ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2019, № 5, с. 6–14

УДК 532.5.013.2

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В ПЛАСТЕ С ТРЕЩИНОЙ ГИДРОРАЗРЫВА

© 2019 г. И. Л. Хабибуллин[a,*], А. А. Хисамов[a,**]

[a] *Башкирский государственный университет, Уфа, Россия*

**E-mail: habibi.bsu@mail.ru*

***E-mail: khisamovartur@list.ru*

Поступила в редакцию 12.07.2018 г.
После доработки 04.03.2019 г.
Принята к публикации 05.03.2019 г.

В настоящее время для интенсификации нефтегазодобычи из коллекторов с трудноизвлекаемыми запасами широко используются технологии гидроразрыва пластов. Моделирование процессов фильтрации в пластах с трещинами гидроразрыва достаточно полно развито в приближении стационарной фильтрации. Нестационарные процессы распределения давления рассмотрены применительно к теории гидродинамических методов исследований скважин, в которой рассматриваются асимптотически ограниченные интервалы изменения координат и времени (расстояния порядка радиуса скважины и времена, намного меньшие, чем характерное время процесса фильтрации). В то же время в коллекторах с трудно извлекаемыми запасами (малые проницаемости пласта и высоковязкие нефти) продолжительность нестационарных процессов распределения давления может быть одного порядка с характерным временем фильтрации в пласте. В данной работе представлены новые аналитические решения задачи о нестационарном распределении давления вокруг скважины, пересеченной вертикальной трещиной. Научная новизна работы заключается в том, что в модели учитывается сжимаемость жидкости в трещине и фильтрация жидкости не только в трещине, но и в пласте. Решения задач построены методом преобразований Лапласа. В частных случаях из полученных решений следуют известные в литературе выражения. Проведен анализ полученных аналитических решений, позволяющий определить основные характерные особенности рассматриваемых процессов фильтрации.

Ключевые слова: вертикальная трещина гидроразрыва, нестационарная фильтрация, билинейный режим, преобразование Лапласа, распределение давления, дебит скважины

DOI: 10.1134/S0568528119050050

Создание в пласте вертикальных трещин, пересекающихся со скважинами, является одним из эффективных методов интенсификации добычи нефти и газа из малопроницаемых коллекторов. Гидродинамическая связь пласта и скважины, как правило, реализуется только через трещину гидроразрыва. В зависимости от соотношений проницаемостей пласта и трещины, соотношений длины трещины и характерного размера пласта меняются геометрия и интенсивность фильтрационного потока в системе пласт-трещина-скважина. Модели таких фильтрационных потоков достаточно полно развиты в приближении стационарной фильтрации [1]. Нестационарные аналитические модели рассматриваются в основном применительно к задачам гидродинамического исследования скважин и пластов, в которых определяются зависимости от времени дебита скважины или давления на забое скважины [1–3], распределения давления в трещине и в пласте не рассматриваются. В работе [4] рассмотрен упругий режим фильтрации в трещине, но фильтрация в пласте также не рассматривается.

В то же время в коллекторах с трудноизвлекаемыми запасами, за счет малой проницаемости пласта и большой вязкости нефти, продолжительность нестационарных процессов распределения давления может быть одного порядка с характерным временем процесса фильтрации [5]. Поэтому актуальным является исследование нестационарных моделей фильтрации в системе пласт-трещина с точки зрения развития общей теории этих процессов [1, 4, 6], а также для развития методов гидродинамических исследований пластов [7], методов оценки дебита скважин с трещиной гидроразрыва [8].

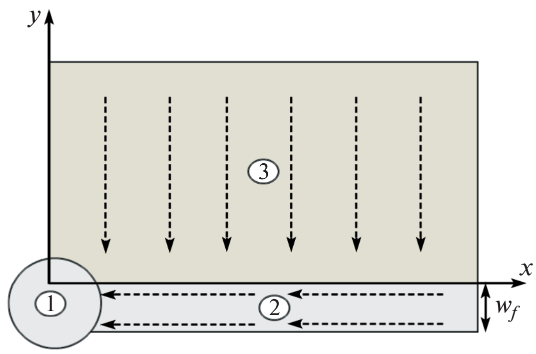

Рис. 1. Схема области течения: *1* – скважина, *2* – трещина, *3* – пласт

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В пласте, насыщенном малосжимаемой однородной жидкостью, имеется скважина, которая пересекается симметричной вертикальной трещиной гидроразрыва по всей толщине пласта. Гидравлическая связь пласта и скважины реализуется только через боковую поверхность трещины, так как ширина (раскрытие) трещины намного меньше, чем ее длина. Предполагается, что вначале давление в пласте и трещине одинаково и при $t = 0$ скважина запускается в эксплуатацию. Тогда вокруг скважины в трещине и в пласте создается нестационарный фильтрационный поток. С учетом симметрии геометрии задачи относительно скважины и трещины рассматривается одна четвертая часть области фильтрации (рис. 1).

