательном режиме течения в трещине

$$\begin{gathered}
\Delta p(t) = (\Delta p)_1(t) + (\Delta p)_2(t)\\
(\Delta p)_1 = \frac{12\mu}{w_0^3}\left|\exp(-b_0t/2)\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\sin(\omega_n t)\left(\frac{2l}{\pi n}\right)^2\left(\sin\frac{\pi n(\varepsilon + l)}{2l} - \sin\frac{\pi n}{2}\right)\right|\\
(\Delta p)_2 = \frac{2K_c^2\rho}{w_0 l}\left|\exp(-b_0t/2)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z_{nm}}{\omega_n}\gamma_m(\beta'_{nm}(t) - \beta_{nm}(t)b_0/2)\left(\frac{2l}{\pi n}\right)^2\left(\sin\frac{\pi n(\varepsilon + l)}{2l} - \sin\frac{\pi n}{2}\right)\right|
\end{gathered} \tag{4.8}$$

где введено обозначение

$$\beta'_{nm}(t) = \begin{cases}
\omega_n\dfrac{t}{2}\sin(\omega_n t) - \dfrac{1}{2}\cos(\omega_n t), & n = m\\[2mm]
\dfrac{1}{2(\omega_m + \omega_n)}\left(\omega_n\cos(\omega_n t) - \omega_m\cos(\omega_m t)\right) - \\
-\dfrac{1}{2(\omega_m - \omega_n)}\left(\omega_m\cos(\omega_m t) - \omega_n\cos(\omega_n t)\right), & n \neq m
\end{cases} \tag{4.9}$$

В формулах (4.7) и (4.8) перепад давления $(\Delta p)_1$ в призабойной зоне возникает из-за вязкости жидкости гидроразрыва пласта и не учитывает кривизну трещины и наличие перфорационных каналов. Перепад давления $(\Delta p)_2$ в призабойной зоне порождается кривизной траектории трещины и потерями давления на трение в перфорационных каналах.

Если $K_c \to 0$, а $\varepsilon \neq 0.1$, то выражения (4.7) и (4.8) определяют изменение по времени перепада давления в призабойной зоне трещины протяженностью ε одного крыла симметричной прямолинейной трещины ГРП. Если $K_c \to 0$, а $\varepsilon \to 1$, то выражения (4.7) и (4.8) определяют изменение по времени перепада давления в одном крыле симметричной прямолинейной трещины ГРП длиной l. Если $K_c \neq 0$, а $\varepsilon \to 0$, то, как и следовало ожидать, перепад давления стремится к нулю $\Delta p \to 0$. Если $K_c \neq 0$, а $\varepsilon \neq 0, 1$, то выражения (4.7) и (4.8) определяют изменение по времени перепада давления в призабойной зоне протяженностью ε одного крыла симметричной криволинейной трещины ГРП с учетом потерь в перфорационных отверстиях эксплуатационной колонны. И, наконец, если $K_c \neq 0$, а $\varepsilon \to 1$, то выражения (4.7) и (4.8) определяют изменение по времени перепада давления на всем крыле протяженностью l симметричной криволинейной трещины ГРП с учетом потерь в перфорационных отверстиях эксплуатационной колонны.

При выводе формул (4.7) и (4.8) неоднократно использовались операции почленного дифференцирования и интегрирования рядов Фурье. Вопросы обоснования таких процедур, а также

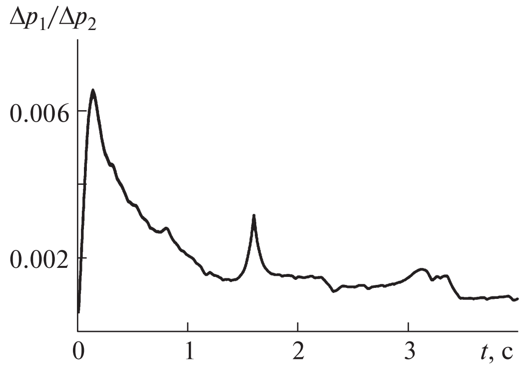

Рис. 2. Тестовый расчет. Сплошная линия – $n = m = 60$, штриховая – $n = m = 80$.

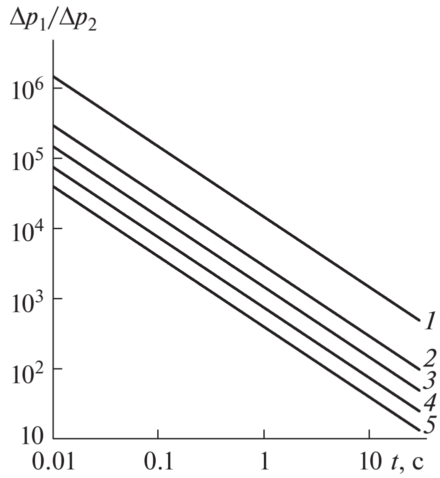

Рис. 3. Отношение перепадов давления $(\Delta p)_1/(\Delta p)_2$ при монотонном режиме течения в трещине от времени для различных протяженностей области поворота ε при $K_c = 0.1$ с$^{-1}$. Линии 1–5 соответствуют ε=1, 5, 10, 20, 40 (м).

