

УДК 532.527

## НОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКОГО ВИХРЕВОГО КОЛЬЦА В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

© 2020 г. Р. В. Акиншин\*

Центральный аэрогидродинамический институт (ЦАГИ), Жуковский, Московская обл., Россия

\*E-mail: [akinshinrv@mail.ru](mailto:akinshinrv@mail.ru)

Поступила в редакцию 17.04.2019 г.

После доработки 17.06.2019 г.

Принята к публикации 25.06.2019 г.

В линейном приближении исследуется задача об устойчивости стационарного течения тонкого вихревого кольца в идеальной жидкости. Рассмотрен случай изохронного вихревого кольца, в котором периоды обращения жидких частиц одинаковы. В этом течении отсутствуют возмущения непрерывного спектра, что существенно облегчает решение этой сложной задачи. Обнаружена неустойчивость длинноволновых колебаний, связанная с взаимодействием возмущений, имеющих энергию разного знака — колебания с положительной и отрицательной энергией.

*Ключевые слова:* вихревое кольцо, уравнение Гельмгольца, базисные деформации, неустойчивость

DOI: 10.31857/S0568528120010016

Рассмотрение динамики вихревого кольца представляет большой интерес, поскольку эта задача позволяет исследовать сложные эффекты динамики и взаимодействия возмущений в ядрах трехмерных вихрей. Вихревое кольцо представляет собой трехмерное течение, которое может быть создано в лабораторных условиях и в котором проявляются важные эффекты, связанные с кривизной вихревых линий. В частности, в вихревом кольце происходит взаимодействие возмущений, не связанных в близком по структуре течения вихре Ранкина (цилиндрическом вихре). Взаимодействие колебаний приводит к новым явлениям в динамике и акустике вихрей, включая процессы зарождения возмущений, переход к турбулентности в окрестности ядра, связь колебаний ядра со звуковым полем.

Поскольку задача аналитического описания является исключительно сложной, рассматриваются сначала малые возмущения системы, что ставит вопрос о наличии стационарных решений. Стационарное течение с завихренностью в тороидальной области рассмотрено в работах Френкеля [1, 2], где доказано существование стационарных решений для тонкого вихревого кольца с заданным распределением завихренности, и разработана процедура получения семейства стационарных решений, различающихся профилями завихренности в вихревом ядре. Следующая проблема связана с выбором стационарного решения, для которого задача о колебаниях была бы наиболее простой. Введено понятие изохронного кольца, в ядре которого периоды обращения жидких частиц одинаковы. Стационарное течение для изохронного вихревого кольца было получено в [3], где процедура, разработанная в [1, 2], существенно модифицирована.

Существование точного стационарного течения позволяет поставить задачу его устойчивости. Вследствие чрезвычайной сложности проблемы все теоретические решения в задаче о собственных колебаниях вихревого кольца ограничены случаем тонкого вихревого кольца. В случае коротковолновых трехмерных колебаний [4, 5] длина волны является дополнительным малым параметром, позволяющим получить решение, пренебрегая взаимным влиянием возмущений в удаленных друг от друга областях вихревого кольца. В этом случае можно ограничиться главным членом в разложении стационарного поля по параметру тонкости кольца, представляющим собой отношение характерного радиуса сечения ядра вихревого кольца к радиусу вихревого кольца, поэтому вопрос о существовании и структуре стационарного течения в [4, 5] не рассматривался.

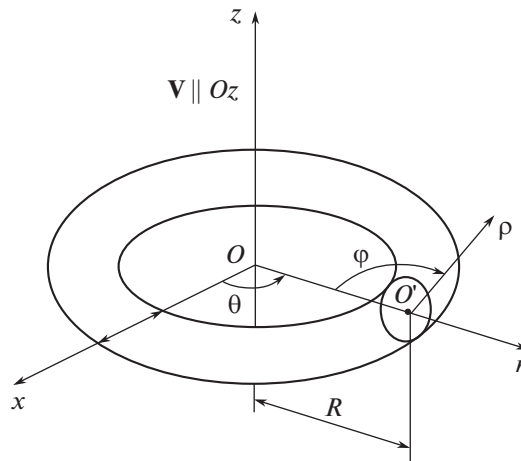


Рис. 1. Вихревое кольцо.

В [6, 7] впервые рассмотрена задача о длинноволновых (длина волны порядка размера всего кольца) колебаниях вихревого кольца. В этом случае взаимодействие возмущений является нелокальным, поэтому вопрос о существовании и структуре стационарного течения является ключевым. Были получены колебания тонкого изохронного кольца, в котором отсутствуют возмущения непрерывного спектра, что существенно облегчает получение аналитического решения. Аналогом длинноволновых колебаний вихревого кольца являются колебания вихря цилиндрического – кельвиновские моды вихря Ранкина [8]. Кривизна вихревых линий в вихревом кольце может приводить к слабому (в случае тонкого кольца) взаимодействию возмущений, структура которых аналогична структуре кельвиновских мод цилиндрического вихря. В работе [7] отмечено, что для длинноволновых колебаний возможна неустойчивость, связанная с этим взаимодействием, если связанными оказываются возмущения, имеющие энергии разного знака – колебания с положительной и отрицательной энергией. Однако из-за чрезвычайной сложности задачи данный вопрос не был изучен до конца.

В настоящей работе задача о длинноволновых колебаниях тонкого вихревого кольца получила полное решение. Проведено исследование устойчивости в области частот вблизи точки слияния собственных частот бесселевских и изолированных колебаний.

### 1. СТАЦИОНАРНОЕ ВИХРЕВОЕ КОЛЬЦО

На основе метода Френкеля в [1, 2] была разработана процедура получения течения в тонком вихревом кольце с изохронным профилем завихренности, причем периоды обращения жидких частиц в ядре вихря одинаковы. Изохронное кольцо является простейшим объектом для рассмотрения задачи о трехмерных возмущениях, поскольку это течение имеет колебания только дискретного спектра. Отметим, что в двумерном случае вихрь с однородным распределением (вихрь Ранкина) одновременно является и изохронным течением, а для вихревого кольца однородный и изохронный профили завихренности различаются.

Решение для стационарного изохронного вихревого кольца получено в виде разложения по малому параметру тонкости вихревого кольца  $\mu = a/R \ll 1$ , где  $a$  – характерный размер вихревого ядра, через который определяется площадь сечения ядра вихревого кольца  $\Pi = \pi a^2$ ;  $R$  – радиус вихревого кольца [3, 6]. Оказывается удобным перейти к криволинейным координатам  $\sigma, \psi$  [3], в которых все решаемые в дальнейшем уравнения имели бы наиболее простой вид. Координаты  $\sigma, \psi$  задаются в плоскости сечения кольца и в главном приближении совпадают с полярными координатами  $\rho, \varphi$  (рис. 1), а координата  $s = R\theta$ .

### 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ВОЗМУЩЕНИЯХ

Стандартным подходом к описанию малых возмущений течений невязкой несжимаемой жидкости является использование линеаризованного уравнения Гельмгольца [6]

В данной работе используется другой подход, который основывается на использовании поля смещения  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}, t)$  в качестве основной функции. Поле смещений  $\boldsymbol{\varepsilon}$  как эйлерову переменную можно формально определить через уравнение, связывающее ее с возмущениями скорости [6, 9]

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{V}_0) - \mathbf{v} = 0 \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{V}_0$  – поле скорости стационарного течения,  $\mathbf{v}$  – возмущение скорости.

Из условия вмороженности (или изозавихренности, в смысле [10]), для возмущений завихренности, возникающих при малом смещении  $\boldsymbol{\varepsilon}$  жидких частиц, следует

$$\boldsymbol{\Omega}' = \nabla \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\Omega}) \quad (2.2)$$

где  $\boldsymbol{\Omega}$  – завихренность стационарного течения.