Поскольку ширина трещины намного меньше, чем длина, поток в трещине считается одномерным, направленным по оси x. Поток в пласте направлен по оси y, перпендикулярно к боковой поверхности трещины. Тогда приведенная на рис. 1 схема соответствует так называемому билинейному режиму течения, который представляет собой совокупность одновременно существующих в трещине и в пласте двух линейных взаимно-перпендикулярных потоков [1–3, 6, 9].

Распределения давления в пласте и трещине описываются уравнениями

$$\frac{\partial P_r}{\partial t} = \varkappa_r \frac{\partial^2 P_r}{\partial y^2} \quad 0 \le x \le \infty, \quad 0 \le y \le \infty \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = \varkappa_f \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} + \frac{\varkappa_f}{w_f}\frac{k_r}{k_f}\left.\frac{\partial P_r}{\partial y}\right|_{y=0} \quad 0 \le x \le \infty, \quad -w_f \le y \le 0 \tag{1.2}$$

Здесь P – давление, x и y – координаты, t – время, индексы r и f относятся к пласту и трещине, $\varkappa$ – коэффициент пьезопроводности, k – проницаемость, w_f – полуширина трещины.

Начальное распределение давления

$$P_r(x, y, t = 0) = P_f(x, t = 0) = P_0.$$

На поверхности трещины (линия раздела пласт-трещина) выполняется условие равенства давлений:

$$P_r(x, y = 0, t) = P_f(x, y = 0, t). \tag{1.3}$$

Условия на непроницаемых границах имеют вид

$$\frac{\partial P_r(x, y = \infty, t)}{\partial y} = 0 \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial P_f(x = \infty, y, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial P_f(x, y = -w_f, 0)}{\partial y} = 0. \tag{1.5}$$

На поверхности пересечения трещины со скважиной выполняется условие, констатирующее работу скважины в режиме заданного давления P_c или заданного дебита Q

$$P_f(x = 0, t) = P_c, \tag{1.6}$$

$$\frac{k_f h_r w_f}{\mu} \frac{\partial P_f(x=0,t)}{\partial x} = Q. \qquad (1.7)$$

Здесь μ — вязкость жидкости, Q — часть дебита, поступающего в скважину из рассматриваемой области фильтрации, x_f — полудлина трещины, h_r — толщина пласта.

Соответственно имеют место первая ((1.1)–(1.6)) или вторая краевые задачи ((1.1)–(1.5), (1.7)). В безразмерных переменных

$$\bar{P}_r = \frac{P_r - P_0}{P^*}, \quad \bar{P}_f = \frac{P_f - P_0}{P^*}, \quad P_1^* = P_c - P_0, \quad P_2^* = \frac{Q\mu}{k_r h_r}, \quad \bar{y} = \frac{y}{x_f}, \quad \bar{x} = \frac{x}{x_f}, \quad \bar{t} = t\frac{\varkappa_r}{x_f^2}$$

эти задачи имеют вид

$$\frac{\partial \bar{P}_r}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 \bar{P}_r}{\partial \bar{y}^2} \qquad (1.8)$$

$$\frac{\partial \bar{P}_f}{\partial \bar{t}} = a\frac{\partial^2 \bar{P}_f}{\partial \bar{x}^2} + b\left.\frac{\partial \bar{P}_r}{\partial \bar{y}}\right|_{\bar{y}=0} \qquad (1.9)$$

$$\bar{P}_r(\bar{x},\bar{y},\bar{t}=0) = \bar{P}_f(\bar{x},\bar{t}=0) = 0 \qquad (1.10)$$

$$\bar{P}_r(\bar{x},\bar{y}=0,\bar{t}) = \bar{P}_f(\bar{x},\bar{t}) \qquad (1.11)$$

$$\bar{P}_f(\bar{x}=0,\bar{t}) = 1 \qquad (1.12)$$

$$\frac{\partial \bar{P}_f(\bar{x}=0,\bar{t})}{\partial \bar{x}} = \frac{b}{a} \qquad (1.13)$$

$$\bar{P}_i(\bar{x}\to\infty,\bar{y}\to\infty,\bar{t}) = 0 \quad (i=r,f). \qquad (1.14)$$