сходимости функциональных однократных рядов, рассмотрены в работах [12, 13], а двукратных рядов – в работе [13]. На практике рассматриваются не бесконечные ряды, а конечные суммы, поэтому вопрос обоснования операций их почленного интегрирования, дифференцирования и т.д. не стоит. Однако может стоять вопрос о неустойчивом нарастании малых возмущений при суммировании конечных сумм с большим количеством членов [12].

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

На рис. 2–7 представлены результаты расчетов по полученным решениям. При вычислениях были использованы следующие параметры: $\rho = 1000$ кг/м^3, $\mu = 0.001$ Па с, $w_0 = 0.0023$ м, $l = 100$ м, $h = 10.0$ м, $w'_{\max} = 0.0001$ м, $G = 10^{10}$ Па, $\nu = 0.25$. Используемая вязкость соответствует вязкости воды при замещении скважинной жидкости линейным гелем. Это один из вариантов тестового ГРП.

На рис. 2 показаны графики отношений перепадов давления $(\Delta p)_1/(\Delta p)_2$ в колебательном режиме течения после остановки насоса при указанных выше параметрах. Непрерывная кривая соответствует количеству членов ряда $n = 60$, $m = 60$. Штриховая кривая соответствует количеству членов ряда $n = 80$, $m = 80$. Дополнительные параметры равны $K_c = 20$ 1/с, $\varepsilon = 10$ м. Интервал времени равен 4 с. Из фиг. 2 видно полное совпадение графиков. Далее расчеты для колебательного режима проводились при $n = 60$, $m = 60$.

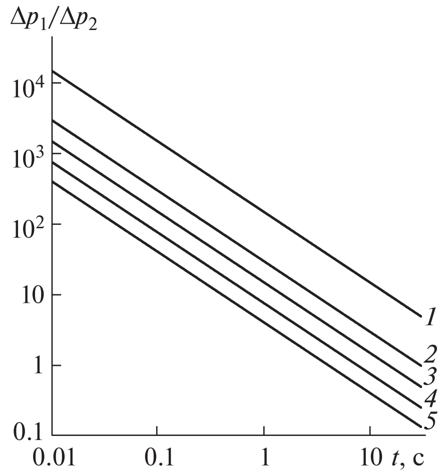

Рис. 4. То же, что на рис. 3: $K_c = 1$ с$^{-1}$.

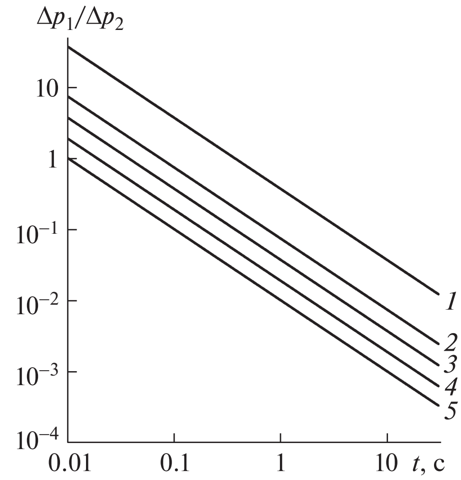

Рис. 5. То же, что на рис. 2: $K_c = 20$ с$^{-1}$.

