

УДК 532.546

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ РИМАНА, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ЗАКАЧКУ НАГРЕТОГО РАСТВОРА СОЛИ В ВОДОНАСЫЩЕННЫЙ ПЛАСТ

© 2019 г. А. А. Афанасьев^{a,*}, А. А. Чернова^{a,**}

^a МГУ им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия

* E-mail: afanasyev@imec.msu.ru

** E-mail: anya_chernova_2504@mail.ru

Поступила в редакцию 07.11.2018 г.

После доработки 17.12.2018 г.

Принята к публикации 18.12.2018 г.

Решена автомодельная задача о распаде произвольного разрыва применительно к процессам неизотермической фильтрации соленой жидкости. Учитывается возможность выпадения в пористой среде осадка в виде твердой фазы соли и сопутствующее снижение проницаемости. В предположении несжимаемой среды и пренебрежении теплопроводностью предложен геометрический метод решения задачи на плоскости. Показано, что решение необходимо строить только из сильных разрывов и областей однородного распределения параметров, а центрированные волны Римана невозможны. Исследованы возможные типы решений задачи. Продемонстрировано, что при высокой температуре закачиваемого раствора соли в пласт распространяются три сильных разрыва, из которых только на внутреннем рвется температура.

Ключевые слова: пористая среда, фильтрация, раствор соли, фазовые превращения, автомодельное решение

DOI: 10.1134/S0568528119040017

Формирование месторождений цветных металлов часто связывают с фильтрацией водных растворов солей, нагретых до температур выше 400°C. Подобные растворы, богатые полезными химическими элементами, выделяются из вулканических очагов при дегазации магмы [1]. Далее раствор поднимается к поверхности с глубин 5 и более км, фильтруясь через геологические породы [2, 3]. При этом достигаются условия термодинамического равновесия пар–жидкость, при которых раствор расслаивается на фазы жидкости и пара, причем пар, как более легкая фаза, быстро поднимается к поверхности. Так как концентрация соли в паре мала, то это процесс сопровождается увеличением концентрации соли и других растворенных веществ в жидкости, т.е. раствор “выкипает”. В результате на глубинах 1–2 км образуются линзы концентрированного раствора соли, из которых формируются порфириновые месторождения.

Образование линзы, в случае если нагретый раствор быстро поднимается по узкому высокопроницаемому вулканическому каналу, сопровождается выпадением на скелет породы осадка в виде твердой фазы соли [3, 4]. В результате канал перекрывается, а нагретый раствор растекается в горизонтальном направлении на глубинах 1–2 км. Таким образом, происходит внедрение, т.е. закачка, нагретого раствора соли из канала вулкана в окружающие породы, насыщенные более холодной и пресной водой. На качественном уровне, пренебрегая неоднородностями проницаемой геологической среды и трехмерным характером течения, данный процесс описывается решением одномерной задачи о распаде произвольного разрыва. С одной стороны от разрыва находится нагретый раствор соли, а с другой — холодная пресная вода.

Закачка соленой воды в пористые среды с учетом выпадения осадка соли рассматривалась ранее в работах многих авторов. В [5] исследованы процессы выпадения растворенных солей в осадок при испарении грунтовых вод. В [6] разработаны методы численного моделирования многофазной фильтрации соленой жидкости, которые в [7] использовались для исследования образования осадка при отборе жидкости из геотермального резервуара. Показано, что при испарении воды концентрация соли в жидкости растет, что приводит к насыщению раствора, образованию осадка и, при определенных параметрах, полной закупорке пористой среды.

В настоящей работе исследуется процесс закачки нагретого раствора соли в холодный водонасыщенный пласт. При этом рассматриваются параметры, при которых водяной пар не образуется. Учитывается, что растворимость соли в воде есть функция температуры, а выпадение осадка обусловлено тем, что при снижении температуры раствор становится насыщенным. Эти процессы качественно отличаются от процессов, рассмотренных в работах [5, 7, 8], где выпадение соли связано с испарением воды и сопутствующим увеличением солёности жидкости, которое достигает равновесного значения. В отличие от [7, 8], где исследован отбор пара из геотермального резервуара, в данной работе, наоборот, рассмотрена закачка соленой воды в пласт.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Одномерная неизотермическая фильтрация двухкомпонентной жидкости – соленой воды (например, бинарной смеси NaCl–H₂O) – описывается следующей системой уравнений [4, 9]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi(\rho_l c(1-s) + \rho_s s)) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_l c w) = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_l (1-c)(1-s)) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_l (1-c) w) = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi(\rho_l h_l (1-s) + \rho_s h_s s) + (1-\phi)\rho_r h_r) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_l h_l w) = 0 \quad (1.3)$$

Здесь ϕ – пористость среды, ρ – плотность, c – массовая концентрация соли в жидкости, s – насыщенность твердой фазы соли, w – скорость фильтрации жидкости, h – энтальпия. Индексы r, l, s отвечают параметрам скелета пористой среды, жидкости и твердой фазы соли соответственно.

