УДК 532.5:534.2:534.18

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ОДНОМЕРНЫХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В СРЕДЕ ИЗ СЛОЕВ ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА И ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

© 2019 г. А. С. Шамаев[a,]*, В. В. Шумилова[a,]**

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

* *E-mail: sham@rambler.ru*

** *E-mail: v.v.shumilova@mail.ru*

Поступила в редакцию 26.03.2019 г.
После доработки 25.06.2019 г.
Принята к публикации 25.06.2019 г.

Исследован спектр одномерных собственных колебаний, распространяющихся в слоистой двухфазной среде перпендикулярно ее слоям. Рассмотренная среда состоит из большого числа периодически чередующихся слоев изотропного вязкоупругого материала и вязкой сжимаемой жидкости. Установлено, что указанный спектр состоит из корней трансцендентных уравнений, число которых пропорционально числу слоев исходной среды. При численном решении этих уравнений в качестве начальных приближений к их корням предложено использовать точки спектра одномерных собственных колебаний соответствующей усредненной среды, которые представляют собой корни дробно-рациональных уравнений. Показано, что в качестве начальных приближений следует брать также точки, в которых знаменатели дробей в дробно-рациональных уравнениях обращаются в нуль. Доказано, что точность выбранных начальных приближений увеличивается при одновременном увеличении числа слоев исходной среды и уменьшении их толщины.

Ключевые слова: спектр, вязкая жидкость, вязкоупругий материал, двухфазная среда, усредненная среда

DOI: 10.1134/S0568528119060100

Определение динамических характеристик микронеоднородных двухфазных сред, состоящих из твердого материала и жидкости, является одной из наиболее актуальных задач механики гетерогенных сред. Практическая значимость такой задачи обусловлена, прежде всего, широким распространением микронеоднородных твердожидких сред в природе (водонасыщенные грунты, коллекторы нефти и т.д.), а также запросами современной промышленности (производство фильтров).

При исследовании динамического поведения микронеоднородных твердожидких сред значительный интерес вызывает тот факт, что спектральные свойства таких сред могут качественно отличаться от спектральных свойств одной из их фаз. Так, например, в работе [1] было обнаружено явление исчезновения собственных частот колебаний при попадании в поры мраморного стержня очень малого количества вазелинового масла. В работе авторов [2] была предпринята попытка в рамках строгой математической модели обосновать это явление для случая слоистой твердожидкой среды с помощью исследования соответствующей ей усредненной среды.

При построении математических моделей, описывающих колебания микронеоднородных двухфазных сред, часто принимается упрощающее предположение о наличии в них периодической структуры. В этом случае исследование спектра собственных колебаний микронеоднородной среды может быть сведено к спектральному анализу краевой задачи для однородной системы дифференциальных уравнений, коэффициенты которых — периодические быстро осциллирующие функции. Таким образом, в случае дискретного спектра для численного нахождения его точек требуется, прежде всего, выбрать достаточно хорошие начальные приближения к собственным значениям краевой задачи. Однако, несмотря на упрощающее предположение о периодичности, непосредственный поиск таких приближений оказывается чрезвычайно затруднительной задачей, особенно в случае существования комплексных собственных значений с ненулевыми вещественными и мнимыми частями.

Для преодоления указанного выше затруднения целесообразно одновременно с исходными средами рассматривать также соответствующие им усредненные (эффективные) среды. Во многих случаях усредненные среды являются однородными и исследование их спектра собственных колебаний сводится к спектральному анализу краевых задач для однородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Совершенно очевидно, что численный поиск точек спектра для усредненных сред является несоизмеримо более легкой задачей по сравнению с предыдущей. С другой стороны, если обозначить через ε величину, характеризующую масштаб неоднородности исходной среды, то, как известно, динамические свойства исходной и усредненной сред должны быть близки друг к другу при достаточно малых ε. Это наталкивает на мысль использовать точки спектра S собственных колебаний усредненной среды в качестве начальных приближений к точкам спектра S_ε собственных колебаний исходной среды. Здесь возникает естественный вопрос: насколько точно и полно множество таких приближений? Для ответа на этот вопрос необходимо располагать фактом существования какой-либо сходимости спектров S_ε к спектру S при $\varepsilon \to 0$. Оптимальной в этом плане является сходимость спектров по Хаусдорфу [3]. Подробнее это означает выполнение двух условий: 1) для любого $s \in S$ найдется последовательность $s_\varepsilon \in S_\varepsilon$ такая, что $s_\varepsilon \to s$ при $\varepsilon \to 0$; 2) все конечные предельные точки последовательностей $s_\varepsilon \in S_\varepsilon$ принадлежат S.

Сходимость по Хаусдорфу спектров некоторых операторов, возникающих при операторной форме записи краевых задач механики упругих сред, была исследована в работах [3, 4]. Более подробно, в монографии [4] было установлено, что спектры самосопряженных невырожденных операторов дивергентного типа с ε-периодическими коэффициентами сходятся по Хаусдорфу к спектру предельного оператора с постоянными коэффициентами. В статье [3] были рассмотрены самосопряженные операторы дивергентного типа с ε-периодическими коэффициентами в случае, когда матрица коэффициентов двухфазна и сильно контрастна с коэффициентом контрастности $1/\varepsilon^2$ между жесткой и мягкой фазами (это соответствует модели двойной пористости). Было доказано, что если мягкая фаза дисперсна, то спектры допредельных операторов сходятся по Хаусдорфу к спектру предельного двухмасштабного оператора, который определен в пространстве функций от удвоенного количества независимых переменных.

В приведенных выше работах при доказательстве сходимости спектров по Хаусдорфу существенно использовалась самосопряженность рассмотренных операторов. В работе [5] в связи с различными задачами механики гетерогенных сред с диссипацией рассматривались несамосопряженные операторы с ε-периодическими коэффициентами и исследовался спектр предельного двухмасштабного оператора. Как было установлено, структура спектра предельного оператора является более сложной, чем в самосопряженном случае, а именно: в него входят как вещественные, так и невещественные собственные значения. Однако существование или отсутствие сходимости спектров по Хаусдорфу было не доказано из-за невозможности применения известных теорем о сходимости собственных значений самосопряженных операторов.

В работе [6] исследовалась сходимость по Хаусдорфу спектра S_ε одномерных собственных колебаний ε-периодической двухфазной среды, состоящей из упругого материала и вязкоупругого материала Кельвина–Фойгта. Было доказано, что одна из конечных предельных точек последовательностей $s_\varepsilon \in S_\varepsilon$ не является точкой спектра S одномерных собственных колебаний усредненной среды. Тем самым было установлено отсутствие сходимости по Хаусдорфу спектра S_ε к спектру S. Поскольку рассмотренным краевым задачам соответствуют несамосопряженные операторы, то полученный результат показал качественное различие в поведении спектров самосопряженных и несамосопряженных операторов в одномерном случае.