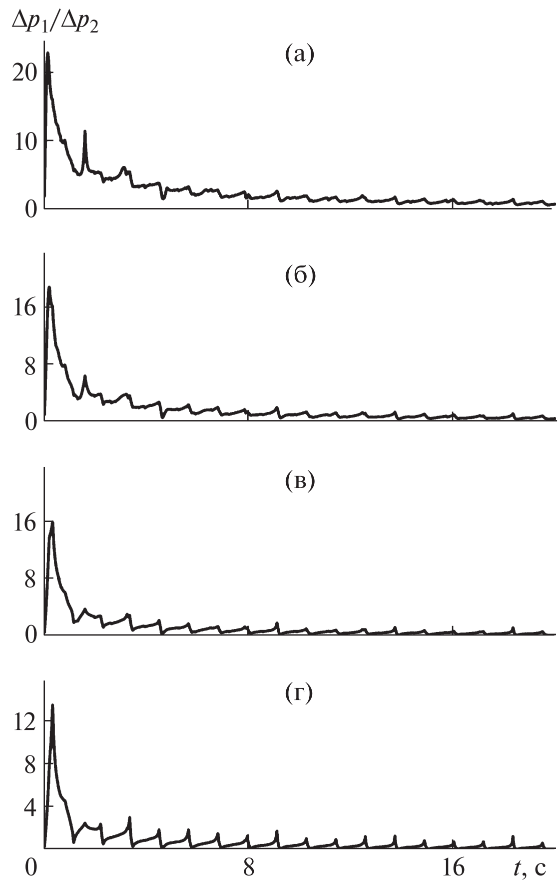

Рис. 6. Динамика отношений перепадов давления $(\Delta p)_1/(\Delta p)_2$ для колебательного режима течения при $K_c = 1$ с$^{-1}$: (а), (б), (в), (г) отвечают протяженностям области поворота $\varepsilon = 10$, 20, 40 и 60 м соответственно.

Для монотонного режима течения при рассматриваемых параметрах во всех расчетах берется только один член ряда в формуле (4.7), согласно ограничению на параметры монотонного течения – первая формула (3.5).

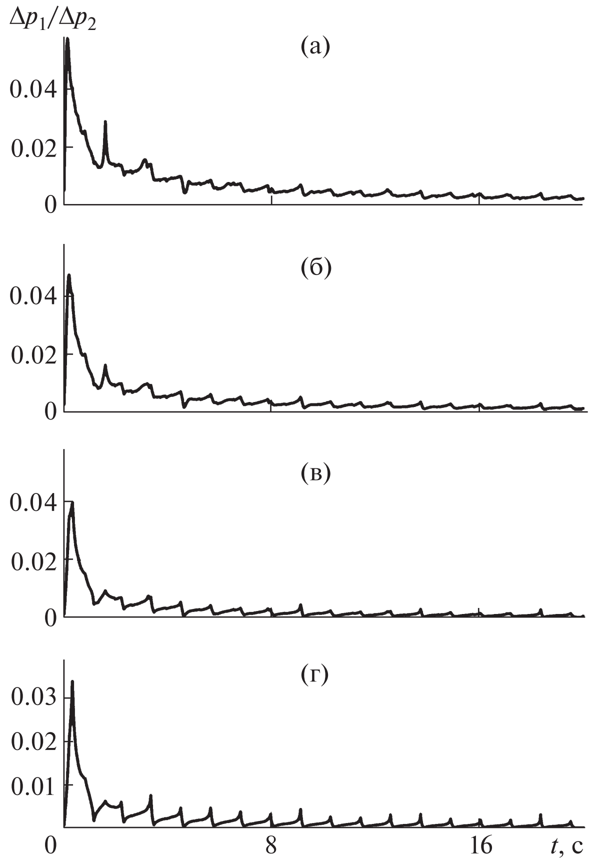

Рис. 7. То же, что на рис. 6: $K_c = 20$ с$^{-1}$.

На рис. 3–5 показано отношение перепадов давления $(\Delta p)_1/(\Delta p)_2$ при монотонном режиме течения в трещине после остановки закачки жидкости ГРП в логарифмических координатах. На рис. 3 показано отношение перепадов давления $(\Delta p)_1/(\Delta p)_2$при $K_c = 0.1$ с$^{-1}$ для различных значений размеров области поворота ε. Видно, что перепад давления $(\Delta p)_1$ за счет вязкости жидкости на порядки превосходит перепад $(\Delta p)_2$. На рис. 4 показано отношение перепадов давления $(\Delta p)_1/(\Delta p)_2$ при $K_c = 1$ 1/с для различных значений ε. Отношение перепадов давлений $(\Delta p)_1/(\Delta p)_2$ многократно уменьшается по сравнению с предыдущим случаем. На рис. 5 показано отношение перепадов давления $(\Delta p)_1/(\Delta p)_2$ при $K_c = 20$ с$^{-1}$ для различных значений ε. В этом случае перепад давления $(\Delta p)_1$ на порядки превосходит перепад $(\Delta p)_2$ только в начальный момент времени, далее доля потерь давления за счет кривизны и перфорационных отверстий на порядки начинает превосходить перепад давления $(\Delta p)_1$ за счет вязкости жидкости. Также из рис. 3–5 видно, что с увеличением размеров области поворота ε доля потерь давления из-за поворота потока и потерь в перфорационных отверстиях увеличивается. Наоборот, с уменьшением размеров области поворота ε вклад потерь давления из-за вязкого трения увеличивается.