Уравнения (1.1) и (1.2) – законы сохранения массы соли (NaCl) и воды (H₂O) соответственно, а уравнение (1.3) – закон сохранения энергии насыщенной пористой среды, записанный в терминах энтальпии [10] и в пренебрежении теплопроводностью. В системе (1.1)–(1.3) предполагается, что жидкость может расслаиваться на две фазы – жидкую фазу соленой воды и твердую фазу соли, а температура ниже температуры кипения воды, т.е. газовая фаза водяного пара не образуется.

Введем “объемную” концентрацию соли в жидкой фазе τ следующим образом:

$$\rho_l = \rho_w(1-\tau) + \rho_d \tau, \quad \rho_l h_l = \rho_w h_w(1-\tau) + \rho_d h_d \tau \quad (1.4)$$

где индексом w обозначены параметры чистой воды, а d – параметры соли, растворенной в воде. Тогда, используя (1.4), массовая концентрация c выражается через объемную концентрацию в виде

$$c = \frac{\rho_d \tau}{\rho_w(1-\tau) + \rho_d \tau} \quad (1.5)$$

Соотношения (1.4), (1.5) подразумевают, что жидкая фаза l состоит из двух “псевдофаз” w и d с объемными концентрациями τ и $1-\tau$ соответственно.

Кривая термодинамического равновесия между жидкостью и твердой фазой соли задается соотношением

$$\tau = \tau_*(T) \quad (1.6)$$

где $\tau_*(T)$ – монотонно возрастающая функция температуры [11]. Для дальнейших рассуждений конкретное математическое выражение для $\tau_*(T)$ не существенно. Если солёность жидкости ниже равновесного значения ($\tau < \tau_*$), то твердая фаза не образуется, а соль полностью растворена в жидкости. При увеличении солёности и достижения ею равновесного значения ($\tau = \tau_*$) возможно выпадение осадка соли. Солёность жидкости не может быть выше значения τ_* .

Далее сделаем упрощающее допущение, что все фазы – несжимаемые среды, а их энтальпии – линейные функции температуры:

$$\phi, \rho_j = \text{const}; \quad h_j = C_j T + h_{j0}; \quad j = w, s, r, d \quad (1.7)$$

где $C_j = \text{const}$ – удельные теплоемкости, а $h_{j0} = \text{const}$. Также предполагается, что при фазовых переходах, т.е. при растворении соли в жидкости или выпадении осадка твердой фазы, плотность и энтальпия соли не изменяются

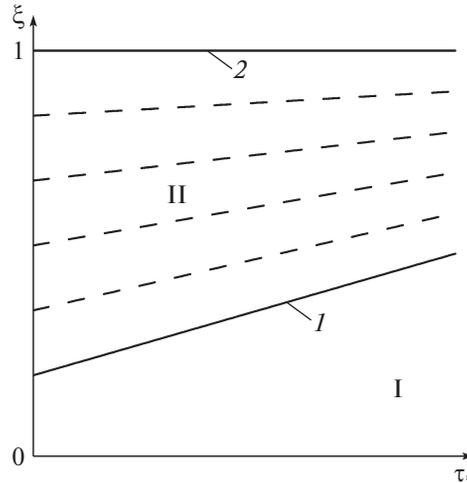


Рис. 1. Фазовая плоскость $\{\tau^*, \xi\}$. Прямая 1 – линия термодинамического равновесия ($\xi = \tau^*$ или $s = 0$), 2 – $s = 1$, а штриховые прямые – линии уровня $s = \text{const}$. Область I – $p = 1$, а II – $p = 2$

$$\rho_d \equiv \rho_s, \quad h_d \equiv h_s \quad (1.8)$$

С учетом соотношений (1.5)–(1.8) система уравнений (1.1)–(1.3) сведется к виду

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi(\tau(1-s) + s)) + w \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \quad (1.10)$$

$$(\rho C)_m \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho C)_l w \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (1.11)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} (\rho C)_m &= \phi(1-s)(\rho C)_l + \phi s \rho_s C_s + (1-\phi)\rho_r C_r \\ (\rho C)_l &= \rho_w C_w(1-\tau) + \rho_s C_s \tau \end{aligned}$$

Здесь $(\rho C)_m$ – объемная теплоемкость насыщенной пористой среды, а $(\rho C)_l$ – объемная теплоемкость двухкомпонентной (NaCl–H₂O) многофазной смеси.