В работе [7] исследовался спектр S_ε одномерных собственных колебаний ε-периодической двухфазной среды, состоящей из упругого и вязкоупругого материалов. Предполагалось, что вязкоупругий материал не обладает объемной релаксацией, а регулярная часть его ядра сдвиговой релаксации аппроксимирована одной экспонентой. Одновременно был рассмотрен спектр S одномерных собственных колебаний усредненной среды. С помощью невещественных точек спектров S_ε и S были найдены собственные частоты колебаний, а также коэффициенты затухания собственных колебаний как для исходной, так и для усредненной сред.

В данной статье исследуется спектр S_ε одномерных собственных колебаний ε-периодической гетерогенной среды, состоящей из взаимно чередующихся слоев изотропного вязкоупругого материала и вязкой сжимаемой жидкости. Предполагается, что регулярные части ядер релаксации вязкоупругого материала аппроксимированы либо одной экспонентой, либо суммой нескольких экспонент. Наряду с указанным спектром рассматривается также спектр S одномерных собственных колебаний усредненной среды. Исследуется вопрос о степени близости точек спектров S_ε и S, а также проводится численное сравнение их точек для трех образцов слоистой среды, которые отличаются друг от друга лишь числом и толщиной слоев.

1. ИСХОДНАЯ И УСРЕДНЕННАЯ МОДЕЛИ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ

Рассмотрим двухфазную гетерогенную среду, занимающую полосу $0 < x < L$ и состоящую из чередующихся плоских слоев изотропного вязкоупругого материала и вязкой сжимаемой жидкости. Предполагается, что все слои параллельны плоскости Oyz. Пусть $2M$ – общее число всех слоев, ε – суммарная толщина любых двух соседних слоев, εh – толщина одного жидкого слоя, $\varepsilon(1-h)$ – толщина одного вязкоупругого слоя ($\varepsilon = L/M$, $0 < h < 1$).

Определяющие соотношения, связывающие компоненты тензоров напряжений и малых деформаций в вязкоупругой фазе, имеют вид

$$\sigma_{ij}^{\varepsilon} = a_{ijkh}e_{kh}(\mathbf{u}^{\varepsilon}) + d_{ijkh}(t) * e_{kh}(\mathbf{u}^{\varepsilon})$$

где $\mathbf{u}^{\varepsilon}(x,y,z,t)$ – вектор перемещений, σ^{ε} и $e(\mathbf{u}^{\varepsilon})$ – тензоры напряжений и малых деформаций соответственно, a – тензор модулей упругости, $d(t)$ – тензор регулярных частей ядер релаксации, символ “*” обозначает операцию свертки по переменной t

$$e_{kh}(\mathbf{u}^{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k^{\varepsilon}}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h^{\varepsilon}}{\partial x_k}\right), \quad a_{ijkh} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kh} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk})$$

$$d_{ijkh}(t) = -\left(G_1(t) - \frac{1}{3}G(t)\right)\delta_{ij}\delta_{kh} - \frac{1}{2}G(t)(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}), \quad 1 \le i,j,k,h \le 3$$

Здесь δ_{ij} – символ Кронекера; λ и μ – параметры Ламе вязкоупругого материала; $G_1(t)$ и $G(t)$ – регулярные части ядер объемной и сдвиговой релаксации соответственно [8]. В дальнейшем предполагается, что

$$G_1(t) = k_1G(t), \quad G(t) = \sum_{n=1}^{N} v_n \exp(-\gamma_n t), \quad k_1 \ge 0, \quad \sum_{n=1}^{N}\frac{v_n}{\gamma_n} < K$$

где $v_n, \gamma_n \in \mathbf{R}^+$ ($n = 1, \dots, N$); $\gamma_i > \gamma_j$ при $i > j$; $K = \min\{(\lambda + 2\mu/3)/k_1, 2\mu\}$ при $k_1 > 0$ и $K = 2\mu$ при $k_1 = 0$ [9].

Определяющие соотношения, связывающие компоненты тензоров напряжений и малых деформаций в жидкой фазе, имеют вид

$$\sigma_{ij}^{\varepsilon} = -\delta_{ij}p^{\varepsilon} + (\zeta\delta_{ij}\delta_{kh} + 2\eta\delta_{ik}\delta_{jh})e_{kh}\left(\frac{\partial \mathbf{u}^{\varepsilon}}{\partial t}\right), \quad \zeta = \theta - \frac{2}{3}\eta$$

где η и θ – коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости соответственно [10]; $p^{\varepsilon}(x,y,z,t)$ – давление в жидкости; $p^{\varepsilon}(x,y,z,t) = -\gamma \operatorname{div}\mathbf{u}^{\varepsilon}(x,y,z,t)$ [11]; $\gamma = \rho_2 c^2$; ρ_2 – плотность жидкости; c – скорость звука в жидкости в состоянии покоя.

Рассмотрим более подробно одномерные колебания, распространяющиеся в слоистой среде перпендикулярно ее слоям, т.е. вдоль оси Ox (в этом случае $\mathbf{u}^{\varepsilon}(x,y,z,t) = (u^{\varepsilon}(x,t),0,0)$). Без ограничения общности можно считать, что вязкоупругие слои занимают M полос $(m-1)\varepsilon < x < (m-h)\varepsilon$, а жидкие слои – M полос $(m-h)\varepsilon < x < m\varepsilon$, $m = 1, \dots, M$. Тогда математическая модель, описывающая одномерные колебания в слоистой среде вдоль оси Ox, имеет вид

$$\rho_s\frac{\partial^2 u^{\varepsilon}}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma^{\varepsilon}}{\partial x} + f(x,t), \quad x \in L_{s\varepsilon}, \quad t > 0, \quad s = 1,2 \tag{1.1}$$

$$[u^{\varepsilon}]_{x=(m-h)\varepsilon} = 0, \quad [\sigma^{\varepsilon}]_{x=(m-h)\varepsilon} = 0, \quad m = 1, \dots, M \tag{1.2}$$

$$[u^\varepsilon]_{x=n\varepsilon} = 0, \quad [\sigma^\varepsilon]_{x=n\varepsilon} = 0, \quad n = 1, \ldots, M-1 \tag{1.3}$$

$$u^\varepsilon(0,t) = u^\varepsilon(L,t) = 0, \quad t > 0; \quad u^\varepsilon(x,0) = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x,0) = 0, \quad x \in (0,L) \tag{1.4}$$

где ρ_1 – плотность вязкоупругого материала; $f(x,t)$ – внешняя сила, действующая вдоль оси Ox; квадратные скобки $[\cdot]_{x=\xi}$ означают скачок заключенной в них величины при переходе через точку $x = \xi$.