Таким образом, будем решать уравнение для поля смещений (2.1), при этом возмущение скорости, с учетом (2.2) [7]

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla \times \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\Omega})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (2.3)$$

где  $\nabla' = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'}$ .

Рассмотрим возмущения стационарного течения с завихренностью, отличной от нуля в тороидальной области. Как известно [11], векторное поле в ограниченной области  $M$  может быть определено по нормальной компоненте поля на границе  $G(M)$ , ротору и дивергенции этого поля во всей области  $M$ . В случае неодносвязной области для однозначного определения векторного поля необходимо также задать циркуляцию этого поля по замкнутому контуру  $C$ , не стягиваемому к нулевому. Будем понимать под векторным полем все выражение  $\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{V}_0) - \mathbf{v}$ , а под областью  $M$  – область, в которой сосредоточена завихренность. Тогда уравнения для поля смещения записываются в следующем виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} + \nabla \times [\nabla \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{V}_0)] - \nabla \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\Omega}) = 0, \quad \mathbf{r} \in M \quad (2.4a)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0, \quad \mathbf{r} \in M \quad (2.4б)$$

$$\left( \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{V}_0) - \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{r} \in G(M) \quad (2.4в)$$

$$\oint_C \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{V}_0) - \mathbf{v} \right) \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (2.4г)$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор нормали к поверхности  $G(M)$ .

Важным преимуществом системы (2.4) является то, что возмущение скорости  $\mathbf{v}$ , для определения которого необходимо вычислять интеграл (2.3), должно быть найдено только на границе вихревого кольца, а во внутренней области решаются только дифференциальные уравнения.

Уравнения (2.4) будут использоваться для нахождения длинноволновых собственных колебаний тонкого вихревого кольца. С учетом осесимметричности течения с осью  $z$  (рис. 1), ищем решение для поля смещения в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon}^k(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\varepsilon}^k(\sigma, \psi) \exp(in\theta - i\omega t)$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}^k$  – контравариантная компонента вектора поля смещения,  $\omega$  – заданная частота колебаний. Будет использоваться метод последовательных приближений по малому параметру  $\mu$ . Аналогичный подход применялся в [6], где были получены собственные колебания нескольких типов. В работе [7] показана возможность слияния собственных частот изолированных и бесселевских колебаний в области частот

$$\omega - \frac{\Omega_0}{2} l \sim O(\mu^2), \quad l = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Если эти колебания имеют энергию разного знака, появляется возможность неустойчивости системы. Для того чтобы выяснить, реализуется ли эта возможность, а также для определения ха-

рактических характеристик неустойчивости необходимо получить решение задачи в приближении, снимающем вырождение частот.

Ниже исследуется задача об устойчивости тонкого вихревого кольца в области частот (2.5). Рассматривается случай  $l = 1$ , который представляет наибольший интерес с точки зрения излучения звука. Уравнения (2.4а, б) для внутренней области вихревого ядра  $\sigma < \sigma_{bound}$  решались в [12]. В данной работе для получения дисперсионного уравнения необходимо решить еще уравнение (2.4в) на границе ядра вихревого кольца

$$L\varepsilon^\sigma - v^\sigma = 0, \quad \sigma = \sigma_{bound} \tag{2.6}$$

которое получено с учетом того, что на поверхности вихря ковариантные компоненты  $n_\psi, n_s$  нормального вектора равны нулю [6]; оператор  $L = -i\omega + \frac{\Omega_0}{2} \frac{\partial}{\partial \psi}$ , собственные частоты  $\omega$  ищутся в виде  $\omega = \Omega_0(1/2 + \mu^2 \omega')$ ,  $\omega' = O(1)$ , где  $\Omega_0$  – константа.

### 3. БАЗИСНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

В [6, 7] было введено понятие базисных деформаций как системы векторных полей  $\varepsilon_{(m)}(\sigma, \psi)$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  в области внутри вихря  $\sigma = \sigma_{bound}$ , каждое из которых является решением системы (2.4а, б) с заданной частотой  $\omega$ , где  $\omega$  – параметр. Базисные деформации представляют собой полную, линейно независимую систему, поскольку в главном приближении компоненты  $m$  базисной деформации представляют собой гармонику  $\exp(im\psi)$ . В соответствии с этим любое поле смещения, являющееся решением (2.4а, б), можно представить в виде линейной комбинации базисных деформаций  $\varepsilon_{(m)}(\sigma, \psi)$

$$\varepsilon(\sigma, \psi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \varepsilon_{(m)}(\sigma, \psi)$$

Будем искать базисные деформации в виде разложения в ряд Фурье

$$\varepsilon_{(m)}^k(\sigma, \psi) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \varepsilon_p^k(\sigma) e^{ip\psi}$$

В главном приближении этот ряд содержит единственную гармонику  $p = m$ , а в следующих приближениях появляются другие Фурье компоненты, поскольку метрический тензор также представляется в виде ряда Фурье [12]

Амплитуды гармоник  $\varepsilon_p^i$  находятся последовательными приближениями по малому параметру  $\mu$  [12]. Аналогично описанной в [12] процедуре, получим базисные деформации для случая  $l = 1$ . Выражения для базисных деформаций приведены в Приложении А.

### 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ СКОРОСТИ НА ГРАНИЦЕ ЯДРА ВИХРЕВОГО КОЛЬЦА

В уравнение (4.1) входит контравариантная компонента скорости  $v^\alpha$ , которая оценивается на границе ядра вихревого кольца  $\sigma = \sigma_{bound}$  при заданном поле смещения  $\varepsilon$ . Для этого преобразуем (2.3) к виду, более удобному для вычислений. Используя интегрирование по частям, получим цепочку равенств

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \nabla \times \frac{1}{4\pi} \int_M \frac{\nabla' \times \mathbf{B}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \frac{1}{4\pi} \int_M \frac{\nabla' \times (\nabla' \times \mathbf{B})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_M \frac{\nabla'(\nabla' \cdot \mathbf{B}) - \nabla'^2 \mathbf{B}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \mathbf{B} + \nabla \frac{1}{4\pi} \int_M \frac{\nabla' \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \end{aligned} \tag{4.1}$$

где  $\mathbf{B} = (\varepsilon \times \Omega)$ . Отсюда следует, что в области вне вихря возмущение скорости  $\mathbf{v}$  может быть представлено как поле, создаваемое источниками с плотностью  $Q(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot (\varepsilon \times \Omega)$ . Действительно, в этой области  $\mathbf{B} = 0$ , и поэтому

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi, \quad \Phi = -\frac{1}{4\pi} \iint_M \frac{Q(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (4.2)$$

Поскольку на границе вихря нормальная компонента скорости непрерывна, то для вычисления величины  $v^\sigma$  в уравнении (2.6) может использоваться как внешний, так и внутренний предел выражения (4.1). Будем пользоваться внешним пределом, исходя из выражения (4.2).

Заметим также, что при вычислении поля  $\mathbf{v}$  плотность  $Q$  в (4.2) может быть задана не единственным образом. Действительно, поле вне области  $M$  не изменится при замене  $Q \rightarrow Q + Q'$ , где  $Q' = \nabla^2 G$  – произвольная функция, тождественно равная нулю вне области  $M$ . Таким образом, вне вихря возмущение скорости может быть найдено из соотношений (4.2) с плотностью более общего вида

$$Q = -\nabla [(\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\Omega}) + \nabla G] \quad (4.3)$$

где  $G$  – произвольная функция, отличная от нуля только в области, занятой вихрем.