Здесь $a = \varkappa_f/\varkappa_r$, $b = a(k_r/k_f)(x_f/w_f)$, величина a/b совпадает с безразмерной проводимостью трещины, впервые введенной в [2] и широко используемой в литературе. Величины P_1^* и P_2^* относятся соответственно к первой и второй краевым задачам. Приведенная выше модель является инвариантной относительно изменения знаков дебита скважины и депрессии на пласт. Поэтому она позволяет исследовать как процесс отбора жидкости из пласта через трещину и скважину, так и процесс закачки жидкости в пласт через скважину с трещиной гидроразрыва.

Решение первой краевой задачи подробно рассмотрено в [10], поэтому мы здесь приведем только окончательный вид решения. В этой работе получено два вида решения. Первое решение имеет вид

$$\bar{P}_f(\bar{x},\bar{t}) = 1 - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp(-\rho\bar{t} - f_1(\rho)\bar{x})\sin[f_2(\rho)\bar{x}]\frac{d\rho}{\rho} \qquad (1.15)$$

$$\bar{P}_r(\bar{x},\bar{y},\bar{t}) = 1 - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp(-\rho\bar{t} - f_1(\rho)\bar{x})\sin[f_2(\rho)\bar{x} + \rho\sqrt{\bar{y}}]\frac{d\rho}{\rho} \qquad (1.16)$$

$$f_1(\rho) = \left[\frac{\sqrt{\rho^2 + b^2\rho} - \rho}{2a}\right]^{1/2}, \quad f_2(\rho) = \left[\frac{\sqrt{\rho^2 + b^2\rho} + \rho}{2a}\right]^{1/2}$$

Другой вид решения выражается формулами

$$\bar{P}_f(\bar{x},\bar{t}) = \frac{\bar{x}}{\sqrt{\pi a\bar{t}}}\int_0^1 \exp\left(-\frac{\bar{x}^2}{4a\bar{t}\rho^2}\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{\rho^2 b\sqrt{\bar{t}}}{2\sqrt{1-\rho^2}}\right)\frac{d\rho}{\rho^2} \qquad (1.17)$$

$$\bar{P}_r(\bar{x},\bar{y},\bar{t}) = \frac{\bar{x}}{\sqrt{\pi a\bar{t}}}\int_0^1 \exp\left(-\frac{\bar{x}^2}{4a\bar{t}\rho^2}\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{\bar{y} + \rho^2 b\bar{t}}{2\sqrt{\bar{t}(1-\rho^2)}}\right)\frac{d\rho}{\rho^2} \qquad (1.18)$$

Здесь erfc(ξ) — дополнительная функция ошибок:

$$\operatorname{erfc}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\xi}^{\infty}\exp(-u^2)du.$$

Выражения (1.17), (1.18) должны быть тождественны (1.15), (1.16), так как они представляют решения одной и той же задачи, построенные методом преобразования Лапласа, но переход от изображений к оригиналу реализован разными методами. При получении выражений (1.15) и (1.16) использована теорема Меллина, а (1.17) и (1.18) получены, используя общие правила преобразования Лапласа.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Решение второй краевой задачи построим методом преобразования Лапласа по переменной t (L — символ преобразования Лапласа)

$$L[\overline{P}(\overline{x},\overline{y},\overline{t})] = \overline{\overline{P}}(\overline{x},\overline{y},\mathrm{s}) = \int_0^{\infty}\overline{P}(\overline{x},\overline{y},\overline{t})\exp(-s\overline{t})d\overline{t}$$

в изображениях преобразования Лапласа задача (1.8)–(1.14) имеет вид

$$\frac{d^2\overline{\overline{P}}_r}{dy^2} = s\overline{\overline{P}}_r \tag{2.1}$$

$$\frac{d^2\overline{\overline{P}}_f}{dx^2} - \frac{s}{a}\overline{\overline{P}}_f + \frac{b}{a}\left.\frac{d\overline{\overline{P}}_r}{dy}\right|_{y=0} = 0 \tag{2.2}$$

$$\overline{\overline{P}}_r(x, y = 0, s) = \overline{\overline{P}}_f(x,s) \tag{2.3}$$

$$\frac{d\overline{\overline{P}}_f(0,s)}{dx} = \frac{b}{a}\frac{1}{s} \tag{2.4}$$

$$\overline{\overline{P}}_i(x \to \infty, y \to \infty) = 0 \quad (i = r, f). \tag{2.5}$$

Таким образом, в пространстве изображений Лапласа получается система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\overline{\overline{P}}_f$ и $\overline{\overline{P}}_r$.