$$L_{1\varepsilon} = \bigcup_{m=1}^{M}((m-1)\varepsilon,(m-h)\varepsilon), \quad L_{2\varepsilon} = \bigcup_{m=1}^{M}((m-h)\varepsilon, m\varepsilon)$$

$$\sigma^\varepsilon = a\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} - k_2 G(t) * \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}, \quad a = \lambda + 2\mu, \quad k_2 = k_1 + \frac{2}{3}, \quad x \in L_{1\varepsilon}$$

$$\sigma^\varepsilon = \gamma\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} + b\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x \partial t}, \quad b = \zeta + 2\eta, \quad x \in L_{2\varepsilon}$$

Наряду с задачей (1.1)–(1.4) рассмотрим соответствующую ей усредненную задачу, построенную при $\varepsilon \to 0$ и описывающую одномерные колебания вдоль оси Ox однородного вязкоупругого материала. Используя метод, изложенный в [9] и [12], можно показать, что усредненная задача записывается в виде

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\sum_{m=1}^{N+1} q_m \exp(-\xi_m t)\right) * \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad x \in (0,L), \quad t > 0 \tag{1.5}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t > 0; \quad u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad x \in (0,L) \tag{1.6}$$

$$\rho = \rho_1(1-h) + \rho_2 h, \quad \alpha = \frac{a}{1-h}, \quad q_m = w_m(\gamma - \xi_m b), \quad m = 1, \ldots, N+1$$

Здесь $\xi_1, \ldots, \xi_{N+1}$ – корни дробно-рационального уравнения

$$\xi - \frac{A}{b(1-h)} = \frac{k_2 h}{b(1-h)}\sum_{n=1}^{N}\frac{v_n}{\xi - \gamma_n}, \quad A = ah + \gamma(1-h) \tag{1.7}$$

Оно равносильно алгебраическому уравнению степени $N+1$:

$$\xi^{N+1} + Q_1\xi^N + \ldots + Q_{N+1} = 0 \tag{1.8}$$

$$Q_1 = -\sum_{n=1}^{N}\gamma_n - \frac{A}{b(1-h)}, \ldots, Q_N = \frac{(-1)^{N+1}}{b(1-h)}\prod_{n=1}^{N}\gamma_n\left(A - k_2 h\sum_{n=1}^{N}\frac{v_n}{\gamma_n}\right)$$

Величины $w_1, \ldots, w_{N+1}$ – решение системы $N+1$ линейных уравнений:

$$\sum_{m=1}^{N+1}\frac{w_m}{\xi_m - \gamma_n} = -\frac{1}{h} \quad (n = 1, \ldots, N), \quad \sum_{m=1}^{N+1} w_m = -\frac{a}{b(1-h)} \tag{1.9}$$

Применяя геометрические построения и учитывая, что $v_n > 0$ при всех $n = 1, \ldots, N$, нетрудно установить, что все корни $\xi_1, \ldots, \xi_{N+1}$ уравнения (1.7) вещественны. Кроме того, имеют место следующие оценки:

$$0 < \xi_1 < \gamma_1, \quad \gamma_{j-1} < \xi_j < \gamma_j, \quad j = 2, \ldots, N \tag{1.10}$$

$$\max\left\{\gamma_N, \frac{A}{b(1-h)}\right\} < \xi_{N+1} < \gamma_N + \frac{A}{b(1-h)}$$

Они справедливы для любого $N \geq 1$. Отметим, что такая локализация корней уравнения (1.7) существенно упрощает их численный поиск при больших N.

Докажем, что $q_m > 0$ для всех $m = 1, \ldots, N+1$. Для этого рассмотрим уравнение

$$\sum_{m=1}^{N+1}\frac{w_m}{\gamma-\xi_m}=\frac{1}{h}$$

и выпишем равносильное ему алгебраическое уравнение степени $N+1$

$$\gamma^{N+1}+E_1\gamma^N+\ldots+E_{N+1}=0 \tag{1.11}$$

$$Q_1=-\sum_{m=1}^{N+1}(\xi_m+hw_m),\ \ldots,\ Q_N=(-1)^{N+1}\prod_{m=1}^{N+1}\xi_m\left(1+h\sum_{m=1}^{N+1}\frac{w_m}{\xi_m}\right)$$

Уравнение (1.11) имеет $N+1$ корней, в число которых входят $\gamma_1,\ldots,\gamma_N$. Выясним, чему равен еще один его корень, который обозначим через γ_0.

По формуле Виета для корней и коэффициентов уравнений (1.8) и (1.11) имеем

$$\sum_{m=1}^{N+1}\xi_m=\sum_{n=1}^{N}\gamma_n+\frac{A}{b(1-h)},\qquad \gamma_0+\sum_{n=1}^{N}\gamma_n=\sum_{m=1}^{N+1}(\xi_m+hw_m)$$

Из этих двух равенств и последнего уравнения системы (1.9) получаем

$$\gamma_0=\frac{A}{b(1-h)}+h\sum_{m=1}^{N+1}w_m=\frac{\gamma}{b}$$

Принимая во внимание неравенства (1.10) и используя геометрические построения, нетрудно показать, что если $\gamma_0<\xi_1$, то $w_m<0$ для всех $m=1,\ldots,M+1$, а если $\gamma_0>\xi_{N+1}$, то $w_m>0$ для всех $m=1,\ldots,M+1$. Если же $\gamma_0\in(\xi_k,\xi_{k+1})$ при некотором k, то $w_m>0$ для всех $m=1,\ldots,k$ и $w_m<0$ для всех $m=k+1,\ldots,M+1$. Тем самым доказано, что $(\gamma_0-\xi_m)w_m>0$, а значит, $q_m>0$ для всех $m=1,\ldots,N+1$.

2. СПЕКТР ОДНОМЕРНЫХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ

Применим преобразование Лапласа $u^\varepsilon(x,t)\to u_p^\varepsilon(x)$ и запишем задачу (1.1)–(1.4) при $f(x,t)\equiv 0$ в изображениях Лапласа

$$p^2\rho_s u_p^\varepsilon=A_{sp}\frac{\partial^2u_p^\varepsilon}{\partial x^2},\quad x\in L_{s\varepsilon},\quad s=1,2 \tag{2.1}$$

$$[u_p^\varepsilon]_{x=(m-h)\varepsilon}=0,\quad [\sigma_p^\varepsilon s]_{x=(m-h)\varepsilon}=0,\quad m=1,\ldots,M \tag{2.2}$$

$$[u_p^\varepsilon]_{x=n\varepsilon}=0,\quad [\sigma_p^\varepsilon]_{x=n\varepsilon}=0,\quad n=1,\ldots,M-1 \tag{2.3}$$

$$u_p^\varepsilon(0)=u_p^\varepsilon(L)=0 \tag{2.4}$$

$$\sigma_p^\varepsilon=A_{sp}\frac{\partial u_p^\varepsilon}{\partial x},\quad x\in L_{s\varepsilon}\quad (s=1,2),\quad A_{1p}=a-k_2\sum_{n=1}^{N}\frac{v_n}{p+\gamma_n},\quad A_{2p}=\gamma+pb$$

В дальнейшем p рассматривается в качестве спектрального параметра, а под спектром одномерных собственных колебаний, распространяющихся вдоль оси Ox, понимается множество S_ε всех комплексных значений p, при которых спектральная задача (2.1)–(2.4) имеет нетривиальное решение, т.е. $S_\varepsilon=\{p\in\mathbf{C}: u_p^\varepsilon(x)\neq 0\}$.