Для каждой базисной деформации  $\boldsymbol{\varepsilon}_{(m)}$  необходимо вычислить скорость на границе, в соответствии с (4.2) получим

$$V_{(m)} = v_{(m)}^\sigma |_{\sigma_{bound}}, \quad \mathbf{v}_{(m)} = -\nabla \frac{1}{4\pi} \int \frac{Q_{(m)}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (4.4)$$

где  $Q_{(m)}$  находится подстановкой  $\boldsymbol{\varepsilon}_{(m)}$  в (4.3). Для решения задачи наиболее эффективным будет добавление такой функции  $G$ , которая сведет объемную плотность к поверхностной

$$Q_m(\sigma, \psi) = q_m(\psi) \delta(\sigma - \sigma_{bound})$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака. Функция  $G$  находится из решения уравнения

$$\begin{aligned} \nabla^2 G &= -\nabla \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_{(m)} \times \boldsymbol{\Omega}), \quad \sigma < \sigma_{bound} \\ G &= 0, \quad \sigma = \sigma_{bound} \end{aligned}$$

Для каждой базисной деформации функция  $G$  находится в виде разложения по малому параметру  $\mu$ . Тогда получим

$$q_{(m)} = [\boldsymbol{\varepsilon}_{(m)} \times \boldsymbol{\Omega} + \nabla G]^\sigma |_{\sigma=\sigma_{bound}}$$

Несмотря на появление промежуточного шага, связанного с вычислением  $G$ , сведение объемной плотности к поверхностной позволяет значительно упростить вычисление интеграла (4.4). Вычисление необходимых  $G$ ,  $q_{(m)}$  проводилось с помощью символьной математики. Интегрирование по углу  $\psi$  для вычисления  $V_{(m)}$  проводится с помощью формул, представленных в Приложении Б.

## 5. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ И СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ

Для определения собственных частот используется уравнение (2.6). Для удобства определим  $\eta_{(m)}(\psi) = \boldsymbol{\varepsilon}_{(m)}^\sigma |_{\sigma=\sigma_{bound}}$ . Примем соотношение

$$F_{(m)}(\psi) = L\eta_{(m)} - V_{(m)}$$

где  $V_{(m)}$  определяется из (4.4). Представим  $F_{(m)}(\psi)$  в виде ряда Фурье

$$F_{(m)}(\psi) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} F_{(m)p} e^{ip\psi} \quad (5.1)$$

где  $F_{(m)p}$  – коэффициенты Фурье функции  $F_{(m)}(\psi)$ . Подставляя (5.1) в (2.6) и учитывая вид поля смещения  $\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \boldsymbol{\varepsilon}_{(m)}$ , получим

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{(m)p} C_m \right) e^{ip\psi} = 0$$

Откуда следует бесконечная система линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{(m)p} C_m = 0, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (5.2)$$

Система (5.2) определяет коэффициенты  $C_{(m)}$  и собственные частоты  $\omega$ .

Поскольку для тонкого вихревого кольца коэффициенты  $F_{(m)p}$  имеют различный порядок по малому параметру  $\mu$ , то для определения коэффициентов  $C_{(m)}$  в каждом приближении бесконечная матрица  $F_{(m)p}$  будет сводиться к конечной. Детальный анализ системы (5.2) показывает, что коэффициенты  $C_{(m)}$ ,  $m \neq 1, 2$  всякий раз будут выражаться через коэффициенты  $C_{(1)}$  и  $C_{(2)}$ , так что система (5.2) переходит в систему для определения  $C_{(1)}$  и  $C_{(2)}$

$$\begin{aligned} & \left( \left( -\mu \frac{\omega'}{2n} + \mu^3 A_1 + O(\mu^5) \right) J_1(a_0) + \left( -\mu^4 \frac{1}{2} \omega'^2 + O(\mu^5) \right) J_2(a_0) \right) C_1 + \\ & + i \left( \mu \frac{(n^2 + 5\omega')}{4n^2} + \mu^3 A_2 + O(\mu^5) \right) C_2 = 0 \end{aligned} \quad (5.3a)$$

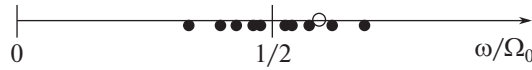
$$\begin{aligned} & \left( \left( \mu^2 \frac{3\omega'}{8n} + \mu^4 A_3 + O(\mu^6) \right) J_1(a_0) + \left( \mu^5 \left( -\frac{5\omega'^2(n^2 + 8\omega')}{8n^2} \right) + O(\mu^7) \right) J_2(a_0) \right) C_1 + \\ & + i \left( \mu^2 \left( -\frac{1}{192n^2} (16n^4 + 180\omega') + n^2 (13 + 192\omega') \right) + \mu^4 A_4 + O(\mu^6) \right) C_2 = 0 \end{aligned} \quad (5.3b)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\omega'}{384n^3} \left( 99 - 2n^2 (7 + 96\omega' + 96S_n) - 24n^4 (1 - 8S_n) - 24(3 - 4n^2 + 4n^4) \ln \frac{8}{\mu} \right) \\ A_2 &= \frac{1}{1536n^4} (-5040\omega'^2 + n^4 (151 + 24S_n - 48\omega'(-9 + 40S_n))) - \\ & - \frac{1}{64n^2} (4n^4 + n^2 (5 - 40\omega') + 100\omega') \ln \frac{8}{\mu} + \frac{1}{768n^2} (-3\omega' (201 + 128\omega' - 320S_n) + n^4 (-2 + 96S_n)) \\ A_3 &= \frac{\omega'}{512n^3} \left( \frac{63\omega'^2}{128n^3} + n^2 (159 + 448\omega' + 48S_n - 192) + 8n^4 (5 + 24S_n) - 9(11 + 28\omega') \right) - \\ & - \frac{3\omega'}{64n^3} (-3 + 4(n^2 + n^4)) \ln \frac{8}{\mu} \\ A_4 &= -\frac{1}{73728n^4} (-181440\omega'^2 + 144n^2\omega' (61 - 1152\omega' + 120S_n) + 32n^8 (-61 + 144S_n)) + \\ & + \frac{n^2}{3072} (-27 + 512\omega' + 768S_n) - \frac{1}{24576} (10861 - 5952\omega' + 288(7 + 80\omega')S_n) - \\ & - \frac{1}{256n^2} \left( -32n^4 + 8n^6 + 300\omega' + 3n^2 (41 + 40\omega') - 36n^2 \ln \frac{8}{\mu} \right) \ln \frac{8}{\mu} \\ S_n &= \sum_{l=1}^n \frac{1}{2l-1} \end{aligned}$$

Равенство нулю детерминанта системы (5.3) дает дисперсионное уравнение

$$\left( \omega' - \frac{23 - 16n^2}{192} - \mu^2 B + O(\mu^4) \right) \frac{J_1(c)}{J_2(c)} = -\mu^3 \left( \frac{\omega'}{192} (16n^3 + 73n) + \frac{\omega'^2}{n} (5 + n^2) + \frac{25\omega'^3}{2n^3} \right) + O(\mu^5) \quad (5.4)$$



**Рис. 2.** Собственные частоты вихревого кольца, локализованные вблизи  $1/2$ . Бесселевские моды (•); изолированная мода (○).

где

$$B = \frac{1}{73728n^2} (72(161 - 4544\omega')\omega' - 32n^6(37 + 48S_n)) +$$

$$+ \omega'^2 + \omega' \left( -\frac{15}{16} + S_n \right) + \frac{16063 + 6720S_n}{73728} - \frac{n^2(127 + 4752S_n + 384\omega'(-1 + 24S_n))}{9216} +$$

$$+ \frac{1}{384} (-139 + 99n^2 + 4n^4 - 192\omega' + 192n^2\omega') \ln \frac{8}{\mu} + \frac{9}{64} \ln \frac{8}{\mu} \ln \frac{8}{\mu}$$

$$c = \frac{n}{\omega'\mu} \left( 1 + \mu^2 \left( \frac{103}{192} + \frac{21\omega'}{16n^2} \right) + O(\mu^4) \right)$$

Дисперсионное уравнение (5.4) представляет собой трансцендентное уравнение, корни которого определяют собственные частоты системы. Поскольку правая часть мала, эти корни располагаются вблизи тех значений, при которых один из множителей в левой части уравнения обращается в нуль.