На рис. 6–7 показано отношение перепадов давления $(\Delta p)_1/(\Delta p)_2$ при осцилляционном режиме течения в трещине после остановки закачки жидкости ГРП. На рис. 6 показано отношение перепадов давления $(\Delta p)_1/(\Delta p)_2$ при $K_c = 1$ с$^{-1}$для различных значений размеров области поворота ε. Видно, что так же как и в монотонном режиме течения после остановки насоса перепад давления $(\Delta p)_1$ за счет вязкости жидкости на порядки превосходит перепад $(\Delta p)_2$. Только при $K_c = 20$ с$^{-1}$ (рис. 7) вклад перепада давления$(\Delta p)_2$ за счет перфораций и кривизны траектории трещины ГРП на порядки превышает вклад перепада давления $(\Delta p)_1$ за счет вязкости жидкости. Как видно из рис. 6 – рис. 7 как и в монотонном режиме течения в трещине ГРП после остановки насоса, в колебательном режиме течения вклад перепада давления $(\Delta p)_2$ при фиксированном значении коэффициента пропорциональности K_c увеличивается с увеличением области поворота ε.

Нужно отметить, что порядок формально введенной величины K_c заранее не известен. Если имеются данные забойных датчиков давления после остановки закачки жидкости ГРП, то используя решение (3.28) при $x = 0$ и уравнение (3.30), можно решить обратную "коэффициентную" задачу, чтобы оценить постоянную K_c, эффективное значение величины ε и коэффициенты уравнения (3.28).

Формулы (4.7) или (4.8) для вычисления потерь давления за счет кривизны трещины и перфорационных отверстий могут быть использованы для оценки полного перепада давления в основной операции ГРП при закачке жидкости гидроразрыва, после определения коэффициента K_c по данным забойных манометров в тесте на мини ГРП с проппантом. При использовании представленной модели для основного ГРП вместо динамической вязкости ньютоновской жидкости следует, например, использовать эффективную вязкость псевдопластичной жидкости, в которой учитывается присутствие гранул проппанта. Корреляционные зависимости вязкости суспензий от объемного содержания проппанта и вязкости жидкости гидроразрыва, используемые при моделировании образования и развития трещины ГРП, представлены в обзорной главе работы [14].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлена математическая модель для описания течения в криволинейной трещине ГРП, с учетом вклада перфорационных отверстий скважины, после остановки насоса. Получены аналитические решения для возмущений раскрытия трещины в монотонном и колебательном режимах течения в трещине. На основе этих решений получены формулы для определения полных потерь давления на трение в прискважинной области трещины после остановки закачки жидкости ГРП. Полные потери давления включают в себя потери на вязкое трение, потери в перфорационных отверстиях и дополнительные потери вследствие искривления траектории трещины ГРП в некоторой окрестности скважины.

Работа частично поддержана грантом Академии Наук Республики Башкортостан № 0301200057819000040_104987.

"Создание теоретических основ разработки трудноизвлекаемых запасов и нетрадиционных ресурсов углеводородов (высоковязкие нефти, низкопроницаемые пласты) из пластов, подверженных ГРП с помощью горизонтальных скважин".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Economides M.J., Nolte K.G.* Reservoir Stimulation. NY and Chichester.: Wiley, 2000. 750 p.
2. *Идельчик И.Е.* Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Машиностроение, 1992. 672 с.
3. *Economides M.J., Martin T.* Modern fracturing. Enhancing natural gas production. Houston, TX. USA: Energy Tribune Publ. Inc., 2007. 509 p.
4. *Perkins T.K., Kern L.R.* Width of hydraulic fractures // J. Petroleum Technology. 1961. V. 13. № 4. P. 937949.
5. *Nordgren R.P.* Propogation of a vertical hydraulic fracture // Society of Petroleum Engineers J. 1972. V. 12. № 4. P. 306–314.
6. *Sneddon J.N., Berry D.S.* The Classical Theory of Elasticity. Berlin etc.: Springer, 1958 = *Снеддон И.Н., Берри Д.С.* Классическая теория упругости. М.: Физматгиз, 1961. 219 с.
7. *Шагапов В.Ш., Нагаева З.М.* К теории фильтрационных волн давления в трещине, находящейся в пористой проницаемой среде // Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т. 58. № 5 (345). С. 121–130.
8. *Нагаева З.М., Шагапов В.Ш.* Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81. № 3. С. 319–329.
9. *Ильясов А.М., Булгакова Г.Т.* Квазиодномерная модель гиперболического типа гидроразрыва пласта // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016.Т. 20. № 4. С. 739–754. https://doi.org/10.14498/vsgtu1522
10. *Байков В.А., Булгакова Г.Т., Ильясов А М., Кашапов Д.В.* К оценке геометрических параметров трещины гидроразрыва пласта// Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 5. С. 64–75. DOI: 1031857/S05682810001790-0.
11. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
12. *Будак Б.М., Фомин С.В.* Кратные интегралы и ряды. М.: Наука, 1965. 608 с.
13. *Воробьев Н.Н.* Теория рядов. М.: Наука, 1979. 408 с.
14. *Осипцов А.А.* Модели механики многофазных сред для технологии гидроразрыва пласта: Дис. ... док. физ.-мат. наук: 01.02.05. М., 2017. 310 с.