С точки зрения практических приложений наибольший интерес вызывают невещественные точки спектра S_ε, поскольку с их помощью определяется спектр собственных частот одномерных колебаний как упорядоченное (по возрастанию) множество F_ε, состоящее из положительных мнимых частей всех $p\in S_\varepsilon$, т.е. $F_\varepsilon=\{\omega:\omega=\operatorname{Im}p>0, p\in S_\varepsilon\}$. Следует также отметить, что если $p\in S_\varepsilon$ и $p\in\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$, то $d=-\operatorname{Re}p$ представляет собой коэффициент затухания собственного колебания с частотой $\omega=|\operatorname{Im}p|$.

Чтобы описать множество S_ε, зафиксируем целое число m ($1 \le m \le M$) и рассмотрим уравнения (2.1) при $x \in I^\varepsilon_{1m} = ((m-1)\varepsilon, (m-h)\varepsilon)$ и $x \in I^\varepsilon_{2m} = ((m-h)\varepsilon, m\varepsilon)$. Нетрудно проверить, что решениями этих уравнений являются функции

$$u^\varepsilon_p(x) = \frac{1}{2}\left(R^{s\varepsilon}_{mp} - \frac{W^{s\varepsilon}_{mp}}{p\sqrt{\rho_s A_{sp}}}\right)\exp\left(-p\sqrt{\frac{\rho_s}{A_{sp}}}(x-(m-l_s)\varepsilon)\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(R^{s\varepsilon}_{mp} + \frac{W^{s\varepsilon}_{mp}}{p\sqrt{\rho_s A_{sp}}}\right)\exp\left(p\sqrt{\frac{\rho_s}{A_{sp}}}(x-(m-l_s)\varepsilon)\right), \quad x \in I^\varepsilon_{sm}, \quad s = 1,2$$

$$R^{s\varepsilon}_{mp} = u^\varepsilon_p((m-l_s)\varepsilon + 0), \quad W^{s\varepsilon}_{mp} = A_{sp}\frac{\partial u^\varepsilon_p}{\partial x}((m-l_s)\varepsilon + 0), \quad l_1 = 1, \quad l_2 = h, \quad s = 1,2$$

Вычисляя $u^\varepsilon_p(x)$ и $\sigma^\varepsilon_p(x)$ при $x = x^\varepsilon_{1m} = (m-h)\varepsilon - 0$ и $x = x^\varepsilon_{2m} = m\varepsilon - 0$, получаем два матричных равенства

$$\begin{pmatrix} u^\varepsilon_p(x^\varepsilon_{sm}) \\ \sigma^\varepsilon_p(x^\varepsilon_{sm}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\exp(-K^\varepsilon_{sp})W^\varepsilon_{sp}\begin{pmatrix} R^{s\varepsilon}_{mp} \\ W^{s\varepsilon}_{mp} \end{pmatrix}, \quad s = 1,2$$

где W^ε_{1p} и W^ε_{2p} — квадратные матрицы 2-го порядка, элементы которых находятся по формулам

$$(W^\varepsilon_{sp})_{11} = (W^\varepsilon_{sp})_{22} = 1 + \exp(2K^\varepsilon_{sp}), \quad (W^\varepsilon_{sp})_{12} = \frac{1}{p\sqrt{\rho_s A_{sp}}}(-1 + \exp(2K^\varepsilon_{sp}))$$

$$(W^\varepsilon_{s\lambda})_{21} = p\sqrt{\rho_s A_{sp}}(-1 + \exp(2K^\varepsilon_{sp})), \quad K^\varepsilon_{sp} = \varepsilon K_{sp}, \quad s = 1,2$$

$$K_{1p} = p(1-h)\sqrt{\frac{\rho_1}{A_{1p}}}, \quad K_{2p} = ph\sqrt{\frac{\rho_2}{A_{2p}}}$$

Из условий непрерывности (2.2) и (2.3) на границах $x = (m-h)\varepsilon$ и $x = m\varepsilon$ следует, что

$$\begin{pmatrix} u^\varepsilon_p(m\varepsilon) \\ \sigma^\varepsilon_p(m\varepsilon) \end{pmatrix} = C^\varepsilon_p W^\varepsilon_p \begin{pmatrix} u^\varepsilon_p((m-1)\varepsilon) \\ \sigma^\varepsilon_p((m-1)\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad C^\varepsilon_p = \frac{1}{4}\exp(-K^\varepsilon_{1p} - K^\varepsilon_{2p}) \tag{2.5}$$

где элементы матрицы $W^\varepsilon_p = W^\varepsilon_{2p}W^\varepsilon_{1p}$ находятся по формулам

$$(W^\varepsilon_p)_{ii} = (1 + B_{ip})(1 + \exp(2K^\varepsilon_{1p} + 2K^\varepsilon_{2p})) + (1 - B_{ip})(\exp(2K^\varepsilon_{1p}) + \exp(2K^\varepsilon_{2p}))$$

$$(W^\varepsilon_p)_{ij} = C_{jp}\left(1 + B_{ip}\right)(-1 + \exp(2K^\varepsilon_{1p} + 2K^\varepsilon_{2p})) +$$

$$+ C_{jp}\left(1 - B_{ip}\right)(\exp(2K^\varepsilon_{1p}) - \exp(2K^\varepsilon_{2p})), \quad i \ne j$$

$$B_{1p} = K_p, \quad B_{2p} = \frac{1}{K_p}, \quad K_p = \sqrt{\frac{\rho_1 A_{1p}}{\rho_2 A_{2p}}}, \quad C_{1p} = p\sqrt{\rho_1 A_{1p}}, \quad C_{2p} = \frac{1}{C_{1p}}$$

Так как величина C^ε_p и элементы матрицы W^ε_p не зависят от числа M, то из (2.5) получаем равенство

$$\begin{pmatrix} u^\varepsilon_p(M\varepsilon) \\ \sigma^\varepsilon_p(M\varepsilon) \end{pmatrix} = H^\varepsilon_p\begin{pmatrix} u^\varepsilon_p(0) \\ \sigma^\varepsilon_p(0) \end{pmatrix}, \quad H^\varepsilon_p = (C^\varepsilon_p W^\varepsilon_p)^M$$