Второй множитель  $J_1(c)/J_2(c)$  в (5.4) обращается в нуль в бесконечном числе точек, соответствующих нулям функции Бесселя  $J_1(c)$ . Эти нули соответствуют бесконечному семейству собственных колебаний с частотами

$$\omega = \Omega_0 \left( \frac{1}{2} + \mu \frac{n}{c_j} (1 + O(\mu)) \right) \quad (5.5)$$

где  $J_1(c_j) = 0$ ,  $j = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Собственные частоты имеют точку сгущения  $\Omega_0/2$  и лежат по обе стороны от нее в зависимости от знака  $c_j$ . В соответствии с [6, 7] колебания этого семейства называются бесселевскими колебаниями. Моды, лежащие справа от точки сгущения ( $c_j > 0$ ), называются опережающими, поскольку их фазовая скорость больше скорости жидких частиц в ядре вихря. Моды же, лежащие слева ( $c_j < 0$ ), — отстающие (рис. 2).

Как видно из дисперсионного уравнения (5.4), существует еще одно собственное колебание, которое называется изолированным и соответствует обращению в нуль первого множителя в этом уравнении. Это колебание имеет частоту

$$\omega = \Omega_0 \left( \frac{1}{2} + \mu^2 \frac{23 - 16n^2}{192} \right) \quad (5.6)$$

При  $n = 1$  собственная частота изолированного колебания лежит справа от точки сгущения  $\Omega_0/2$ , а при  $n > 1$  — слева (рис. 2)

Рассмотрим случай, когда частота изолированного колебания оказывается в окрестности частоты одного из бесселевских колебаний  $\omega_B$ , так что  $J_1(c(\omega_B)) = 0$ , а  $\omega_B = (23 - 16n^2)/192 + O(\mu^2)$ . Найдем решение дисперсионного уравнения в окрестности этих двух близких частот, т.е. будем предполагать

$$\omega' = \omega_B + \mu^2 \omega'', \quad \omega'' = O(1)$$

Для удобства примем соотношения:

$$A = \frac{23 - 16n^2}{192}, \quad C = \frac{103}{192} + \frac{21\omega'}{16n^2} \quad (5.7)$$

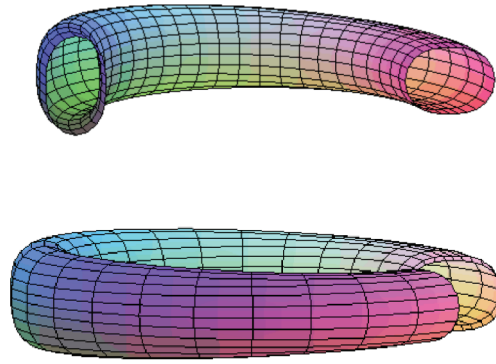


Рис. 3. Неустойчивые длинноволновые колебания.

В этом случае функция Бесселя может быть представлена в виде разложения

$$J_1(c) = \mu \frac{n}{A^2} (\omega'' - AC + O(\mu^2)) J_2\left(\frac{n}{\mu A}\right)$$

$$J_2(c) = J_2\left(\frac{n}{\mu A}\right) (1 + O(\mu^2))$$

Подставляя это разложение в (5.4), с учетом того, что в главном приближении  $\omega' = A + O(\mu^2) = (23 - 16n^2)/192 + O(\mu^2)$ , после несложных преобразований получим

$$(\omega'' - B + Q)(\omega'' - AC) + O(\mu^2) = -A^3 \frac{1}{396} \frac{1}{n^4} \left(7n^2 + \frac{115}{16}\right)^2 + O(\mu^2)$$

где  $Q = (\omega_B - A)/\mu^2$ . Учитывая (5.7), найдем

$$(\omega'' - B + Q) \left( \omega'' - \frac{(23 - 16n^2)(483 + 1312n^2)}{589824n^2} \right) = - \left( \frac{23 - 16n^2}{192} \right)^3 \frac{1}{396} \frac{1}{n^4} \left(7n^2 + \frac{115}{16}\right)^2 \quad (5.8)$$

Если  $Q = B - (23 - 16n^2)(483 + 1312n^2)/589824n^2$ , то

$$\omega'' = \frac{(23 - 16n^2)(483 + 1312n^2)}{589824n^2} \pm \delta(n), \quad (5.9)$$

$$\delta(n) = \pm \frac{1}{2^{15}} \frac{115 + 112n^2}{9n^2} \sqrt{\frac{(16n^2 - 23)^3}{6}}$$

Из этого выражения видно, что при  $n = 1$  возникает неустойчивость с инкрементом  $\text{Im}\delta(1) \approx 6 \times 10^{-3}$ , а при  $n > 1$  течение оказывается устойчивым. Форма возмущений границы вихря в случае неустойчивых колебаний представлена на рис. 3.

В общем виде решение (5.8)

$$\omega'' = B + \frac{1}{2} \left( Q + B - \frac{(23 - 16n^2)(483 + 1312n^2)}{589824n^2} \right) \pm \left( \frac{1}{4} \left( Q + B - \frac{(23 - 16n^2)(483 + 1312n^2)}{589824n^2} \right)^2 - Q \left( B - \frac{(23 - 16n^2)(483 + 1312n^2)}{589824n^2} \right) + \delta(n)^2 \right)^{1/2}$$

Отсюда следует, что граница неустойчивой области ( $n = 1$ ) определяется уравнением

$$\frac{1}{4} \left( Q + B - \frac{12565}{589824} \right)^2 - Q \left( B - \frac{12565}{589824} \right) + \delta(1)^2 = 0 \quad (5.10)$$



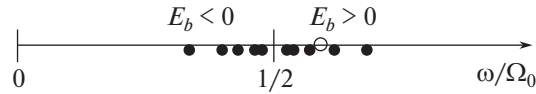


Рис. 4. Энергетический анализ возмущений вихревого кольца.  $E_b$  – энергия бesselевских колебаний.

Принимая во внимание выражение для  $B$  с учетом (5.7), (5.9), из (5.10) получим область неустойчивости

$$q' < Q < q''$$

$$q' = \frac{1}{1769472} \left( 473295 - 3178\sqrt{42} + 165888 \ln \frac{\delta}{\mu} - 248832 \ln \frac{\delta}{\mu} \ln \frac{\delta}{\mu} \right)$$

$$q'' = \frac{1}{1769472} \left( 473295 + 3178\sqrt{42} + 165888 \ln \frac{\delta}{\mu} - 248832 \ln \frac{\delta}{\mu} \ln \frac{\delta}{\mu} \right)$$

Представляет интерес сравнить полученный результат с энергетическим анализом возмущений вихревого кольца. Поскольку неустойчивые колебания должны иметь нулевую энергию, то неустойчивость может возникать при слиянии собственных частот колебаний, имеющих энергию разного знака. В [7] показано, что энергия бesselевских колебаний, лежащих справа от точки сгущения  $\Omega_0/2$ , положительна, а слева отрицательна (рис. 4). Энергия же изолированного колебания всегда отрицательная, а само колебание может находиться как среди бesselевских мод с положительной энергией, так и среди бesselевских мод с отрицательной энергией. При  $l = 1$  первый случай реализуется только при  $n = 1$ , а второй случай при  $n > 1$ . Отсюда следует, что неустойчивость возможна лишь в случае  $n = 1$ . Таким образом, полученный результат находится в полном соответствии с энергетическим анализом.

