ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2019, № 6, с. 141–144

УДК 533.95

СЛАБЫЕ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В ЗАРЯЖЕННОМ ГАЗЕ

© 2019 г. А. Н. Голубятников[a,*], С. Д. Ковалевская[a]

[a]*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

* *E-mail: golubiat@mail.ru*

Поступила в редакцию 01.07.2019 г.
После доработки 08.07.2019 г.
Принята к публикации 08.07.2019 г.

В рамках идеальной электрогидродинамики рассматривается вопрос о распространении плоских разрывов относительно малой амплитуды в слое неоднородно заряженного газа в переменном электрическом поле и постоянном поле силы тяжести. Выведены транспортные уравнения для амплитуд, имеющие вариационную природу, и дано точное решение задачи о слабом разрыве, в приближении к которому затем решается задача о слабой ударной волне. Рассмотрены примеры распространения волны по произвольному равновесному начальному состоянию, а также по твердотельно движущемуся слою газа в переменном внешнем поле.

Ключевые слова: электрогидродинамика, гравитационное поле, ударная волна, слабый разрыв, транспортное уравнение

DOI: 10.1134/S0568528119060045

Можно предложить общую теорию распространения разрывов малой амплитуды на заданном фоне. История вопроса, связанная первоначально с выяснением асимптотических законов затухания ударных волн (плоских, цилиндрических или сферических), построением решений со слабыми разрывами с выводом так называемых “транспортных уравнений” и методами приближенного построения сильных разрывов малой амплитуды, дана в [1], где приведен обзор и развит общий подход к решению задач о распространении слабых разрывов по известному фону для систем гиперболических уравнений второго порядка, допускающих вариационную формулировку. Слабая ударная волна рассматривается как приближение к решению, содержащему слабый разрыв. В одномерых задачах с одной неизвестной функцией метод позволяет полностью проинтегрировать транспортное уравнение при любом известном фоне.

Даный метод применим к описанию различных адиабатических процессов механики сплошной среды при наличии переменных силовых полей. В частности, в [1] также решен ряд задач распространения нелинейных волн по неоднородному состоянию равновесия звезд, равновесному состоянию и однородному нестационарному течению мелкой воды, а также исследован вопрос в рамках одномерной релятивистской газовой динамики, где данный подход особенно полезен из-за невыделенности в лагранжиане кинетической энергии газа. В случае прямолинейного фронта такого рода течения магнитной жидкости в рамках осредненной теории мелкой воды исследованы в [2].

Наличие лагранжиана позволяет, благодаря сокращению значительного числа членов эффективно вывести, решить в квадратурах и частично проинтегрировать все возникающие уравнения для коэффициентов разложения решения в ряд Тейлора по степеням специальной временнóй переменной τ, равной нулю на поверхности разрыва. В случае невырожденного слабого разрыва на первом этапе решается обыкновенное дифференциальное уравнение Риккати (первое транспортное уравнение), определяющее скачок ускорения среды. Оно сводится к линейному, остальные уравнения для коэффициентов ряда – также линейны. Таким образом, решение последовательно представляется в квадратурах.

Ниже на основании указаной лагранжевой формулировки решается задача о распространении разрыва малой амплитуды с плоским фронтом, создаваемого поршнем, по известному фону при наличии вмороженного удельного заряда и переменного электрического поля в рамках приближения идеальной электрогидродинамики [3]. Отметим также работу [4], где построено одно точное решение такой задачи.

1. УРАВНЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИКИ

Уравнения одномерного движения идеального газа в случае быстро протекающих процессов, когда можно пренебречь относительной подвижностью зарядов, сводятся к состоянию с вмороженным удельным зарядом $q(m)$, связанном с продольным электрическим полем E соотношением [3]

$$E_m = 4\pi q, \quad E = E_0(t) + 4\pi\int_0^m q dm \tag{1.1}$$

где m – массовая лагранжева переменная. Нижний индекс m означает частную производную по массе, далее аналогично.