Решение этой системы находится стандартными методами и представляется в следующем виде

$$\overline{\overline{P}}_f(\overline{x},s) = -\frac{b}{a}\frac{\exp(-\overline{x}\cdot\delta)}{s\delta} \tag{2.6}$$

$$\overline{\overline{P}}_r(\overline{x},\overline{y},s) = -\frac{b}{a}\frac{\exp(-\overline{x}\cdot\delta - \overline{y}\sqrt{s})}{s\delta} \tag{2.7}$$

$$\delta \equiv \left[\frac{s}{a} + \frac{b}{a}\sqrt{s}\right]^{1/2}$$

Окончательные решения задач получаются посредством перехода в выражениях (2.6), (2.7) к оригиналам.

Для удобства нахождения оригинала выражение (2.6) представим в виде

$$\overline{\overline{P}}_f(\overline{x},s) = -\frac{1}{\sqrt{ab}\sqrt{s}}L[V(\overline{x},\overline{t})], \qquad L[V(\overline{x},\overline{t})] = \frac{b}{\sqrt{sa}}\frac{\exp(-\overline{x}\delta)}{\delta}. \tag{2.8}$$

Используя теорему о свертке и формулу обращения преобразования Лапласа [11] (L^{-1} — символ обратного преобразования Лапласа)

$$L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

из (2.8) имеем

$$\overline{P}_f(\overline{x},\overline{t}) = -\frac{1}{\sqrt{ab}}\int_0^{\overline{t}} \frac{1}{\sqrt{\pi(\overline{t}-\tau)}} V(\overline{x},\tau)\,d\tau .$$

Таким образом, необходимо найти $V(\overline{x},\overline{t})$.

Используя теорему подобия [12] ко второму выражению (2.8), находим

$$L[V(\overline{x},b^2\overline{t})] = \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{\exp\left[-\frac{b\overline{x}}{\sqrt{a}}(s+\sqrt{s})^{1/2}\right]}{\sqrt{s+\sqrt{s}}}. \tag{2.9}$$

Для нахождения $V(\overline{x},\overline{t})$, в (2.9) используем следующее правило операционного исчисления [12]

$$L^{-1}\left[\frac{g(s+\sqrt{s})}{\sqrt{s}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\overline{t}} \frac{1}{\sqrt{\overline{t}-u}} \exp\left(-\frac{u^2}{4(\overline{t}-u)}\right) f(u)\,du, \qquad f(u) = L^{-1}[g(s)].$$

Тогда

$$V(\overline{x},b^2\overline{t}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{b^2\overline{t}} \exp\left(-\frac{u^2}{4(b^2\tau-u)} - \frac{b^2x^2}{4au}\right)\frac{du}{\sqrt{b^2\tau-u}\sqrt{u}}.$$

С учетом этого выражения, (2.9) можно представить в виде

$$\overline{P}_f(\overline{x},\overline{t}) = -\frac{1}{\sqrt{ab}\pi\sqrt{\pi}}\int_0^{\overline{t}} \frac{1}{\sqrt{\overline{t}-\tau}}\int_0^{b^2\tau} \exp\left(-\frac{u^2}{4(b^2\tau-u)} - \frac{b^2\overline{x}^2}{4au}\right)\frac{du\,d\tau}{\sqrt{b^2\tau-u}\sqrt{u}}.$$

Изменяя здесь порядок интегрирования и вычисляя внутренний интеграл

$$\int_{u/b^2}^{\overline{t}} \frac{1}{\sqrt{(b^2\tau-u)(\overline{t}-\tau)}} \exp\left(-\frac{u^2}{4(b^2\tau-u)}\right)d\tau = \frac{\pi}{b}\operatorname{erfc}\left(\frac{u}{2\sqrt{b^2\overline{t}-u}}\right),$$