Отметим, что в работе рассмотрена задача устойчивости только для звукообразующих мод  $l = 1$ ; в соответствии с [6, 7] моды с  $l > 1$  неэффективно излучают звук. Однако энергетический анализ указывает на возможность неустойчивости и для других значений  $l$ . Для этого частота изолированного колебания должна лежать правее точки сгущения так, чтобы было возможно слияние частот колебаний с разными энергиями. В частности, из выражений [7] для частот собственных колебаний вихревого кольца следует, что неустойчивость возможна только при следующих комбинациях чисел  $(l, n)$

$$l = 1, 2, 3, 4; \quad n = 1$$

$$l = 5, 6 \dots 11; \quad n = 1, 2$$

$$l = 12; \quad n = 1, 2, 3$$

Для того, чтобы установить, реализуется ли неустойчивость, возможная с точки зрения энергий колебаний, необходимо найти решение дисперсионного уравнения с точностью, достаточной для снятия вырождения частот. Чем больше  $l$ , тем больший порядок разложения по малому параметру  $\mu$  требуется для решения задачи. Поскольку это чрезвычайно сложная задача, то в настоящей работе рассмотрение ограничено наиболее простым, но и наиболее важным с точки зрения излучения звука случаем  $l = 1$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача об устойчивости тонкого изохронного вихревого кольца в идеальной жидкости по отношению к длинноволновым возмущениям. Для построения полного решения задачи найдены члены разложения по параметру тонкости кольца до пятого порядка включительно. Это позволило получить дисперсионное уравнение для собственных частот с точностью, позволяющей снять вырождение частот. Показано, что в зависимости от параметров задачи снятие вырождения может дать действительные или мнимые поправки к собственным частотам. Это означает, что в некотором диапазоне параметров тонкое вихревое кольцо оказывается неустойчивым по отношению к длинноволновым возмущениям. Получен инкремент неустойчивости и границы параметров, при которых возникает неустойчивость.

Проведен энергетический анализ полученного решения. Показано, что механизм неустойчивости основан на взаимодействии колебаний с энергией разного знака, которое возникает вслед-

ствие кривизны вихревых линий в кольце. В тонком кольце это взаимодействие является слабым, а в предельном переходе к цилиндрическому вихрю взаимодействие исчезает, и рассмотренный механизм неустойчивости не реализуется. Таким образом, вихревое кольцо оказывается простейшим локализованным течением, в котором реализуется неустойчивость, связанная с взаимодействием колебаний с энергией разного знака. В процессе неустойчивых колебаний вихревого кольца происходит передача энергии от крупномасштабных изолированных колебаний к бesselевским колебаниям, представляющим собой мелкомасштабные возмущения в сечении вихревого кольца. Таким образом, полученное решение дает пример механизма передачи энергии от больших к меньшим масштабам, который, возможно, реализуется в ядрах вихревых нитей в турбулентных течениях.

Автор выражает глубокую благодарность В.Ф. Копьеву и С.А. Чернышеву за постановку задачи и постоянное внимание к результатам исследования.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №17-11-01271

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Форма базисной деформации  $\epsilon_{(1)}$

$$\begin{aligned} \epsilon_{(1)}^\sigma = & i \left( \left( -\mu \frac{a\omega'}{n\sigma} + \mu^3 \left( \frac{\omega' (96a^2\omega' + 107\sigma^2)}{96an\sigma} \right) \right) J_1(a_0) - \right. \\ & \left. - \left( \mu^2\omega' + \mu^4 \frac{1}{192} \omega' \left( \frac{252\omega'}{n^2} + \frac{125\sigma^2}{a^2} \right) \right) J_2(a_0) \right) e^{i\psi} + \\ & + i \left( \mu^4 \frac{\omega'^2}{n} J_1(a_0) + \mu^5 \left( -\frac{10a\omega'^3}{n^2\sigma} + \frac{2\omega'^2\sigma}{a} \right) J_2(a_0) \right) e^{i2\psi} - \\ & - \mu^5 i \frac{3\omega'^2}{64an\sigma} \left( -15a^2 - 16\sigma^2 + 24a^2 \ln \frac{8}{\mu} \right) J_1(a_0) e^{i3\psi} - \\ & - \mu^5 \frac{2i\omega'^2\sigma}{a} J_2(a_0) e^{i0\psi} - \mu^5 \frac{i\omega'^2}{64an\sigma} \left( -15a^2 - 16\sigma^2 + 24a^2 \ln \frac{8}{\mu} \right) J_1(a_0) e^{-i\psi} + O(\mu^5) e^{i\psi} + O(\mu^6) \\ \epsilon_{(1)}^\psi = & \left( -\frac{1}{\sigma} + \mu^2 \frac{1}{192\sigma} \left( -\frac{252\omega'}{n^2} - \frac{275\sigma^2}{a^2} \right) + \mu^4 \frac{\sigma}{1024a^2n^2} (-3021\omega' - 1385n^2) \right) J_2(a_0) e^{i\psi} - \\ & - \mu^4 \frac{1}{368640a^4n^4\sigma} (1809487n^4\sigma^4 + 720a^4\omega'(-441\omega' + 16n^2(45 + 76\omega' + 16n^2\omega'))) J_2(a_0) e^{i\psi} + \\ & + \mu^4 \frac{1}{128a^4n^4\sigma} (288a^4n^2\omega' + 277a^2n^4\sigma^2) \ln \frac{8}{\mu} J_2(a_0) e^{i\psi} + \left( \mu^3 \frac{\omega'}{2a} J_2(a_0) + \mu^4 \frac{4\omega'^2}{n\sigma} J_1(a_0) \right) e^{i2\psi} + \\ & + \mu^5 \frac{\omega'}{192a^3n^2\sigma^2} (-1920a^4\omega'^2 + 331n^2\sigma^4 - 9a^2\sigma^2(-14\omega' + n^2(-15 + 32\omega'))) J_2(a_0) e^{i2\psi} - \\ & - \mu^5 \frac{9\omega'}{8a} \ln \frac{8}{\mu} J_2(a_0) e^{i2\psi} + \mu^4 \frac{\omega'}{64a^2\sigma} \left( 16\sigma^2 + 15a^2 - 24a^2 \ln \frac{8}{\mu} \right) J_2(a_0) e^{i3\psi} + \\ & + \mu^5 \frac{\omega'^2}{64an\sigma^2} \left( 176\sigma^2 + 45a^2 - 72a^2 \ln \frac{8}{\mu} \right) J_1(a_0) e^{i3\psi} - \\ & - \mu^5 \frac{\omega'}{768a^3} \left( -141a^2 - 116\sigma^2 + 168a^2 \ln \frac{8}{\mu} \right) J_1(a_0) e^{i4\psi} + \\ & + \left( \mu^3 \frac{\omega'}{2a} J_2(a_0) + \mu^4 \frac{2\omega'^2}{n\sigma} J_1(a_0) \right) e^{i0\psi} - \\ & - \mu^5 \frac{\omega'}{192a^3n^2} \left( 9a^2(14\omega' + n^2(15 + 32\omega')) + 331n^2\sigma^2 - 216a^2n^2 \ln \frac{8}{\mu} \right) J_2(a_0) e^{i0\psi} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \mu^4 \frac{\omega'}{64a^2\sigma} \left( -15a^2 - 16\sigma^2 + 24a^2 \ln \frac{8}{\mu} \right) J_2(a_0) + \right. \\
& + \mu^5 \frac{\omega'^2}{64an\sigma^2} \left( 15a^2 + 16\sigma^2 - 24a^2 \ln \frac{8}{\mu} \right) J_1(a_0) \left. \right) e^{-i\psi} + \\
& + \mu^5 \frac{\omega'}{768a^3} \left( -141a^2 - 116\sigma^2 + 168a^2 \ln \frac{8}{\mu} \right) J_2(a_0) e^{-i2\psi} + O(\mu^5) e^{i\psi} + O(\mu^6) \\
\varepsilon_{(1)}^s = & \left( 1 + \mu^2 \frac{307\sigma^2}{96a^2} + \mu^4 \frac{\sigma^2}{92160a^4 n^2} \times \right. \\
& \times \left( 1192213n^2\sigma^2 - 180a^2 \left( 274\omega' + 239n^2 \left( -5 + 8 \ln \frac{8}{\mu} \right) \right) \right) \left. \right) J_1(a_0) e^{i\psi} - \\
& - \left( \mu^3 \frac{2\omega'\sigma}{a} + \mu^5 \frac{\omega'\sigma}{96a^3} \left( 833\sigma^2 + 9a^2 \left( 5 + 16\omega' - 8 \ln \frac{8}{\mu} \right) \right) \right) J_1(a_0) e^{i2\psi} - \mu^4 \frac{5\omega'\sigma^2}{8a^2} J_1(a_0) e^{i3\psi} - \\
& - \mu^5 \frac{11\omega'\sigma^3}{48a^3} J_1(a_0) e^{i4\psi} + \left( \mu^3 \frac{2\omega'\sigma}{a} + \mu^5 \frac{\omega'\sigma}{96a^3} \left( 833\sigma^2 - 9a^2 \left( -5 + 16\omega' + 8 \ln \frac{8}{\mu} \right) \right) \right) J_1(a_0) e^{i0\psi} + \\
& + \mu^4 \frac{5\omega'\sigma^2}{8a^2} J_1(a_0) e^{-i\psi} + \mu^5 \frac{11\omega'\sigma^3}{48a^3} J_1(a_0) e^{-i2\psi} + O(\mu^6) \\
a_0 = & \frac{n\sigma}{a\omega'\mu} \left( 1 + \mu^2 \left( \frac{21\omega'}{16n^2} + \frac{163\sigma^2}{192a^2} \right) + \mu^4 X + O(\mu^6) \right) \\
X = & \frac{1}{40960a^4 n^4} (82611n^4\sigma^4 + 40a^2 n^2\sigma^2(1689\omega' + 745n^2) - 20a^4(1764\omega'^2 - 64n^2\omega'(45 + 76\omega'))) + \\
& + \frac{225}{2048} - \frac{\omega'^2}{2} - \frac{1}{128a^2 n^2} \ln \frac{8}{\mu} \left( 149n^2\sigma^2 + 9a^2(32\omega' + 5n^2) - 36a^2 n^2 \ln \frac{8}{\mu} \right)
\end{aligned}$$