которое, учитывая граничные условия (2.4), можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma^\varepsilon_p(L) \end{pmatrix} = H^\varepsilon_p\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma^\varepsilon_p(0) \end{pmatrix}$$

Отсюда следует, что элементами множества S_ε являются корни уравнения

$$(H_p^\varepsilon)_{12} = 0 \tag{2.6}$$

Вычисления показывают, что элемент $(H_p^\varepsilon)_{12}$ матрицы H_p^ε находится с помощью элементов матрицы W_p^ε следующим образом:

$$(H_p^\varepsilon)_{12} = C_p^\varepsilon (W_p^\varepsilon)_{12} \sum_{j=1}^{Q} (-1)^{j-1} C_{M-j}^{j-1} (C_p^\varepsilon \operatorname{tr} W_p^\varepsilon)^{M+1-2j}$$

где $Q = M/2$ при четном M и $Q = (M+1)/2$ при нечетном M, а C_{M-j}^{j-1} – биномиальные коэффициенты. Таким образом, уравнение (2.6) разбивается на два уравнения

$$(W_p^\varepsilon)_{12} = 0, \quad \sum_{j=1}^{Q} (-1)^{j-1} C_{M-j}^{j-1} (C_p^\varepsilon \operatorname{tr} W_p^\varepsilon)^{M+1-2j} = 0$$

Используя результаты работы [6], можно показать, что второе из этих уравнений, в свою очередь, разбивается на M – 1 уравнений

$$C_p^\varepsilon \operatorname{tr} W_p^\varepsilon = 2\cos\frac{\pi k}{M}, \quad k = 1, \ldots, M-1$$

После подстановки ранее выписанных формул для элементов матрицы W_p^ε заключаем, что множество S_ε состоит из всех корней следующих M трансцендентных уравнений:

$$\frac{1}{p}(1+K_p)(-1+\exp(2K_{1p}^\varepsilon + 2K_{2p}^\varepsilon)) + \frac{1}{p}(1-K_p)(\exp(2K_{1p}^\varepsilon) - \exp(2K_{2p}^\varepsilon)) = 0 \tag{2.7}$$

$$\left(2 + K_p + \frac{1}{K_p}\right)(\exp(-K_{1p}^\varepsilon - K_{2p}^\varepsilon) + \exp(K_{1p}^\varepsilon + K_{2p}^\varepsilon)) +$$

$$+\left(2 - K_p - \frac{1}{K_p}\right)(\exp(-K_{1p}^\varepsilon + K_{2p}^\varepsilon) + \exp(K_{1p}^\varepsilon - K_{2p}^\varepsilon)) = 8\cos\frac{\pi k}{M} \tag{2.8}$$

$$k = 1, \ldots, M-1$$

Таким образом, поиск точек спектра S_ε одномерных собственных колебаний, распространяющихся перпендикулярно вязкоупругим и жидким слоям, сводится к решению трансцендентных уравнений (2.7) и (2.8). Эти уравнения могут быть решены только численно, поскольку найти их аналитическое решение даже в отдельных частных случаях не представляется возможным. Численное решение указанных уравнений удобно осуществлять с помощью принципа аргумента, хорошо известного в теории функций комплексного переменного. Однако для этого необходимо выбрать достаточно хорошие начальные приближения к корням уравнений (2.7) и (2.8). Как далее будет показано, в качестве таких приближений следует брать корни дробно-рациональных уравнений, возникающих при спектральном анализе усредненной модели слоистой среды.

3. СПЕКТР ОДНОМЕРНЫХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ УСРЕДНЕННОЙ СРЕДЫ

Применим преобразование Лапласа $u(x,t) \to u_p(x)$ и запишем задачу (1.5)–(1.9) при $f(x,t) \equiv 0$ в изображениях Лапласа

$$p^2 \rho u_p = \left(\alpha - \sum_{m=1}^{N+1} \frac{q_m}{p + \xi_m}\right)\frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2}, \quad x \in (0, L); \quad u_p(0) = u_p(L) = 0 \tag{3.1}$$

По определению, множество S всех комплексных значений p, при которых спектральная задача (3.1) имеет нетривиальное решение, образует спектр одномерных собственных колебаний, а упорядоченное (по возрастанию) множество $F = \{\omega : \omega = \operatorname{Im} p > 0, p \in S\}$ – спектр собственных частот одномерных колебаний, распространяющихся в усредненной среде вдоль оси Ox. При этом, если $p \in S$ и $p \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$, то $d = -\operatorname{Re} p$ представляет собой коэффициент затухания собственного колебания с частотой $\omega = |\operatorname{Im} p|$.

Согласно результатам [13] множество S имеет следующую структуру:

$$S = \bigcup_{j=1}^{N+3} \{p_{jk}\}_{k=1}^{\infty}, \quad p_{jk} \in \mathbf{R} \quad (j = 1,\ldots, N+1), \quad p_{jk} \in \mathbf{C} \quad (l = N+2, N+3) \tag{3.2}$$

где p_{1k}, p_{2k}, ..., $p_{(N+3)k}$ – корни дробно-рациональных уравнений

$$p^2 + \alpha C_k = C_k \sum_{m=1}^{N+1} \frac{q_m}{p+\xi_m}, \quad C_k = \frac{\pi^2 k^2}{\rho L^2} \tag{3.3}$$

которые сводятся к равносильным им алгебраическим уравнениям степени $N + 3$:

$$p^{N+3} + I_1 p^{N+2} + \ldots + I_{N+3} = 0 \tag{3.4}$$

$$I_1 = \sum_{n=1}^{N+1} \xi_m, \; \ldots, \; I_{N+3} = C_k \prod_{m=1}^{N+1} \xi_m \left(\alpha - \sum_{m=1}^{N+1} \frac{q_m}{\xi_m} \right)$$

Следует отдельно отметить, что две последние последовательности в (3.2) могут содержать не более конечного числа вещественных собственных значений, т.е. существует такой номер $K_1 \geq 1$, что $\lambda_{(N+2)k}$ и $\lambda_{(N+3)k}$ являются комплексно-сопряженными собственными значениями для всех $k \geq K_1$ [13]. Это означает, в частности, что имеется бесконечное число собственных частот одномерных колебаний усредненной среды, т.е. $F = \{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Для того, чтобы можно было воспользоваться оценками, приведенными в [13] для корней уравнений вида (3.3), нам потребуется доказать неравенство

$$\alpha - \sum_{m=1}^{N+1} \frac{q_m}{\xi_m} > 0 \tag{3.5}$$

Для доказательства воспользуемся формулой Виета и выпишем связь между корнями и свободными членами уравнений (1.8) и (1.11)

$$\prod_{m=1}^{N+1} \xi_m = \frac{1}{b(1-h)} \prod_{n=1}^{N} \gamma_n \left(A - k_2 h \sum_{n=1}^{N} \frac{v_n}{\gamma_n} \right), \quad \gamma_0 \prod_{n=1}^{N} \gamma_n = \prod_{m=1}^{N+1} \xi_m \left(1 + h \sum_{m=1}^{N+1} \frac{w_m}{\xi_m} \right)$$