Введем полную, т.е. просуммированную по жидкой и твердой фазам, объемную концентрацию соли

$$\xi = \tau(1-s) + s \quad (1.12)$$

Тогда при $\xi \leq \tau^*$, т.е. ниже прямой 1 на рис. 1, смесь находится в однофазном состоянии жидкости, а при $\xi > \tau^*$, т.е. выше прямой 1 – в двухфазном состоянии жидкость–соль.

Согласно (1.5), массовая концентрация есть известная функция объемной концентрации, т.е. $c(\tau)$, а согласно (1.12) насыщенность выражается через τ и ξ , т.е. $s(\tau, \xi)$. Тогда, учитывая предположения (1.7), (1.8), законы сохранения (1.9)–(1.11) есть система трех уравнений относительно четырех неизвестных τ, ξ, T, w (вместо T можно выбрать переменную τ^*), а для замыкания системы необходимо дополнительное соотношение. В областях однофазной фильтрации система замыкается условием $s = 0$ или $\xi = \tau$, причем выполняется неравенство $\tau \leq \tau^*$, а в областях двухфазной фильтрации – условием $\tau = \tau^*(T)$, причем $\xi > \tau$.

2. УРАВНЕНИЯ В БЕЗРАЗМЕРНОМ ВИДЕ

Введем безразмерные параметры в виде

$$x' = x/\bar{x}, \quad t' = t/\bar{t}, \quad w' = w/\bar{w}, \quad T' = T/\bar{T}, \quad \bar{x} = \frac{1}{\phi_0} \int_0^{\bar{t}} w(t) dt \quad (2.1)$$

где чертой обозначены характерные масштабы длины (\bar{x}), времени (\bar{t}), скорости (\bar{w}) и температуры (\bar{T}), а штрихом – безразмерные параметры. Тогда система уравнений (1.8)–(1.11) примет вид

$$\frac{\partial w'}{\partial x'} = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t'} + \frac{\partial \tau}{\partial x'} = 0 \tag{2.3}$$

$$A(\xi) \frac{\partial \tau_*}{\partial t'} + B(\tau) \frac{\partial \tau_*}{\partial x'} = 0 \tag{2.4}$$

где

$$A(\xi) = (1 - \xi) \Phi_w + \xi \Phi_s + 1, \quad B(\tau) = (1 - \tau) \Phi_w + \tau \Phi_s \tag{2.5}$$

функции ξ и τ , а

$$\Phi_w = \frac{\phi \rho_w C_w}{(1 - \phi) \rho_r C_r}, \quad \Phi_s = \frac{\phi \rho_s C_s}{(1 - \phi) \rho_r C_r} \tag{2.6}$$

безразмерные параметры подобия.

Согласно (2.2), скорость фильтрации является функцией времени. Не ограничивая общности в уравнениях (2.3) и (2.4) предполагаем, что эта функция $w(t) \equiv \bar{w}(t)$ задана, а $w' \equiv 1$. Тогда уравнение (2.2) выполняется тождественно, а в системе (2.2)–(2.4) число законов сохранения сокращается до двух уравнений (2.3) и (2.4) на ξ , τ , τ_* . Согласно (2.4) по известному τ_* можно восстановить значение температуры T . В областях однофазной фильтрации система (2.3), (2.4) замыкается условием $\xi = \tau$, $\tau \leq \tau_*$, а в области двухфазной фильтрации – условием $\tau = \tau_*$, $\xi > \tau$.

Осаждение соли может приводить к снижению проницаемости пористой среды [5, 7, 8] и, в соответствии с законом Дарси, к увеличению градиента давления. Однако, согласно (2.2), полный расход жидкости сохраняется вдоль x , поэтому изменение проницаемости не влияет на распределения ξ , τ , τ_* .

В дальнейшем у безразмерных параметров (1.13) штрих опускается.

3. О МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ И СИЛЬНЫХ РАЗРЫВАХ

Определим характеристические скорости в областях однофазной и двухфазной фильтрации. Для этого рассмотрим распространение малых возмущений на фоне однородного распределения параметров течения. Ищем решение системы (2.3), (2.4) в виде простых гармонических волн

$$u = u_0 + \delta u \exp i(kx - \omega t), \quad u = \xi, \tau, \tau_* \tag{3.1}$$

где k – волновое число, ω – частота, $u_0 = \text{const}$ – фоновое распределение параметров, $\delta u \rightarrow 0$ – малые амплитуды возмущения, а i – мнимая единица. Подставляя (3.1) в систему (2.3), (2.4), учитывая (1.12) и пренебрегая слагаемыми второго порядка малости, получим дисперсионное соотношение

$$(\omega - a_\xi k)(\omega - a_\tau k) = 0, \quad a_\xi = 2 - p, \quad a_\tau = \frac{B}{A} \tag{3.2}$$

где $p = 1$ или 2 . Уравнение (3.2) имеет два корня вида $\omega/k = a_j$, $j = \xi, \tau$, соответствующих действительным характеристикам. В областях однофазной ($p = 1$) и двухфазной ($p = 2$) фильтрации с первой характеристикой ($j = \xi$) распространяются возмущения полной концентрации смеси ξ

$$\omega = a_\xi k: \quad \delta \xi \neq 0, \quad \delta \tau_* = \tau'_* \delta T = 0 \tag{3.3}$$

При этом, когда $p = 1$ возмущения концентрации “вморожены” в жидкость, т.е. $a_\xi = 1$. При $p = 2$ скорость распространения возмущений концентрации равна нулю, $a_\xi = 0$, так как твердая фаза соли неподвижна.