Форма базисной деформации  $\varepsilon_{(2)}$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{(2)}^\sigma = & \left( \frac{\sigma}{a} - \mu^2 \frac{\sigma^3}{192a^3} (-26 + 64n^2) \right) e^{i2\psi} + \mu^4 \frac{\sigma^3}{6144a^5} \times \\
& \times \left( -10240a^2(-2 + n^2)\omega' + \left( (-5899 - 4164n^2 + 240n^4)\sigma^2 + 3870a^2 - 6192a^2 \ln \frac{8}{\mu} \right) \right) e^{i2\psi} - \\
& - \left( \mu \frac{5\sigma^2}{8a^2} + \mu^3 \frac{\sigma^4}{384a^4} (606 + 17n^2) + O(\mu^5) \right) e^{i3\psi} + O(\mu^4) e^{i4\psi} + \mu \left( -\frac{3\sigma^2}{4a^2} - \frac{5\omega'}{2n^2} \right) e^{i\psi} + \\
& + \mu^3 \frac{1}{768a^4 n^4} \left( 144a^2(35 + 32n^2)\omega'^2 + 6a^2 n^2\omega' \left( (631 + 192n^2)\sigma^2 - 150a^2 + 240a^2 \ln \frac{8}{\mu} \right) \right) e^{i\psi} + \\
& + \mu^3 \frac{\sigma^2}{768a^4} \left( (-499 + 184n^2)\sigma^2 + 45a^2 - 72a^2 \ln \frac{8}{\mu} \right) e^{i\psi} + O(\mu^5) e^{i\psi} + O(\mu^4) e^{i0\psi} + O(\mu^3) e^{-i\psi} + O(\mu^6) e^{i2\psi} \\
\varepsilon_{(2)}^\psi = & i \left( \frac{1}{a} + \mu^2 \frac{\sigma^2}{48a^3} (13 - 20n^2) \right) e^{i2\psi} + i\mu^4 \frac{\sigma^2}{6144a^5} \times \\
& \times \left( 1024a^2(25 - 14n^2)\omega' + \left( (-17697 - 8828n^2 + 336n^4)\sigma^2 + 7740a^2 - 12384a^2 \ln \frac{8}{\mu} \right) \right) e^{i2\psi} - \\
& - i \left( \mu \frac{5\sigma}{8a^2} + \mu^3 \frac{\sigma^3}{384a^4} (1010 + 7n^2) + O(\mu^5) \right) e^{i3\psi} + O(\mu^4) e^{i4\psi} + O(\mu^3) e^{i5\psi} + i\mu \left( \frac{\sigma}{4a^2} - \frac{5\omega'}{2n^2\sigma} \right) e^{i\psi} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + i\mu^3 \frac{1}{768a^4 n^4 \sigma} \left( 144a^4(35 + 32n^2)\omega^2 + 6a^2 n^2 \omega' \left( (1053 + 128n^2)\sigma^2 - 150a^2 + 240a^2 \ln \frac{8}{\mu} \right) \right) e^{i\psi} + \\
 & + i\mu^3 \frac{\sigma}{768a^4} e^{i\psi} + O(\mu^5) e^{i\psi} + i\mu^2 \frac{3}{32a^3} \left( -6\sigma^2 - 5a^2 + 8a^2 \ln \frac{8}{\mu} \right) e^{i0\psi} + O(\mu^4) e^{i0\psi} + O(\mu^3) e^{-i\psi} \\
 \varepsilon_{(2)}^s = & i \left( -\mu \frac{n\sigma^2}{2a^2} + \mu^3 \left( \frac{n\sigma^4}{192a^4} (-229 + 24n^2) + \frac{\omega' \sigma^2}{a^2 n} (5 - 2n^2) \right) + O(\mu^5) \right) e^{i2\psi} - i\mu^2 \frac{n\sigma^3}{6a^3} e^{i3\psi} + \\
 & + i\mu^4 \frac{\sigma^3}{256a^5 n} \left( 80a^2(5 - 2n^2)\omega' + n^2 \left( (-179 + 12n^2)\sigma^2 + 5a^2 - 8a^2 \ln \frac{8}{\mu} \right) \right) e^{i3\psi} + O(\mu^6) e^{i3\psi} - \\
 & - i\mu^3 \frac{49n\sigma^4}{576a^4} e^{i4\psi} + O(\mu^5) e^{i4\psi} + O(\mu^3) e^{i5\psi} + i\mu^2 \frac{\sigma}{128a^3 n^3} \times \\
 & \times \left( 56a^2(15 + 8n^2)\omega' + n^2 \left( (-749 + 160n^2)\sigma^2 - 150a^2 + 240a^2 \ln \frac{8}{\mu} \right) \right) e^{i1\psi} + O(\mu^4) e^{i1\psi} - \\
 & - i\mu^3 \frac{\sigma^2}{64a^4 n} \left( 320a^2 \omega' + 9n^2 \left( 5\sigma^2 + 5a^2 - 8a^2 \ln \frac{8}{\mu} \right) \right) e^{i0\psi} + O(\mu^5) e^{i0\psi} + O(\mu^3) e^{-i\psi}
 \end{aligned}$$

Форма базисной деформации  $\varepsilon_{(3)}$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{(3)}^\sigma & = \left( \sigma^2 + \mu^2 \frac{215\sigma^4}{128a^2} + O(\mu^4) \right) e^{i3\psi} + \left( \mu \frac{8\sigma^3}{3a} + O(\mu^3) \right) e^{i2\psi} + O(\mu^2) \\
 \varepsilon_{(3)}^\psi & = i \left( \sigma + \mu^2 \frac{1075\sigma^3}{384a^2} + O(\mu^4) \right) e^{i3\psi} + i \left( \mu \frac{16\sigma^2}{3a} + O(\mu^3) \right) e^{i2\psi} + O(\mu^2) \\
 \varepsilon_{(3)}^s & = O(\mu^2)
 \end{aligned}$$