в итоге получаем выражение для распределения давления в трещине:

$$\overline{P}_f(\overline{x},\overline{t}) = -\frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{\pi}}\int_0^{b^2\overline{t}} \exp\left(-\frac{b^2\overline{x}^2}{4au}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{u}{2\sqrt{b^2\overline{t}-u}}\right)\frac{du}{\sqrt{u}}. \tag{2.10}$$

В (2.10), для удобства численных расчетов, произведем замену переменной интегрирования u на $\rho^2 b^2\overline{t}$. Тогда имеем

$$\overline{P}_f(\overline{x},\overline{t}) = -\frac{2b\sqrt{\overline{t}}}{\sqrt{a}\sqrt{\pi}}\int_0^1 \exp\left(-\frac{\overline{x}^2}{4a\overline{t}\rho^2}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{\rho^2 b\sqrt{\overline{t}}}{2\sqrt{(1-\rho^2)}}\right)d\rho. \tag{2.11}$$

Выполняя аналогичные операции, из (2.7) получаем выражение для распределения давления в пласте

$$\overline{P}_r(\overline{x},\overline{y},\overline{t},) = -\frac{2b\sqrt{\overline{t}}}{\sqrt{a}\sqrt{\pi}}\int_0^1 \exp\left(-\frac{\overline{x}^2}{4a\overline{t}\rho^2}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{\rho^2 b\overline{t}+\overline{y}}{2\sqrt{\overline{t}(1-\rho^2)}}\right)d\rho. \tag{2.12}$$

3. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ

Полагая в (2.12) $\overline{x} = 0$, находим давление на забое скважины

$$\overline{P}_f(\overline{x}=0,\overline{t}) = -\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\int_0^{b^2\overline{t}} \operatorname{erfc}\left(\frac{u}{2\sqrt{b^2\overline{t}-u}}\right)\frac{du}{\sqrt{u}}. \tag{3.1}$$

Асимптотическое представление этой формулы, соответствующее большим значениям времени, является одним из основных теоретических выражений, используемых при гидродинамическом исследовании скважин с трещиной гидроразрыва. А именно, это выражение определяет характерную для билинейного режима фильтрации зависимость давления на забое скважины от времени в степени 1/4, и представляет теоретическую формулу для оценки проводимости трещины [2].

В работе [2] отмечается, что ввиду сложности получение соответствующей асимптотики для больших времен из (3.1) является затруднительным. Поэтому эта асимптотика определяется в пространстве изображений Лапласа из выражения (2.6) при $x = 0$ и малых s (больших t) и последующим переходом от изображения к оригиналу.

Покажем, как можно получить асимптотику (3.1) для больших времен. Для этого случая ($b^2 t \to \infty$) выражение (3.1) представим в виде

$$\overline{P}_f(\overline{x} = 0, \overline{t}) \approx -\frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_0^\infty \operatorname{erfc}\left(\frac{u}{2b\sqrt{\overline{t}}}\right) \frac{du}{\sqrt{u}}. \qquad (3.2)$$

Используя подстановку $u/2b\sqrt{\overline{t}} = z$, получаем

$$\overline{P}_f(\overline{x} = 0, \overline{t}) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{b}{a}} (\overline{t})^{\frac{1}{4}} \int_0^\infty \operatorname{erfc}(z) \frac{dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{b}{a}} (\overline{t})^{\frac{1}{4}} \frac{2\Gamma(0.75)}{\sqrt{\pi}} = 1.103 \sqrt{\frac{b}{a}} (\overline{t})^{\frac{1}{4}}. \qquad (3.3)$$

Здесь Г – гамма-функция

$$\Gamma(\xi) = \int_0^\infty \exp(-u) u^{\xi - 1} du.$$

Это выражение можно использовать для определения проводимости трещины так называемым методом типовых кривых, т.е. путем сопоставительного его анализа с кривой изменения давления, экспериментально определяемой на забое скважины.