В областях $p = 1$ со второй характеристикой ($a_\tau = B/A$) распространяются только возмущения τ_* (т.е. температуры T)

$$p = 1: \quad \omega = \frac{B(\tau)}{A(\tau)} k, \quad \delta \xi = \delta \tau = 0, \quad \delta \tau_* = \tau'_* \delta T \neq 0 \tag{3.4}$$

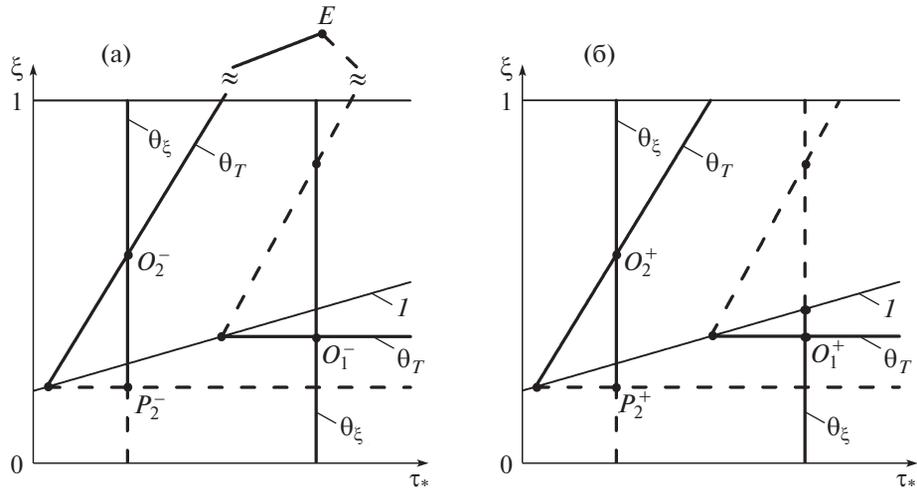


Рис. 2. Адиабаты разрыва при заданном начальном состоянии за O_p^- (а) или перед O_p^+ (б) разрывом в областях однофазного ($p = 1$) и двухфазного ($p = 2$) состояния. Сплошными и штриховыми линиями показаны эволюционные и неэволюционные отрезки ветвей адиабаты. Прямая I – линия термодинамического равновесия $\xi = \tau_*$

а в областях $p = 2$ – возмущения и τ_* , и ξ

$$p = 2: \quad \omega = \frac{B(\tau_*)}{A(\xi)} k, \quad \delta \xi \neq 0, \quad \delta T \neq 0, \quad A \delta \tau_* = A \tau_*^* \delta T = B \delta \xi \tag{3.5}$$

Из законов сохранения (1.1)–(1.3), записанных в интегральной форме, следуют условия на сильных разрывах, которые сразу приведем в безразмерных переменных

$$[w] = 0 \tag{3.6}$$

$$[\xi] W - [\tau] = 0 \tag{3.7}$$

$$(A^\pm W - B^\pm) [\tau_*] = 0 \tag{3.8}$$

где W – скорость разрыва, верхним индексом \pm обозначены параметры перед и за разрывом соответственно, а квадратными скобками – скачок соответствующей величины на разрыве (например, $[w] = w^+ - w^-$). Согласно уравнению (3.6), скорость фильтрации непрерывна на разрыве. Учитывая, что $w \equiv 1$, условие (3.6) выполняется тождественно.

В соответствии с (3.8) возможны разрывы двух различных типов. На разрывах первого типа температура непрерывна $[\tau_*] = 0$ (или $[T] = 0$), а скорость W имеет значение, удовлетворяющее соотношению (3.7)

$$W = \frac{[\tau]}{[\xi]}, \quad [\tau_*] = 0$$

Данным разрывам на фазовой плоскости соответствует ветвь адиабаты θ_ξ , представляющая собой вертикальную прямую (рис. 2). Эта ветвь – геометрическое место точек (τ_*, ξ) возможных состояний за (или перед) разрывом первого типа при заданном состоянии перед (или за) разрывом, которому соответствует точка O_p^+ (или O_p^-), $p = 1, 2$.