Форма базисной деформации  $\varepsilon_{(4)}$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{(4)}^\sigma & = \left( \frac{\sigma^3}{a^2} + \mu^2 \left( \frac{\sigma^5}{720a^4} (1449 + 26n^2) \right) + O(\mu^4) \right) e^{i4\psi} + \left( \mu \frac{99\sigma^4}{32a^3} + O(\mu^3) \right) e^{i3\psi} + \\
 & + \mu^2 \frac{9\sigma^3}{32a^4} \left( 5a^2 + 20\sigma^2 - 8a^2 \ln \frac{8}{\mu} \right) e^{i2\psi} + O(\mu^2) \\
 \varepsilon_{(4)}^\psi & = i \left( \frac{\sigma^2}{a^2} + \mu^2 \frac{\sigma^4}{480a^4} (1449 + 16n^2) \right) e^{i4\psi} + i \left( \mu \frac{165\sigma^3}{32a^3} + O(\mu^3) \right) e^{i3\psi} + \\
 & + i\mu^2 \frac{9\sigma^2}{16a^4} \left( 30\sigma^2 + 5a^2 - 8a^2 \ln \frac{8}{\mu} \right) e^{i2\psi} + O(\mu^2) \\
 \varepsilon_{(4)}^s & = \left( i\mu \frac{n\sigma^4}{12a^3} + O(\mu^3) \right) e^{i4\psi} + O(\mu^2)
 \end{aligned}$$

Форма базисной деформации  $\varepsilon_{(5)}$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{(5)}^\sigma & = \sigma^4 e^{i5\psi} + O(\mu) \\
 \varepsilon_{(5)}^\psi & = i\sigma^3 e^{i5\psi} + O(\mu) \\
 \varepsilon_{(5)}^s & = O(\mu)
 \end{aligned}$$

Форма базисной деформации  $\varepsilon_{(0)}$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{(0)}^\sigma & = i \left( -\mu^2 \frac{n\sigma}{2a} + \mu^4 \frac{n\sigma^3}{16a^3} (-8 + 3n^2) \right) e^{i0\psi} + i\mu \frac{1}{2n} e^{i1\psi} + \\
 & + i\mu^3 \frac{1}{128a^2 n^3} \left( -168a^2 \omega' + 96a^2 n^2 \omega' + 15a^2 n^2 - 11n^2 \sigma^2 - 8n^4 \sigma^2 - 24a^2 n^2 \ln \frac{8}{\mu} \right) e^{i1\psi} - \\
 & - i\mu^3 \frac{7n\sigma^2}{32a^2} e^{-i\psi} + O(\mu^4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(0)}^{\Psi} &= \left( -\mu^2 \frac{n}{a} + \mu^4 \frac{16a^2(-1+2n^2)\omega'\sigma^2 + 3n^2(-11+2n^2)\sigma^4}{16a^3n\sigma^2} \right) e^{i0\Psi} + \\ &+ \left( -\mu \frac{1}{2n\sigma} + \mu^3 \frac{1}{128a^2n^3\sigma} \left( 168a^2\omega' - 96a^2n^2\omega' - 15a^2n^2 - 135n^2\sigma^2 + 56n^4\sigma^2 + 24a^2n^2 \ln \frac{8}{\mu} \right) \right) e^{i\Psi} + \\ &\quad - \mu^3 \frac{5n\sigma}{32a^2} e^{-i\Psi} + O(\mu^4) \\ \varepsilon_{(0)}^s &= (1 + O(\mu^3)) e^{i0\Psi} + O(\mu^2) \end{aligned}$$

Форма базисной деформации  $\varepsilon_{(-1)}$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(-1)}^{\sigma} &= e^{-i\Psi} + O(\mu) \\ \varepsilon_{(-1)}^{\Psi} &= -i \frac{1}{\sigma} e^{-i\Psi} + O(\mu) \\ \varepsilon_{(-1)}^s &= O(\mu) \end{aligned}$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Найдем поле скоростей  $\mathbf{v}$  для источника с плотностью

$$\begin{aligned} Q(\sigma, \psi, \theta) &= \delta(\sigma - \sigma_{bound}) e^{im\psi + in\theta} \\ \sigma_{bound} &= a - \mu^2 \frac{5}{16} a + \mu^4 \frac{1}{1024} \left( -469 + 312 \ln \frac{8}{\mu} \right) a + O(\mu^6) \end{aligned}$$

Поле скоростей в области  $\sigma > \sigma_{bound}$  выражается через  $Q$  по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \nabla \Phi, \quad \Phi = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{Q(r') dr'}{|r - r'|} \\ |r - r'|^2 &= R^2 \left( 1 - \mu \frac{\rho}{a} \cos \phi \right) \left( 1 - \mu \frac{\rho'}{a} \cos \phi' \right) (2(1 - \cos(\theta - \theta') + \gamma^2)) \\ \gamma^2 &= \mu^2 \frac{(\rho \sin \phi - \rho' \sin \phi')^2 + (\rho \cos \phi - \rho' \cos \phi')^2}{a(a - \mu\rho \cos \phi)(a - \mu\rho' \cos \phi')} \end{aligned} \quad (\text{Б.1})$$

С учетом (Б.1) получим выражение для  $\Phi$

$$\Phi = -\frac{e^{in\theta}}{2\pi \left( 1 - \mu \frac{\rho}{a} \cos \phi \right)^{1/2}} \int_0^{\sigma_{bound}} \int_0^{2\pi} \frac{\delta(\sigma' - \sigma_{bound}) e^{im\Psi' \sigma'} P(\sigma, \psi, \sigma', \Psi') d\sigma' d\Psi'}{\left( 1 - \mu \frac{\rho'}{a} \cos \phi' \right)^{1/2}} \quad (\text{Б.2})$$

где

$$P = \int_0^{\pi} \frac{\cos n\alpha d\alpha}{(2(1 - \cos \alpha) + \gamma^2)^{1/2}}$$

Вся сложность заключается в вычислении асимптотики интеграла  $P$ , дальнейшее же интегрирование в (Б.2) проводится элементарно. Следуя [6], получим

$$\begin{aligned} P &= -2S_n + \ln \frac{8}{\gamma} + \gamma^2 \left( \frac{4n^2 - 1}{16} \ln \frac{8}{\gamma} + \frac{4n^2 + 1}{16} - \frac{4n^2 - 1}{8} S_n \right) - \frac{1}{2048} \gamma^4 \left( 21 + 36S_n + 8n^2 \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( 7 - 20S_n + 2n^2(-3 + 4S_n) + (-18 + 80n^2 - 32n^4) \ln \frac{8}{\gamma} \right) \right) + O(\gamma^6) \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

$$S_n = \sum_{l=1}^n \frac{1}{2l-1}$$

Далее множитель  $e^{in\theta}$  не выписывается ради краткости. Проводя интегрирование в (Б.2) с учетом (Б.3), из (Б.1) получим