Представление формулы (3.3) в размерном виде

$$P_f(x = 0, t) = P_0 - 1.103 \frac{Q \mu^{3/4} t^{1/4}}{h_r \sqrt{w_f k_f} \beta_*^{1/4} k_r^{1/4}} \qquad (3.4)$$

позволяет в явном виде выяснить зависимость давления от основных параметров, характеризующих пласт, трещину и жидкость (в этой формуле β_* – коэффициент упругоемкости пласта). Анализ показывает, что наличие трещины качественно меняет характер течения. Так, классическим аналогом (при отсутствии трещины) выражения (3.4) является формула для давления на галерее [13]

$$P(x = 0, t) = P_0 - 1.128 \frac{Q \sqrt{\mu} \sqrt{t}}{b h_r \sqrt{k_r} \sqrt{\beta_*}}. \qquad (3.5)$$

Из сравнения (3.4) и (3.5) видно, что наличие трещины гидроразрыва существенным образом влияет на распределение давления, различие между выражениями является качественным, так как принципиально отличаются зависимости давления от времени, вязкости, проницаемости и упругоемкости пласта.

Количество жидкости, поступающее из пласта в трещину, определяется из выражения

$$q = \int_0^\infty \left.\frac{\partial \overline{P}_r}{\partial \overline{y}}\right|_{\overline{y}=0} d\overline{x}.$$

Тогда, с учетом выражений (1.12), (1.13) и (1.18), можно найти долю в дебите скважины объема жидкости, поступающего в трещину из пласта

$$\frac{q}{Q} = 1 - \exp(b^2 \overline{t}) \operatorname{erfc}(b\sqrt{\overline{t}}).$$

Из этого выражения следует, что в начальной стадии в дебите скважины преобладает доля притока из трещины, со временем увеличивается доля притока из пласта. Так, при $\overline{t} < 0.59/b^2$ больше половины дебита скважины определяется емкостью трещины, в размерном виде это условие имеет вид

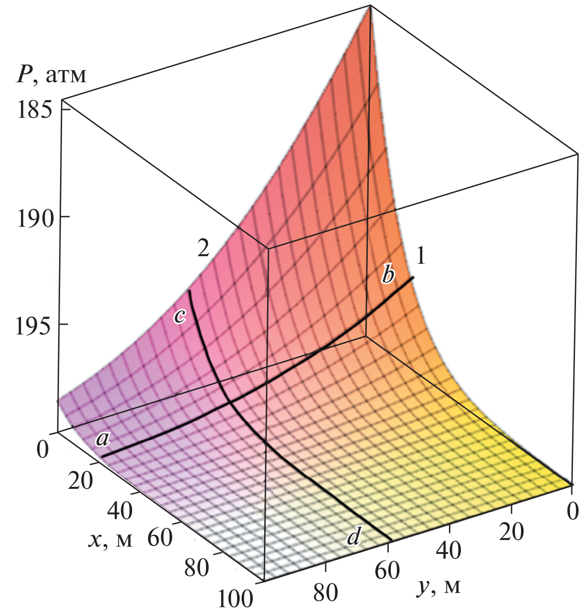

Рис. 2. Распределение давления (P) в трещине и в пласте: $t = 1$ сут; 1 – вдоль трещины – $P = P_f(x)$; 2 – в пласте – $P = P_r\,(x = 0, y)$; ab – $P\,(x = 20$ м, $y)$; cd – $P\,(x, y = 60$ м$)$

$$t < 0.59\left(\frac{k_f}{k_r}\right)^2 \frac{\varkappa_r w_f^2}{\varkappa_f^2}.$$

Оценки по этому выражению показывают, что проявление емкости трещины в дебите скважины является заметным при малых временах и при малых значениях подвижности k^r/μ жидкости в пласте.

В области определения $0 \le z \le 1$ функция erfc изменяется в пределах от 1 до 0, поэтому, согласно теореме о среднем значении [14], выражение (2.11) можно представить в виде

$$\overline{P}_f(\overline{x},\overline{t}) = \frac{2b}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\overline{t}}}{\sqrt{a}}\,c\int_0^1 \exp\left(-\frac{\overline{x}^2}{4a\overline{t}z^2}\right)dz, \quad 0 \le c \le 1. \tag{3.6}$$

Очевидно, что значение этого выражения при $c = 1$ является мажорантой для построенного выше решения (2.11) во всем диапазоне изменения $\overline{x}$ и $\overline{t}$. Вычисляя интеграл в (3.6), полагая $c = 1$, получаем известную формулу, описывающую распределение давления при плоскопараллельной фильтрации жидкости в полубесконечном пласте, когда при $x = 0$ задано значение дебита [13]. В размерных переменных эта формула, которая следует так же из полученного выше решения (2.11) при $k_r = 0$ (отсутствие перетока жидкости из пласта в трещину), имеет вид

$$P_f\,(x,t) = P_0 + \frac{\mu Q}{k_f w_f h_r}\left[x\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa_f t}}\right) - \frac{2\sqrt{\varkappa_f t}}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\varkappa_f t}\right)\right].$$