Так как $\gamma_0 = \gamma / b$, то из последних двух равенств получаем

$$\left(1 + h \sum_{m=1}^{N+1} \frac{w_m}{\xi_m} \right) \left(A - k_2 h \sum_{n=1}^{N} \frac{v_n}{\gamma_n} \right) = \gamma(1-h) \tag{3.6}$$

Но в силу приведенных выше ограничений, налагаемых на функцию $G(t)$, вторая скобка в левой части равенства (3.6) больше правой части $\gamma(1-h)$ этого же равенства. Отсюда следует, что

$$\sum_{m=1}^{N+1} \frac{w_m}{\xi_m} < 0$$

Используя это неравенство и последнее уравнение системы (1.9), получаем

$$\alpha - \sum_{m=1}^{N+1} \frac{q_m}{\xi_m} = \frac{a}{1-h} + b \sum_{m=1}^{N+1} w_m - \gamma \sum_{m=1}^{N+1} \frac{w_m}{\xi_m} = -\gamma \sum_{m=1}^{N+1} \frac{w_m}{\xi_m} > 0$$

что и требовалось доказать.

Выполнение неравенства (3.5), а также положительность q_m при $m = 1, \ldots, N+1$, доказанная ранее, гарантирует отрицательность вещественных частей всех корней p_{jk} уравнений (3.3). Кроме того, согласно результатам работы [14] корни уравнений (3.3) удовлетворяют следующим оценкам и предельным соотношениям

$$-\xi_i < p_{ik} < -\xi_{i-1}, \quad -\xi_{N+1} < p_{jk} < 0 \quad (p_{jk} \in \mathbf{R}), \quad -\frac{\xi_{N+1}}{2} < \operatorname{Re} p_{jk} < 0 \quad (p_{jk} \in \mathbf{C} \backslash \mathbf{R})$$

$$\lim_{k\to\infty} p_{ik} = p_i, \quad \lim_{k\to\infty} \operatorname{Re} p_{jk} = -\frac{1}{2\alpha}\sum_{m=1}^{N+1} q_m, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{Im} p_{jk}}{k} = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{\alpha}{\rho}}$$

$$\xi_0 = 0, \quad i = 1, \ldots, N+1, \quad j = N+2, N+3$$

где $p_1, \ldots, p_{N+1}$ – корни уравнений

$$\sum_{m=1}^{N+1} \frac{q_m}{p+\xi_m} = \alpha$$

Таким образом, поиск точек спектра одномерных собственных колебаний усредненной среды сводится к решению дробно-рациональных уравнений (3.3). Численное решение этих уравнений, принимая во внимание достаточно хорошее представление о структуре их корней благодаря приведенным выше оценкам и предельным соотношениям, не представляет сложности даже в случае больших N. Это дает возможность использовать корни уравнений (3.3) в качестве начальных приближений к корням трансцендентных уравнений (2.8), локализация которых аналитическими методами является крайне затруднительной.

4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ТОЧЕК ИСХОДНОГО СПЕКТРА

Перейдем к исследованию асимптотического поведения корней уравнений (2.7) и (2.8) при $\varepsilon \to 0$ и сравним все конечные предельные точки последовательностей $p(\varepsilon) \in S_\varepsilon$ с точками усредненного спектра S. Такое сравнение позволит, в частности, дать ответ на вопрос о том, все ли точки спектра S_ε близки к соответствующим точкам спектра S при достаточно малых ε.

Для исследования асимптотического поведения корней уравнения (2.7) при $\varepsilon \to 0$ воспользуемся разложением экспонент $\exp(2K_{1p}^\varepsilon + 2K_{2p}^\varepsilon)$, $\exp(2K_{1p}^\varepsilon)$ и $\exp(2K_{2p}^\varepsilon)$ в ряды по степеням их показателей. Подставляя эти разложения в (2.7), получаем

$$\frac{1}{p}(K_{1p} + K_p K_{2p} + \varepsilon M_p^\varepsilon) = 0 \tag{4.1}$$

$$M_p^\varepsilon = (1+K_p)\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2\varepsilon)^{n-2}}{n!}(K_{1p}+K_{2p})^n + (1-K_p)\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2\varepsilon)^{n-2}}{n!}((K_{1p})^n - (K_{2p})^n)$$

Перейдем в уравнении (4.1) к пределу при $\varepsilon \to 0$, считая, что последовательность его корней $p(\varepsilon)$ ограничена и $p(\varepsilon) \to \theta < \infty$. Так как $\varepsilon M_p^\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то предельная точка θ есть корень уравнения

$$\frac{1}{\theta}(K_{1\theta} + K_\theta K_{2\theta}) = 0 \tag{4.2}$$

После преобразований последнее уравнение записывается в виде

$$\theta + \frac{A}{b(1-h)} = \frac{k_2 h}{b(1-h)}\sum_{n=1}^{N} \frac{v_n}{\theta + \gamma_n} \tag{4.3}$$

Сравнивая уравнения (1.7) и (4.3), мы видим, что θ совпадает с одним из корней уравнения (1.7), взятым с противоположным знаком, т.е. $\theta = -\xi_m$ при некотором $m = 1, \ldots, N+1$. Кроме того, из теоремы Руше следует обратное утверждение, а именно: для каждой точки $\theta_m = -\xi_m$ найдется последовательность корней уравнений (2.7), сходящаяся к θ_m при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, конечные предельные точки последовательностей корней уравнения (2.7) не принадлежат спектру S одномерных собственных колебаний усредненной среды. Вместе с тем интересно отметить, что в этих точках обращается в нуль знаменатель одной из дробей в правой части уравнения (3.3), корни которого образуют спектр S.

Заметим также, что из (4.2) следует, что нельзя “убрать” $p = p(\varepsilon)$ из знаменателя уравнения (2.7), добавив при этом требование $p(\varepsilon) \neq 0$, так как это приведет к появлению “лишней” предельной точки $\theta = 0$.