Уравнения адиабатического движения совершенного газа для закона движения $x(m,t)$ и давления p в поле силы тяжести g имеют вид

$$x_{tt} + p_m + g = qE, \quad px_m^\gamma = f(m) \tag{1.2}$$

где $\gamma > 1$ – показатель адиабаты, x_m – удельный объем и $f(m)$ – энтропийная функция. Приведем сразу необходимые далее решения уравнений (1.1), (1.2).

1) Статическое состояние: $x = x_0(m)$

$$p = f(m)(x_0')^{-\gamma} = p_0 - gm + E^2/(8\pi) \tag{1.3}$$

где p_0 и E_0 – постоянны, $f(m)$ вычисляется. Имеются две произвольные функции x_0 и q от m. Давление p может обращаться в нуль за счет действия силы тяжести и электрического поля при конечной массе слоя, тогда поле E_0 непрерывно продолжается в пустоту.

2) Твердотельное движение при постоянном в слое распределении удельного заряда q_0 в переменном внешнем электрическом поле $E_0(t)$

$$x = x_0(m) + a(t), \quad \ddot{a} = q_0 E_0(t), \quad p = f(m)(x_0')^{-\gamma} = p_0 - gm + 2\pi q_0^2 m^2 \tag{1.4}$$

Здесь произвольными функциями можно считать $x_0(m)$ и $a(t)$. В принципе, часть силы тяжести g можно отнести к E_0.

Уравнения (1.2) допускают вариационную формулировку вида $\Lambda_x - (\Lambda_{x_t})_t - (\Lambda_{x_m})_m = 0$ с лагранжианом

$$\Lambda = \frac{x_t^2}{2} - \frac{f(m)x_m^{1-\gamma}}{\gamma - 1} - (g - qE)x \tag{1.5}$$

2. РАЗРЫВЫ МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ

Условия на сильных разрывах (разрывах первых производных закона движения $x(m,t)$) при отсутствии сосредоточенных притоков массы, импульса или энергии следуют из вида Λ. Пусть $t = T(m)$ – время движения разрыва по массе, $T(0) = 0$. Введем "ударное" время $\tau = t - T(m)$, равное нулю на разрыве. Тогда в переменных τ, m имеем

$$x_t = x_\tau \equiv v, \quad x_m(m,t) = x_m(m,\tau) - T'(m)x_\tau \equiv w - T'v$$

с лагранжианом

$$\Lambda(T, m, e, x, v, w) = \frac{v^2}{2} - \frac{f(m)(w - T'v)^{1-\gamma}}{\gamma - 1} - (g - qE)x \tag{2.1}$$

Отметим, что в этих переменных дифференцирование по m на разрыве сохраняет непрерывность дифференцируемой функции. На сильном разрыве имеем просто сохранение импульса и энергии

$$[\Lambda_v] = 0, \quad [v\Lambda_v - \Lambda] = 0 \tag{2.2}$$

Закон движения, распределения заряда и поля считаются непрерывными.

Функция $T(m)$ на сильном разрыве также является искомой. В случае слабого разрыва, который всегда распространяется с характеристической скоростью, движение разрыва по заданному фону известно. В этом случае имеют место разрывы вторых или более высоких призводных функции $x(m,t)$, величины которых определяются уравнениями движения и их дифференциальными продолжениями (транспортными уравнениями).

Рассмотрим класс решений уравнения (1.2) со слабым разрывом, создаваемом аналитическим относительным движением поршня вида

$$x_p(t) = x_0(0,t) + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2/2 + \alpha_3 t^3/6 + \dots$$

при $\alpha_1 = 0$. Разрыв движется по известному, вообще говоря, нестационарному фону $x_0(m,t)$, отвечающему некоторому частному решению уравнения (1.2).

Используем общий метод решения вариационных задач со слабыми разрывами, движущимися по произвольному фону [1]. Лагранжева форма уравнений приводит к значительным упрощениям. Здесь мы изложим результаты одномерной теории.