Разрывы второго типа, на которых $[\tau_*] \neq 0$, распространяются с характеристической скоростью a_T , причем эта скорость на разрыве непрерывна

$$W = \frac{[\tau]}{[\xi]} = a_T^\pm = \frac{B^\pm}{A^\pm}, \quad [\tau_*] \neq 0$$

Данным разрывам на фазовой плоскости соответствует ветвь адиабаты θ_T , которая в областях $p = 1$ есть отрезок прямой $\xi = \text{const}$, а в областях $p = 2$ – отрезок прямой

$$\frac{A(\xi)}{B(\tau_*)} = \text{const} \quad (3.9)$$

Подставляя (2.5) в (3.9), получим уравнение этой прямой в виде

$$\xi = \gamma(\tau_* - \psi_\tau) + \psi_\xi, \quad \psi_\tau = \frac{\Phi_w}{\Phi_w - \Phi_s}, \quad \psi_\xi = \frac{\Phi_w + 1}{\Phi_w - \Phi_s} \quad (3.10)$$

где γ , ψ_τ и ψ_ξ – константы. В соответствии с (3.10), все ветви $\theta_T = \text{const}$ в области $p = 2$ проходят через точку $E = (\psi_\tau, \psi_\xi)$. Для параметров подобия $\Phi_w \approx 0.5$ и $\Phi_s \approx 0.2$, соответствующих бинарной смеси NaCl–H₂O, точка $E \approx (1.8, 5.8)$ расположена на плоскости $\{\tau_*, \xi\}$ в первой четверти значительно выше и правее рассматриваемой области, так как $\tau_* < 0.28$ (рис. 2а) [11].

Для эволюционности сильного разрыва необходимо потребовать, чтобы от него уходило на единицу меньше малых возмущений, чем число заданных на нем условий [12]. Так как на сильном разрыве выполняется два невырожденных условия (3.7) и (3.8), то он эволюционен, если от него уходит ровно одна характеристика (3.3) или (3.4) (или (3.5)). Для определения эволюционных отрезков ветвей θ_ξ и θ_T адиабаты (рис. 2), необходимо сравнить скорость разрыва W с характеристическими скоростями a_ξ и a_T .

Для различных положений точки O эволюционные отрезки адиабаты θ_ξ и θ_T изображены на рис. 2. Если точка O соответствует однофазному состоянию за разрывом $O = O_1^-$, то эволюционными являются вся ветвь θ_ξ и весь отрезок ветви θ_T , расположенный в области $p = 1$. Когда же $O = O_1^+$, то эволюционными являются отрезки ветвей θ_ξ и θ_T , расположенные в области $p = 1$. Если точка O соответствует двухфазному состоянию перед или за разрывом $O = O_2^\pm$, то эволюционными отрезок ветви θ_ξ , лежащий выше точки P_2^\pm , и весь отрезок ветви θ_T , расположенный в области $p = 2$.

4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РИМАНА

Рассмотрим одномерную задачу неизотермической фильтрации смеси соленой жидкости в области $x \in [0, +\infty)$. В начальный момент времени ($t = 0$) пористая среда насыщена водой с малой соленостью $\tau_0 = \xi_0$ при температуре T_0 . При $t = 0$ через границу $x = 0$ в область $x > 0$ начинает закачиваться соленая вода с объемной концентрацией соли $\tau_i = \xi_i$, температурой T_i и постоянным объемным расходом $w_i = 1$. Согласно (2.2) и (3.6) закачка жидкости приведет к мгновенному установлению однородного распределения скорости $w = w_i$ во всей области течения $x \geq 0$. Также закачка приведет к распространению от границы $x = 0$ в область $x > 0$ центрированных в точке $x = 0, t = 0$ возмущений температуры и концентрации соли ξ (и τ). По постановке данная задача аналогична классической задаче Баклея–Левретта в теории фильтрации [13].

Решение сформулированной задачи в общем случае должно строиться из сильных разрывов, центрированных волн Римана и областей однородного распределения параметров [12]. Однако у системы (2.3) и (2.4) не существует решений в виде центрированных волн Римана. Действительно, волна не может быть связана с центрированным пучком характеристик (3.3) или (3.4), скорости которых принимают дискретные, но постоянные значения 1 или 0 соответственно. В возмущениях (3.4) $\delta a_T(\tau) = 0$ и, согласно (2.5), в возмущениях (3.5)

$$\delta a_T = \frac{\Phi_s - \Phi_w}{A^2(\xi)} (A\delta\tau_* - B\delta\xi) = 0$$

характеристическая скорость не изменяется, поэтому центрированные волны, связанные с данной характеристикой, тоже невозможны. Таким образом, решение сформулированной задачи нужно строить только из сильных разрывов и областей однородного распределения параметров.

5. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ

Начальному распределению параметров в водонасыщенном пласте поставим в соответствие на фазовой плоскости точку R , а параметрам закачиваемой жидкости точку I в области $p = 1$ (рис. 3). Точка R , соответствующая холодной пресной воде, расположена при $\xi = 0$ и малых зна-

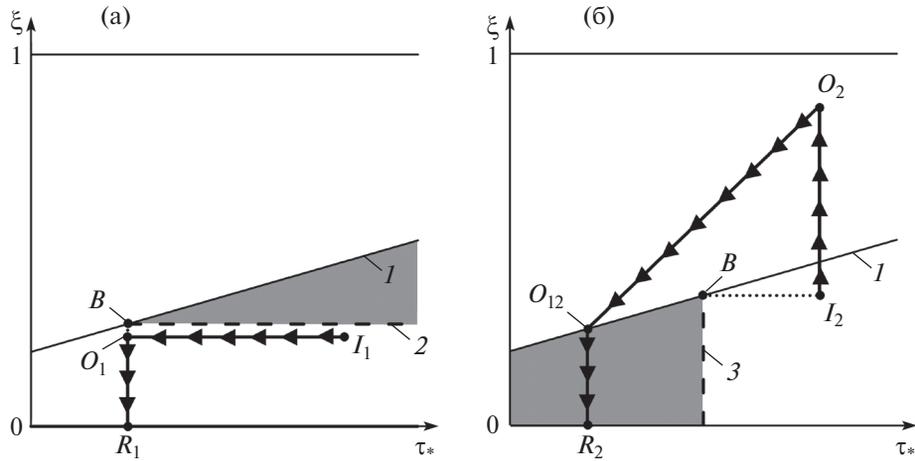


Рис. 3. Траектории, соответствующие решению задачи на фазовой плоскости, при различных положениях точек I и R . Показаны траектории, соответствующие решению первого (а) и второго (б) типов. При фиксированных R_1 (или I_2) заштрихованы области параметров (а) (или (б)), соответствующие решению второго типа

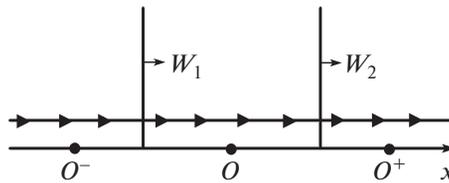


Рис. 4. Схематическое изображение последовательности двух разрывов в “элементарном” решении. Точки O обозначают состояния перед и за разрывом

чениях τ_* , т.е., согласно (1.6), малых температурах T . Точка I , соответствующая нагретой солевой жидкости, расположена при $\xi > 0$ и больших значениях τ_* . Для решения поставленной задачи необходимо найти путь на фазовой плоскости, соединяющий точки I и R , отдельные отрезки которого соответствуют только эволюционным отрезкам адиабат разрывов. Причем при возрастании пространственной координаты x каждый следующий разрыв должен распространяться быстрее предыдущего.

Рассмотрим “элементарные” решения системы уравнений (2.3), (2.4) для того, чтобы на фазовой плоскости было удобно сравнивать скорости двух последовательно распространяющихся разрывов и проверять их эволюционность. Под элементарным решением имеется в виду решение, которое содержит последовательность двух эволюционных разрывов, распространяющихся в положительном направлении оси x со скоростями W_1 и W_2 . При этом разрыв, расположенный при большей координате, x распространяется быстрее, т.е. $W_1 < W_2$ (рис. 4). За разрывом 1, между разрывами и перед разрывом 2 все параметры имеют однородное распределение, которым на фазовой плоскости соответствуют точки O^- , O и O^+ соответственно. Таким образом, на фазовой плоскости элементарному решению можно поставить в соответствие траекторию из O^- в O^+ , проходящую через точку O . Траектория состоит только из эволюционных отрезков адиабаты разрыва, выпущенной из точки O , с учетом ограничения на скорости разрыва $W_1 < W_2$.

Для различных положений точки O возможные элементарные решения изображены на рис. 5. Стрелки показывают направление движения вдоль траекторий при возрастании x . Таким образом, решение задачи сводится к определению последовательности точек $(O_i, i = 1, 2, \dots)$ на фазовой плоскости и соответствующих им элементарных решений, соединяющих точки I и R . Причем в решении i выполняются условия $O = O_i$, $O^+ = O_{i+1}$, а в решении $i + 1$ — $O = O_{i+1}$, $O^- = O_i$ (рис. 4).