Перейдем к исследованию предельного поведения корней уравнений (2.8) при $\varepsilon \to 0$. С этой целью подставим в эти уравнения разложения функций $\exp(\pm K_{1p}^{\varepsilon} \pm K_{2p}^{\varepsilon})$ и $\cos(\pi k/M)$ в ряды по степеням $\pm K_{1p}^{\varepsilon} \pm K_{2p}^{\varepsilon}$ и $\pi k\varepsilon/L$ соответственно. В результате получаем

$$K_{1p}^2 + K_{2p}^2 + K_{1p}K_{2p}\left(K_p + \frac{1}{K_p}\right) + \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 + \varepsilon^2 N_p^{\varepsilon} = 0, \quad k = 1, \ldots M, \tag{4.4}$$

$$N_p^{\varepsilon} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n-4}}{(2n)!}((K_{1p} + K_{2p})^{2n} + (K_{1p} - K_{2p})^{2n}) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(K_p + \frac{1}{K_p}\right)\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n-4}}{(2n)!}((K_{1p} + K_{2p})^{2n} - (K_{1p} - K_{2p})^{2n}) - 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \varepsilon^{2n-4}}{(2n)!}\left(\frac{\pi k}{L}\right)^{2n}$$

При фиксированном k перейдем в уравнении (4.4) к пределу при $\varepsilon \to 0$, считая, что последовательность его корней $p_k(\varepsilon)$ ограничена и $p_k(\varepsilon) \to \theta_k < \infty$. Так как $\varepsilon^2 N_p^{\varepsilon} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то предельная точка θ_k есть корень уравнения

$$K_{1\theta}^2 + K_{2\theta}^2 + K_{1\theta}K_{2\theta}\left(K_\theta + \frac{1}{K_\theta}\right) + \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 = 0$$

которое после преобразований принимает вид

$$\theta^3 + \frac{1}{b(1-h)}\left(A - k_2 h \sum_{n=1}^{N} \frac{v_n}{\theta + \gamma_n}\right)\theta^2 + \frac{C_k(\gamma + bp)}{b(1-h)}\left(a - k_2 \sum_{n=1}^{N} \frac{v_n}{\theta + \gamma_n}\right) = 0 \tag{4.5}$$

Переходя от (4.5) к равносильному алгебраическому уравнению

$$\theta^{N+3} + D_1\theta^{N+2} + \ldots + D_{N+3} = 0 \tag{4.6}$$

$$D_1 = \sum_{n=1}^{N} \gamma_n + \frac{A}{b(1-h)}, \ \ldots, \ D_{N+3} = \frac{C_k\gamma}{b(1-h)}\prod_{n=1}^{N} \gamma_n \left(a - k_2 \sum_{n=1}^{N} \frac{v_n}{\gamma_n}\right)$$

и применяя формулы Виета, связывающие коэффициенты и корни уравнений (1.8) и (1.11), нетрудно показать, что уравнения (3.4) и (4.6) равносильны друг другу.

Таким образом, все конечные предельные точки последовательностей корней уравнений (2.8) являются корнями уравнений (3.3), т.е. принадлежат спектру S. Кроме того, из теоремы Руше следует обратное утверждение, а именно: для каждого корня p_{jk} уравнения (3.3) найдется последовательность корней k-го уравнения (2.8), сходящаяся к p_{jk} при $\varepsilon \to 0$.

Согласно результатам данного параграфа спектр S_ε собственных колебаний слоистой среды сходится по Хаусдорфу к объединению спектра S собственных колебаний усредненной среды и множества $V = \{-\xi_1, -\xi_2, \ldots, -\xi_{N+1}\}$. Это означает, в частности, что при численном поиске точек спектра S_ε в качестве начальных приближений следует брать не только точки спектра S, но и точки множества V.

5. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Возьмем $L = 0.3$ м и рассмотрим три образца слоистой среды, отличающихся друг от друга только числом слоев и величиной периода: для первого образца возьмем $M = 6$ и $\varepsilon = 0.05$ м, для второго – $M = 10$ и $\varepsilon = 0.03$ м, а для третьего – $M = 15$ и $\varepsilon = 0.02$ м. Предполагается, что для всех образцов $h = 0.2$, т.е. толщина каждого вязкоупругого и жидкого слоя равна 0.8ε и 0.2ε соответственно. Численные характеристики вязкоупругого материала и жидкости берутся следующие: $\rho_1 = 2500$ кг/м^3, $\rho_2 = 850$ кг/м^3, $\lambda = 5.5 \times 10^8$ Па, $\mu = 3.8 \times 10^8$ Па, $\eta = 15$ мПа · с, $\zeta = 24$ мПа · с, $N = 1$, $k_1 = 0$, $v_1 = 2.8 \times 10^{11}$ Па · с$^{-1}$, $\gamma_1 = 400$ с$^{-1}$.

Согласно результатам предыдущих параграфов, спектр S и множество V имеют следующий вид

Таблица 1.

	d_k, с$^{-1}$	d_{1k}, с$^{-1}$	d_{2k}, с$^{-1}$	ω_k, с$^{-1}$	ω_{1k}, с$^{-1}$	ω_{2k}, с$^{-1}$
$k = 1$	58.756	71.165	0.003	8263.0	7577.7	14137.2
$k = 2$	58.799	71.226	0.011	16529.0	15159.5	28274.3
$k = 3$	58.808	71.238	0.026	24794.4	22740.4	42411.5
$k = 4$	58.812	71.242	0.045	33059.6	30321.1	56548.7
$k = 5$	58.815	71.244	0.071	41324.7	37901.6	70685.8

$$S = \bigcup_{j=1}^{4} \{p_{jk}\}_{k=1}^{\infty}, \quad V = \{-\xi_1, -\xi_2\}, \quad p_{sk} \in \mathbf{R}, \quad \xi_s \in \mathbf{R}, \quad s = 1,2$$

где p_{jk} – корни уравнений (3.3) при $N = 1$, а ξ_1 и ξ_2 – корни квадратного уравнения

$$\xi^2 - \left(\gamma_1 + \frac{A}{b(1-h)}\right)\xi + \frac{1}{b(1-h)}\left(A\gamma_1 - \frac{2}{3}\nu_1 h\right) = 0$$

Вычисления показывают, что при $k \leq 5$ корни p_{3k} и p_{4k} являются невещественными, т.е. $p_{3k} = -d_k + i\omega_k$ и $p_{4k} = -d_k - i\omega_k$, где $\omega_k > 0$ – собственная частота колебаний усредненной среды, а $d_k > 0$ – коэффициент затухания собственного колебания с частотой ω_k. В табл. 1 приведены значения d_k и ω_k при $k \leq 5$, вычисленные с точностью до 0.001 и 0.1 с$^{-1}$ соответственно. Для сравнения в табл. 1 выписаны также значения коэффициентов затухания d_{sk} и собственных частот колебаний ω_{sk} для исходного вязкоупругого материала ($s = 1$) и жидкости ($s = 2$). При этом следует заметить, что числа $z_{sk} = -d_{sk} + i\omega_{sk}$ являются корнями уравнений

$$z_1^2 + aC_{1k} = \frac{2\nu_1 C_{1k}}{3(z_1 + \gamma_1)}, \quad z_2^2 + bC_{2k}z_2 + \gamma C_{2k} = 0, \quad C_{sk} = \frac{\pi^2 k^2}{\rho_s L^2}, \quad s = 1,2$$