Определение скорости звука фона $1/T_0'$ есть $\Lambda_{vv} = 0$. Предполагается, что $\Lambda_{vw} > 0$ и $\Lambda_{vvv} < 0$ (нормальный газ [5]). Пусть $\alpha_2 \neq 0$. Тогда решение первого транспортного уравнения определяет скачок ускорения жидкости на разрыве

$$[v_\tau] = (IJ)^{-1}, \quad I = (\Lambda_{vw}^0)^{1/2} \exp \int_0^m \frac{(\Lambda_{vv})_\tau^0 dm}{\Lambda_{vw}^0}, \quad J = C_2 + \int_0^m \frac{\Lambda_{vvv}^0}{2I\Lambda_{vw}^0} dm. \tag{2.3}$$

Нулем здесь отмечено состояние фона.

Отметим, что величина скачка ускорения порядка единицы, хотя скачок скорости точно равен нулю. Все последующие члены разложения скачка закона движения по степеням τ определяются линейными уравнениями в квадратурах.

Постоянная C_2 связана со значением начального ускорения поршня α_2 и состоянием фона. Если $\alpha_2 < 0$, то скачок ускорения всегда отрицателен. Если же $\alpha_2 > 0$, то имеется возможность ухода скачка ускорения в бесконечность за конечное время (опрокидывание слабого разрыва). Важно, что полученная формула (2.3) не содержит явно электрического поля и заряда, которые входят только через производные v_0 и w_0 закона движения фона.

Случаю $\alpha_2 = 0$ отвечает особое решение уравнения Риккати с нулевым скачком ускорения среды на разрыве $[v_\tau] = 0$. Тогда при $\alpha_3 \neq 0$ имеем $[v_{\tau\tau}] = C_3/I$ и т.д.

Пусть теперь имеется малая по отношению к скорости звука фона относительная начальная скорость поршня $\alpha_1 > 0$, которая создает слабую ударную волну. Тогда, линеаризуя условия на разрыве (2.2), найдем поправку к величине T_0', отвечающей скорости ударной волны [5],

$$\delta T' = -\frac{\Lambda_{vvv}^0}{2\Lambda_{vvT}^0}[v] \tag{2.4}$$

Затем, линеаризуя уравнение движения относительно малого приращения скорости $[v]$ вдоль разрыва, решая соответствующее линейное дифференциальное уравнение и используя (2.3), получим

$$[v] = C_1(\Lambda_{vw}^0)^{-1/4}(I|J|)^{-1/2} \tag{2.5}$$

Постоянная C_1 выражается через величину α_1.

Формула (2.5) показывает, что при положительном C_2 вместе с опрокидыванием слабого разрыва, когда $v_\tau \to \infty$, скорость v также неограниченно растет при любом $C_1 > 0$, что говорит о том, что ударная волна становится сильной, и данная теория требует существенной корректировки.

3. ДВИЖЕНИЕ РАЗРЫВА ПО СТАТИЧЕСКОМУ ФОНУ

Рассмотрим движение разрыва малой амплитуды по статическому фону (1.3), где скорость $v_0 = 0$ и w – удельный объем. Тогда в формулах (2.3), (2.5) можно опустить производную от фона по τ. Удобно также перейти к эйлеровой переменной x, учитывая соотношение $dm = dx/w$.

Вычисление производных лагранжиана (2.1) при $v = 0$ (индекс 0 опускаем) дает

$$\Lambda_{vw} = \gamma f T'/w^{\gamma+1}, \quad \Lambda_{vvv} = -\gamma(\gamma+1)f(T')^3/w^{\gamma+2}, \quad T' = (w^{\gamma+1}/(\gamma f))^{1/2} \tag{3.1}$$

$$I = \Lambda_{vw}^{1/2} = (T')^{-1/2}, \quad J = C_2 - \frac{\gamma+1}{2}\int_{x_p}^{x_c} \frac{(T')^{5/2}dx}{w^2} \tag{3.2}$$