Рассмотрим некоторые результаты численных расчетов по выражениям (2.11), (2.12) и (3.4). Рассматривается отбор жидкости из пласта при следующих значениях параметров: начальное давление пласта $P_0 = 200 \times 10^5$ Па, мощность продуктивного пласта $h_r = 10$ м, дебит $Q = 10$ м^3/сут, ширина трещины $w_f = 5 \times 10^{-3}$ м, проницаемости пласта и трещины соответственно $k_r = 10^{-13}$ м^2, $k_f = 10^{-10}$ м^2, вязкость жидкости $\mu = 4 \times 10^{-3}$ Па·с, коэффициент упругоемкости $\beta = 10^{-9}$ Па$^{-1}$.

На рис. 2 представлено распределение давления в пласте и в трещине для фиксированного момента времени $t = 1$ сутки. На этом рисунке кривая *1* описывает изменение давления вдоль трещины $P_f(x, t)$ (формула (2.11)), кривая *2* – изменение давления в пласте $P_r\,(x = 0, y, t)$ по формуле (2.12). Пересекающиеся линии на этом графике определяют соответствующие значения давления по осям x и y. В частности, линия ab описывает изменение давления в рассматриваемый

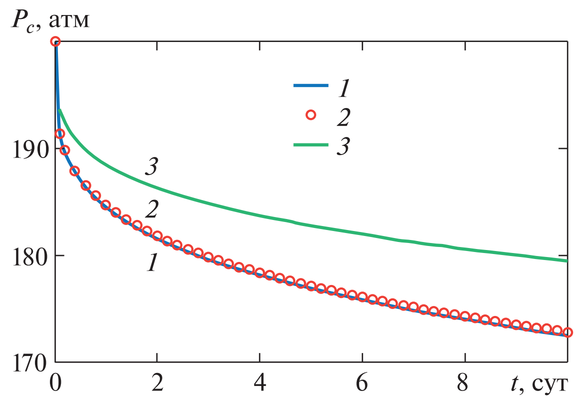

Рис. 3. Распределение давления на забое скважины: *1* – формула (3.1), *2* – формула (3.4), *3* – формула в приближении несжимаемости жидкости в трещине

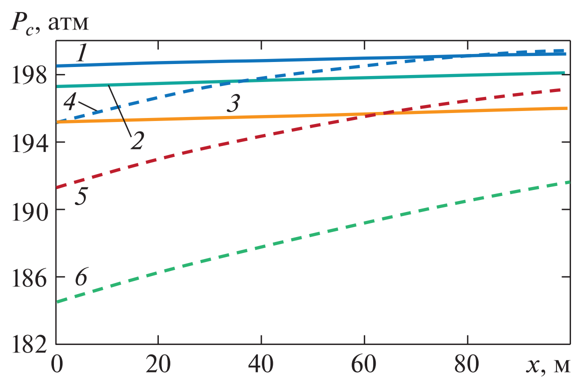

Рис. 4. Распределение давления в трещине при различных значениях проницаемости трещины (сплошные линии – $k_f = 10^{-8}$ м^2, штриховые линии – $k_f = 10^{-9}$ м^2): $t = 1$ сут (*1*, *4*), 10 сут (*2*, *5*), 100 сут (*3*, *6*)

момент времени на расстоянии $x = 20$ м от скважины (по трещине) для всех точек пласта $0 < y < 100$ м. Аналогично, линия cd определяет давление $P(x, y = 60$ м, $t = 1$ сут).

На рис. 3 представлены зависимости давления на забое скважины от времени. Здесь кривые *1* и *2* построены соответственно по точной формуле (3.1) и асимптотической формуле (3.4), кривая *3* – по формуле, полученной в работе [4] в приближении несжимаемости жидкости в трещине. Эта формула с точностью до обозначений совпадает с выражением (33), но имеется количественное различие в численных коэффициентах, в работе [4] этот коэффициент равен 0.83, в формуле (3.4) – 1.103. Расчеты по формулам (3.1) и (3.4) показывают совпадение результатов – во всем практически значимом диапазоне изменения времени разница не превышает 1%. Различие между кривыми *1* и *3* является заметным и увеличивается с ростом времени. При $t = 1$ сут это различие составляет 2%, при $t = 10$ сут – 4%. Таким образом, асимптотическое представление точного решения (формула (3.4)) является более приемлемым по сравнению с приближением, когда не учитывается сжимаемость трещины.