$$\begin{aligned}
 v^\sigma &= 1 + \mu^2 \left( \frac{1}{4} n^2 \left( 4S_n - 2 \ln \frac{8}{\mu} \right) \right) + \mu \frac{1}{8} \left( 1 + 8S_n - 4 \ln \frac{8}{\mu} \right) \cos \psi + \\
 &+ \mu^3 \frac{1}{512} \left( 101 + 56n^2 (-1 + 8S_n) + 192S_n - 8(-9 + 28n^2 - 24S_n) \ln \frac{8}{\mu} \right) \cos \psi - \\
 &- \mu^3 \frac{1}{64} (108 \ln 2 \ln 2 + \ln \mu (-72 \ln 2 + 12 \ln \mu)) \cos \psi + \mu^2 \left( \frac{7}{64} \right) \cos 2\psi + \\
 &+ \mu^3 \frac{1}{256} \left( 11 + 24S_n - 12 \ln \frac{8}{\mu} \right) \cos 3\psi + O(\mu^4), \quad m = 0 \\
 \\
 v^\sigma &= \left( \frac{1}{2} + \mu^2 \frac{1}{16} \left( 2 + 4S_n + n^2 (-1 - 8S_n) - (2 - 4n^2) \ln \frac{8}{\mu} \right) + O(\mu^4) \right) e^{i\psi} + \\
 &+ \left( -\mu \frac{1}{8} + \mu^3 \frac{1}{1536} \left( 61 + 144S_n - 8n^2 (7 + 72S_n) - 144(1 - 2n^2) \ln \frac{8}{\mu} \right) + O(\mu^5) \right) e^{i2\psi} + \\
 &+ \left( -\mu^2 \frac{1}{64} + \mu^4 \frac{1}{12288} \left( 1409 + 720S_n - 4n^2 (103 + 576S_n) + 144(-9 + 8n^2) \ln \frac{8}{\mu} \right) + O(\mu^6) \right) e^{i3\psi} + \\
 &+ \left( -\mu^3 \frac{11}{768} + O(\mu^5) \right) e^{i4\psi} - \left( \frac{59}{12288} \mu^4 + O(\mu^6) \right) e^{i5\psi} + \left( \frac{1}{32} n^2 \mu^3 \left( 1 + 8S_n - 4 \ln \frac{8}{\mu} \right) + O(\mu^5) \right) e^{i0\psi} + \\
 &+ \left( \mu^2 \frac{1}{64} \left( 21 + 8S_n - 16 \ln \frac{8}{\mu} \right) + \mu^4 \frac{1}{2048} \left( 1435 + 440S_n + 8n^2 (-39 + 40S_n) + \right. \right. \\
 &\left. \left. + 32(-26 + n^2) \ln \frac{8}{\mu} \right) \right) e^{-i\psi} + \left( -\frac{3}{1024} \mu^3 \left( -25 + 8 \ln \frac{8}{\mu} \right) + O(\mu^5) \right) e^{-2i\psi} + \\
 &+ \left( \mu^4 \frac{1}{122880} \left( 6233 + 1440S_n - 3240 \ln \frac{8}{\mu} \right) + O(\mu^6) \right) e^{-3i\psi} + \\
 &+ O(\mu^6) e^{-i\psi} + O(\mu^5) e^{-4i\psi}, \quad m = 1 \\
 \\
 v^\sigma &= \left( \frac{1}{2} + \mu^2 \frac{1}{24} (-2 + n^2) + \mu^4 \frac{1}{6144} (-343 + 576S_n + 8n^4 (48S_n - 5) + 10n^2 (13 - 240S_n)) \right) e^{i2\psi} - \\
 &- \mu^4 \frac{1}{128} (6 - 25n^2 + 4n^4) \ln \frac{8}{\mu} e^{i2\psi} - \left( \frac{1}{16} \mu - \mu^3 \frac{1}{3072} \left( 116n^2 - 165 - 72 \ln \frac{8}{\mu} \right) + O(\mu^5) \right) e^{i3\psi} - \\
 &- \left( \frac{1}{96} \mu^2 - \mu^4 \frac{1}{122880} \left( 1233 + 2720n^2 - 4680 \ln \frac{8}{\mu} \right) + O(\mu^6) \right) e^{i4\psi} - \\
 &- \left( \mu \frac{1}{16} - \mu^3 \frac{1}{1024} \left( 67 + 112S_n - 8n^2 (7 + 40S_n) - 80(1 - 2n^2) \ln \frac{8}{\mu} \right) + O(\mu^5) \right) e^{i\psi} + \\
 &+ \left( \mu^4 \frac{1}{256} n^2 \left( 21 + 16S_n - 20 \ln \frac{8}{\mu} \right) + O(\mu^6) \right) e^{i0\psi} + \\
 &+ \left( \mu^3 \frac{1}{2048} \left( 383 + 64S_n - 248 \ln \frac{8}{\mu} \right) + O(\mu^5) \right) e^{-i\psi} \\
 &+ O(\mu^3) e^{i5\psi} + O(\mu^4) e^{-2i\psi} + O(\mu^5), \quad m = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v^\sigma &= \left( \frac{1}{2} + \mu^2 \left( -\frac{3}{64} + \frac{n^2}{96} \right) + O(\mu^4) \right) e^{i3\psi} - \left( \frac{1}{24}\mu - \mu^3 \frac{1}{1920} \left( -63 + 20n^2 - 30 \ln \frac{8}{\mu} \right) + O(\mu^5) \right) e^{i4\psi} - \\
&\quad - \left( \mu^2 \frac{1}{128} + O(\mu^4) \right) e^{i5\psi} - \left( \mu^3 \frac{7}{1280} + O(\mu^5) \right) e^{i6\psi} - \\
&\quad - \left( \mu \frac{1}{24} - \mu^3 \frac{1}{1536} \left( -75 + 52n^2 - 24 \ln \frac{8}{\mu} \right) + O(\mu^5) \right) e^{i2\psi} - \\
&\quad - \left( \mu^2 \frac{1}{64} + O(\mu^4) \right) e^{i\psi} + O(\mu^4) e^{i0\psi}, \quad m = 3 \\
v^\sigma &= \left( \frac{1}{2} + \mu^2 \frac{1}{240} (-8 + n^2) \right) e^{i4\psi} - \mu \frac{1}{32} e^{i5\psi} - \mu^2 \frac{1}{160} e^{i6\psi} - \mu \frac{1}{32} e^{i3\psi} - \mu^2 \frac{1}{96} e^{i2\psi} + O(\mu^3), \quad m = 4 \\
v^\sigma &= \frac{1}{2} e^{i5\psi} - \frac{1}{40} \mu e^{i4\psi} - \frac{1}{40} \mu e^{i6\psi} + O(\mu^2), \quad m = 5
\end{aligned}$$

Здесь  $v^\sigma$  – выражение для  $\sigma$ -компоненты поля скорости  $\mathbf{v}$  на границе  $\sigma = \sigma_{bound}$ . Скорости  $v^\sigma$ ,  $m < 0$  получаются комплексным сопряжением.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fraenkel L.E.* On steady vortex rings of small cross-section in an ideal fluid // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1970. V. 316. P. 29–62.
2. *Fraenkel L.E.* Examples of steady vortex rings of small cross-section in an ideal fluid // J. Fluid Mech. 1972. V. 2. № 1. P. 119–135.
3. *Акинъшин Р.В., Копьев В.Ф., Чернышев С.А., Юдин М.А.* Стационарное вихревое кольцо с изохронным течением в вихревом ядре // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 2. С. 222–233.
4. *Widnall S.E., Tsai S.Y.* // Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A. 1977. V. 287 (1344). 273.
5. *Fukumoto Y., Hattori Y.* Curvature instability of a vortex ring // J. Fluid Mech. 2005. V. 526. P. 77–115.
6. *Kopiev V.F., Chernyshev S.A.* Vortex ring eigen-oscillations as a source of sound // J. Fluid Mech. 1997. V. 341. P. 19–47.
7. *Копьев В.Ф., Чернышев С.А.* Колебания вихревого кольца, возникновение в нем турбулентности и генерации звука // УФН. 2000. Т. 170. № 7. С. 713–742.
8. *Saffman P.G.* Vortex Dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.
9. *Drazin P.G., Reid W.H.* Hydrodynamics stability (Second Ed.). Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
10. *Арнольд В.И.* Об условии нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости // Докл. АН СССР. 1965. Т. 162. № 5. С. 975–978.
11. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
12. *Акинъшин Р.В., Копьев В.Ф., Чернышев С.А., Юдин М.А.* Базисные деформации в задаче о возмущениях ядра тонкого изохронного вихревого кольца // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 5. С. 52–63.