Отметим, что обычная скорость звука $c = w/T'$. Тогда для ускорения жидкости на слабом разрыве получим

$$v_\tau = (w/c)^{1/2}\left(C_2 - \frac{\gamma+1}{2}\int\limits_{x_p}^{x_c}\frac{w^{1/2}dx}{c^{5/2}}\right)^{-1} \quad (3.3)$$

а для скорости на слабой ударной волне –

$$v = C_1(w/c)^{1/2}\left|C_2 - \frac{\gamma+1}{2}\int\limits_{x_p}^{x_c}\frac{w^{1/2}dx}{c^{5/2}}\right|^{-1/2} \quad (3.4)$$

В этих формулах $x_p(t)$ – закон движения поршня, а $x_c(t)$ – закон движения характеристики, $\dot{x}_c = c(x)$, причем $\dot{x}_p < v \ll c$. Квадрат скорости звука, выраженный через давление (1.3), есть

$$c^2 = \gamma wp = \gamma w(p_0 - gm + E^2(m)/(8\pi)), \quad m_x = 1/w \quad (3.5)$$

Анализ этих формул показывает, что также может возникать особенность, связанная с обращением в ноль плотности массы $1/w$ при выходе разрыва на границу слоя. Отметим, что в формулы (3.3), (3.4) входит весь закон движения поршня $x_p(t)$. На фоне, когда w и c постоянны, эти формулы дают известный в газовой динамике закон затухания ударной волны $v \sim x^{-1/2}$ при торможении поршня [5].

4. ВОЛНА НА ДВИЖУЩЕМСЯ ФОНЕ

Рассматривается движение разрыва малой амплитуды по неоднородному слою газа, движущемуся как твердое тело (1.4). Основными эффектами здесь будут снос разрыва за счет скорости и ускорения движения фона $v = \dot{a}(t)$, $v_\tau = \ddot{a}(t)$ и изменение его удельного объема $x_0'(m) = w - T'v$. В силу формул (1.4) получаем уравнение для времени движения разрыва по массе $t = T(m)$

$$T' = (x_0'/(\gamma p))^{1/2} \quad (4.1)$$

которое интегрируется в виде квадратуры $T(m)$.

Далее вычислим величины Λ_{vw} и Λ_{vvv}, которые аналогичны формулам (3.1) с заменой w на x_0'. Производная $(\Lambda_{vv})_\tau = 0$. Таким образом, имеем

$$I = (T')^{-1/2}, \quad J = C_2 - \frac{\gamma+1}{2}\int\limits_0^m \frac{(T')^{5/2}}{x_0'}dm \quad (4.2)$$

Окончательные формулы для скачков ускорения $[v_\tau] = (IJ)^{-1}$ и скорости $[v] = I^{-1}|J|^{-1/2}$ исследуются на основании формул (4.1), (4.2). Опрокидывание разрыва наступает, когда $C_2 > 0$. Вторая особенность возможна, когда волна доходит до границы тела, где $p = 0$, и $T' \to \infty$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках модели идеальной электрогидродинамики совершенного газа дано решение задачи о распространении плоских волн малой амплитуды по произвольному известному фону. Получены и исследованы в виде квадратур формулы для амплитуд слабого разрыва и слабой ударной волны. Рассмотрены примеры распространения волны по равновесному начальному состоянию, а также по состоянию твердотельного движения. Каждый из примеров содержит по две произвольные функции. Результаты могут быть использованы для исследования усиления нелинейных звуковых и ударных волн, распространяющихся в заряженной атмосфере.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00037).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубятников А.Н.* Разрывы малой амплитуды решений уравнений механики сплошной среды // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 2018. Т. 300. С. 65–75.
2. *Golubiatnikov A.N.* Non-linear waves in a thin layer of magnetic fluid // Magnetohydrodynamics. 2018. V. 54. № 1–2. P. 23–26.
3. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1994. Т. 1. 528 с.
4. *Голубятников А.Н., Ковалевская С.Д.* О прохождении ударной волны сквозь слой заряженного газа // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 3. С. 108–111.
5. *Черный Г.Г.* Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.