Численный анализ погрешности точек спектра S и множества V, принимаемых в качестве приближенных значений точек спектра S_ε при $\varepsilon = 0.05$ м, $\varepsilon = 0.03$ м и $\varepsilon = 0.02$ м, обнаруживает, что при фиксированном $k \leq 5$ наибольшая относительная погрешность наблюдается у невещественных точек $p_{3k,4k} = -d_k \pm i\omega_k$. С практической точки зрения наибольший интерес представляет вычисление относительной погрешности d_k и ω_k, принимаемых в качестве приближенных значений коэффициентов затухания $d_k^{(M)}$ и собственных частот колебаний $\omega_k^{(M)}$ для исходной среды, состоящей из $2M$ слоев. В табл. 2 и 3 приведены значения $\omega_k^{(M)}$ и $d_k^{(M)}$, а также относительные погрешности

$$\Delta\omega_k^{(M)} = \frac{\left|\omega_k - \omega_k^{(M)}\right|}{\omega_k^{(M)}}, \quad \Delta d_k^{(M)} = \frac{\left|d_k - d_k^{(M)}\right|}{d_k^{(M)}}$$

приближенных значений d_k и ω_k.

Согласно результатам вычислений, приведенным в табл. 2 и 3, увеличение числа слоев M приводит к довольно быстрому сближению собственных частот и коэффициентов затухания для исходной и усредненной сред. В то же время при фиксированном числе слоев M увеличение числа k приводит к увеличению относительных погрешностей $\Delta\omega_k^{(M)}$ и $\Delta d_k^{(M)}$. Интересно также отметить, что

$$\omega_k^{(6)} < \omega_k^{(10)} < \omega_k^{(15)} < \omega_k, \quad d_k^{(6)} < d_k^{(10)} < d_k^{(15)} < d_k$$

т.е. при увеличении числа слоев значения $\omega_k^{(M)}$ и $d_k^{(M)}$ приближаются к их приближенным значениям ω_k и d_k слева.

Таблица 2.

	$d_k^{(6)}$, с$^{-1}$	$d_k^{(10)}$, с$^{-1}$	$d_k^{(15)}$, с$^{-1}$	$\Delta d_k^{(6)}$, %	$\Delta d_k^{(10)}$, %	$\Delta d_k^{(15)}$, %
$k = 1$	58.710	58.740	58.749	0.0784	0.0272	0.0119
$k = 2$	58.601	58.732	58.770	0.3379	0.1141	0.0493
$k = 3$	58.295	58.651	58.741	0.8800	0.2677	0.1141
$k = 4$	57.641	58.513	58.690	2.0315	0.5110	0.2079
$k = 5$	55.817	58.302	58.617	5.3711	0.8799	0.3378

Таблица 3.

	$\omega_k^{(6)}$, с$^{-1}$	$\omega_k^{(10)}$, с$^{-1}$	$\omega_k^{(15)}$, с$^{-1}$	$\Delta\omega_k^{(6)}$, %	$\Delta\omega_k^{(10)}$, %	$\Delta\omega_k^{(15)}$, %
$k = 1$	8262.1	8262.7	8262.8	0.0109	0.0036	0.0024
$k = 2$	16521.3	16526.4	16527.9	0.0466	0.0157	0.0067
$k = 3$	24764.7	24785.2	24790.5	0.1199	0.0371	0.0157
$k = 4$	32969.4	33036.4	33050.1	0.2736	0.0702	0.0287
$k = 5$	41033.2	41275.2	41305.5	0.7104	0.1199	0.0465

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что спектр одномерных собственных колебаний, распространяющихся перпендикулярно периодически чередующимся слоям изотропного вязкоупругого материала и вязкой сжимаемой жидкости, представляет собой объединение корней трансцендентных уравнений. Число этих уравнений равно числу вязкоупругих (или, то же самое, жидких) слоев, входящих в данный образец слоистой среды. В качестве начальных приближений к корням трансцендентных уравнений предложено использовать корни дробно-рациональных уравнений, объединение которых образует спектр одномерных собственных колебаний усредненной среды, соответствующей исходной слоистой среде. Показано, что в качестве начальных приближений следует брать также точки, в которых знаменатели дробей, входящих в дробно-рациональные уравнения, обращаются в нуль. Доказано, что выбранные начальные приближения тем точнее, чем большее число слоев входит в рассматриваемый образец слоистой среды.

В качестве примера практического применения полученных результатов вычислены собственные частоты колебаний и коэффициенты затухания для трех образцов слоистой среды, отличающихся только числом и толщиной их слоев, а также для соответствующей им усредненной среды. При вычислении указанных характеристик были использованы невещественные точки спектров исходной и усредненной сред. Численно исследовано также влияние числа слоев на степень близости собственных частот колебаний и коэффициентов затухания для слоистой и усредненной сред.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10343).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Инерционные и диссипативные свойства пористой среды, заполненной вязкой жидкостью // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 1. С. 109–119.
2. *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* О спектре собственных колебаний в среде из слоев упругого материала и вязкой жидкости // Докл. РАН. 2013. Т. 448. № 1. С. 43–46.
3. *Жиков В.В.* Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости // Мат. сб. 2000. Т. 191. № 7. С. 31–72.
4. *Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во МГУ, 1990. 311 с.
5. *Космодемьянский Д.А., Шамаев А.С.* Спектральные свойства некоторых задач механики сильно неоднородных сред // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 6. С. 75–114.

6. *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Асимптотическое поведение спектра одномерных колебаний в среде из слоев упругого материала и вязкоупругого материала Кельвина-Фойгта // Тр. МИАН. 2016. Т. 295. С. 218–228.
7. *Shamaev A.S., Shumilova V.V.* Calculation of natural frequencies and damping coefficients of a multi-layered composite using homogenization theory // IFAC PapersOnLine. V. 51. № 2. P. 126–131.
8. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
9. *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* О спектре одномерных колебаний композита, состоящего из слоев упругого и вязкоупругого материалов // Сиб. журн. индустр. матем. 2012. Т. 15. № 4. С. 124–134.
10. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
11. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
12. *Шамаев А.С., Шумилова В.В.* Усреднение уравнений акустики для пористого вязкоупругого материала с долговременной памятью, заполненного вязкой жидкостью // Диф. уравнения. 2012. Т. 48. № 8. С. 1174–1186.
13. *Шумилова В.В.* Спектральный анализ одного класса интегро-дифференциальных уравнений теории вязкоупругости // Проблемы мат. анализа. 2013. Т. 73. С. 167–172.
14. *Власов В.В., Ву Дж., Кабирова Г.Р.* Корректная разрешимость и спектральные свойства абстрактных гиперболических уравнений с последействием // Совр. матем. Фундам. направления. 2010. Т. 35. С. 44–59.