Отметим, что асимптотическое представление точного решения возможно не только при $x = 0$, а при любых значениях x. Полагая $b^2\overline{t} \gg u$ и заменяя переменные интегрирования, формулу (2.10) можно привести к асимптотическому виду, в котором явно выделяется зависимость от времени в степени 1/4.

Из рис. 4 (формула (2.11)) видно, что с увеличением проницаемости трещины падение давления вдоль трещины резко уменьшается. Эпюры давления постепенно выпрямляются. Как следует из рисунка, при $k_f = 10^{-8}$ м^2 падение давления в трещине за 100 сут составляет менее 1 атм. Это означает, что при принятых параметрах трещина имеет большую проводимость, поэтому распределение давления вдоль трещины становится практически однородным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены новые аналитические решения теории нестационарной фильтрации жидкости в пласте с вертикальной трещиной гидроразрыва. Решения получены на основе реализации модели с учетом фильтрации жидкости в пласте и сжимаемости трещины, которая является более общей, чем известные в литературе. Эти решения и их асимптотические представления имеют значимость для теоретического обоснования методов гидродинамических исследований пластов и для оценки дебита скважин с трещиной гидроразрыва. Показано, что при наличии трещины гидроразрыва качественно меняется характер течения в пласте, а именно зависимости давления от времени, вязкости жидкости, проницаемости и упругоемкости пласта. Использование решений в случае нагнетательных скважин позволяет описать динамику заводнения пластов с трещинами гидроразрыва, в частности определить скорость движения жидкости в трещине и в пласте при моделировании трассерных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каневская Р.Д.* Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта. М.: ООО “Недра-Бизнесцентр”, 1999. 212 с.
2. *Cinco-Ley H., Samaniego V.F.* Transient Pressure Analysis for fractured wells // J. Petrol. Techonol. 1981. V. 33. № 9. P. 1749–1766.
3. *Wong D.W., Harrington A.G., Cinco-Ley H.* Application of the Pressure-Derivative Function in the Pressure-Transient Testing of Fracture Wells // Paper SPE 13056, SPE formation Evaluation. 1986. P. 470–480.
4. *Нагаева З.М., Шагапов В.Ш.* Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте // ПММ. 2017. Т. 81. Вып. 3. С. 319–329.
5. *Асалхузина Г.Ф., Давлетбаев А.Я., Хабибуллин И.Л.* Моделирование дифференциации пластового давления между нагнетательными и добывающими скважинами на месторождениях с низкопроницаемыми коллекторами // Вестн. Башкирского ун-та. 2016. Т. 21. № 3. С. 537–542.
6. *Хабибуллин И.Л., Евграфов Н.А., Хисамов А.А.* Моделирование нестационарного притока жидкости из пласта в скважину через трещину гидроразрыва // Сб. тр. Первой летней школы-конференции “Физико-химическая гидродинамика: модели и приложения”. Уфа: РИЦ БашГУ, 2016. С. 184–192.
7. *Эрлагер Р.* Гидродинамические методы исследования скважин. М.–Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2007. 521 с.
8. *Хасанов М.М., Головнева О.Ю.* Определение дебита вертикальных скважин с гидроразрывом пласта на неустановившемся режиме фильтрации // Нефтяное хозяйство. 2016. № 12. С. 64.
9. *Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А.* Моделирование нестационарной фильтрации вокруг скважины с вертикальной трещиной гидроразрыва // Вестн. Башкирского ун-та. 2017. Т. 22. № 2. С. 309–314.
10. *Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А.* К теории билинейного режима фильтрации в пластах с трещинами гидроразрыва // Вестн. Башкирского ун-та. 2018. Т. 23. № 4. С. 958–963.
11. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и *z*-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.
12. *Диткин А.В., Прудников А.П.* Операционное исчисление. М.: Высшая школа, 1975. 407 с.
13. *Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Каневская Р.Д., Максимов В.М.* Подземная гидромеханика. М.–Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2006. 488 с.
14. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Наука, 2003. 800 с.