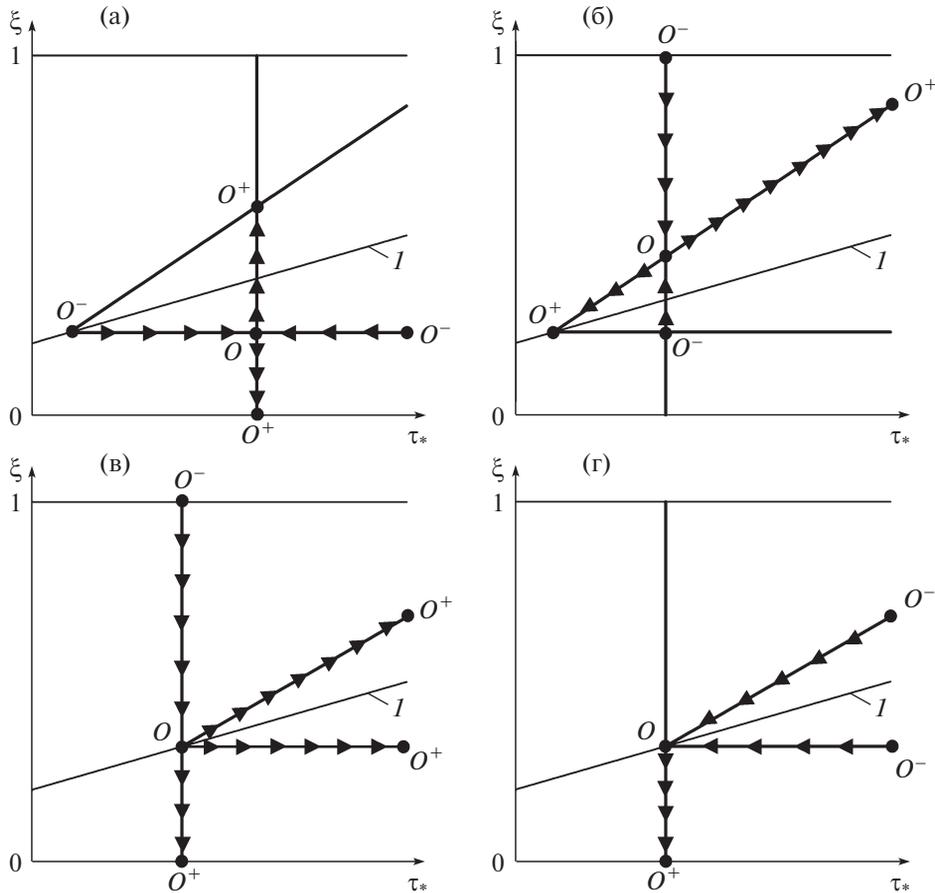


Рис. 5. Элементарные решения при различных положениях точки O в области однофазного (а) и двухфазного (б) состояния смеси, а также на линии термодинамического равновесия (в, г)

Предположим, что граничным и начальным условиям задачи соответствуют точки I_1 и R_1 на рис. 3а. То есть, пусть на фазовой плоскости точка O_1 – вершина прямоугольника, образованного I_1 и R_1 , – лежит ниже линии термодинамического равновесия $\xi = \tau_*$. В этом случае существует единственная траектория, соединяющая I_1 и R_1 . Она образована элементарным решением на рис. 5а, в котором $O^- = I_1$, $O = O_1$, а $O^+ = R_1$. В данном решении первого типа с быстрым разрывом 3 ($W_3 = a_\xi = 1$) распространяются возмущения солености (рис. 6а). Быстрый фронт ограничивает объем пористой среды ($x < W_3 t_*$), насыщенный концентрированным раствором соли, который закачан в пласт к моменту времени t_* . С медленным разрывом ($W_2 = a_T < 1$) распространяются возмущения температуры T (или t_*), которые отстают от возмущений ξ из-за теплообмена между жидкостью и неподвижной породой. За медленным фронтом $T = T_i$, а перед ним – $T = T_0$. При этом осадок соли не образуется, а течение остается однофазным ($s = 0$).

Теперь предположим, что условиям задачи соответствуют точки I_2 и R_2 на рис. 3б. То есть, пусть линия термодинамического равновесия $\xi = \tau_*$ пересекает прямоугольник, образованный точками I_2 и R_2 . В этом случае не существует решения задачи первого типа, так как не существует элементарного решения из I_2 в R_2 , проходящего через точку O_2 (рис. 5б). Анализ возможных решений показывает, что существует единственная траектория из I_2 в R_2 (рис. 3б), составленная из элементарных решений $\{O^- = I_2, O = O_2, O^+ = O_{12}\}$ (рис. 5б) и $\{O^- = O_2, O = O_{12}, O^+ = R_2\}$ (рис. 5г). В данном решении задачи второго типа от области закачки ($x = 0$) в пласт ($x > 0$) распространяются три сильных разрыва. С самым быстрым разрывом, как и в решении первого типа, распространяются возмущения концентрации. Причем за разрывом течет насыщенный раствор соли:

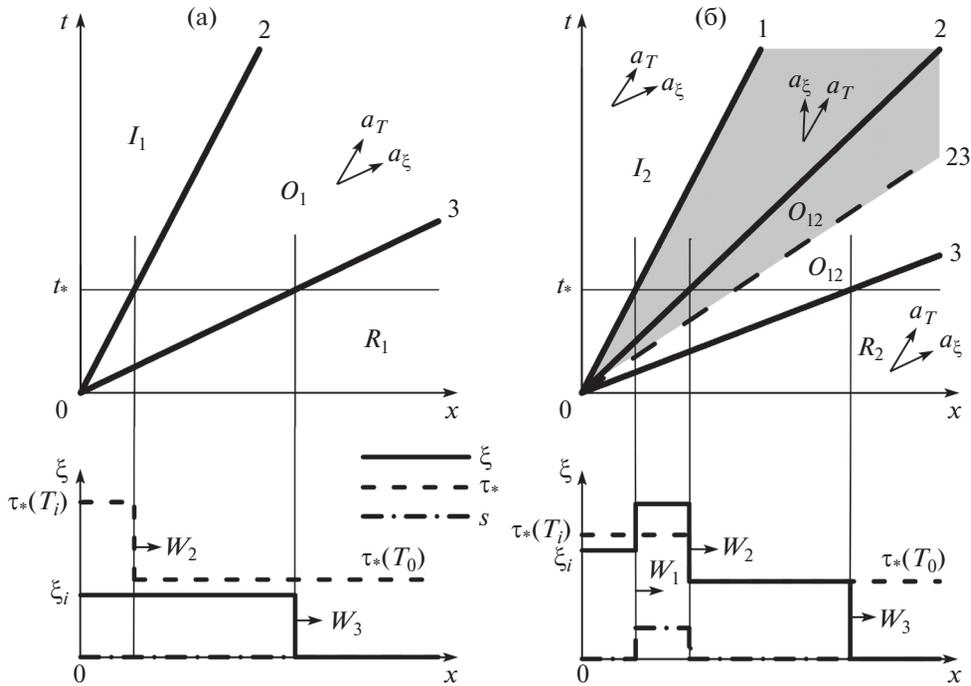


Рис. 6. Решения первого (а) и второго (б) типов. Показаны волновые картины и распределения ξ , τ_* и s в момент времени $t = t_*$. На волновых картинах сплошные прямые 1, 2 и 3 – траектории разрывов, заштрихована область двухфазного течения, а стрелки показывают направление распространения характеристических скоростей

$\xi = \tau = \tau_*(T_0)$. Далее между медленными разрывами 1 и 2 ($W_1 t_* \leq x \leq W_2 t_*$, $W_1 < a_T$, $W_2 = a_T$) распространяется область двухфазного течения. В ней насыщенность твердой фазы больше нуля ($s > 0$). При этом концентрации $\xi > \tau_*(T_i)$ и $\tau > \tau_*(T_i)$ ($\xi > \tau$) достигают максимальных значений, превышающих ξ_i и τ_i . За самым медленным разрывом 1, $x < W_1 t_*$, происходит течение нагнетаемого раствора соли ($\xi_i > \tau_i$). Фазовые превращения сконцентрированы на разрывах: на фронте 1 соль растворяется и вместе с жидкостью переносится далее в пласт, выпадая в осадок на фронте 2. В решении второго типа температура рвется только на внутреннем разрыве. Так как точка O_{12} лежит на линии термодинамического равновесия (рис. 3б), то граница между областями двухфазного и однофазного течения между разрывами 2 и 3 строго не определена. На волновой картине этой границе может соответствовать любая прямая 23, выпущенная из начала координат и расположенная между прямыми линиями 2 и 3 (рис. 6б). Предполагая, что она не совпадает с прямыми линиями 2 и 3, получим, что все разрывы в построенном решении эволюционные. Действительно, от разрыва 1 уходит характеристика $a_T^+ > W_1$, от разрыва 2 – $a_\xi^- < W_2$ и от 3 – $a_T^- < W_3$ (рис. 6б).

Ограничим на фазовой плоскости области параметров, соответствующих решениям различного типа. Сначала зафиксируем начальные параметры в пласте, т.е. положение точки R_1 (рис. 3а). Тогда, если точка I_1 , соответствующая параметрам нагнетаемой в пласт смеси, находится ниже горизонтальной штриховой прямой 2, пересекающей линию термодинамического равновесия 1 в точке B , то реализуется решение первого типа. Если же I_1 находится выше данной прямой, то реализуется решение второго типа. Таким образом, при фиксированном состоянии R_1 область параметров, соответствующая решению второго типа, ограничена прямыми 1 и 2 правее и выше точки B , а остальная подобласть ниже прямой 1 соответствует решению первого типа. Теперь зафиксируем параметры закачиваемой жидкости – состояние I_2 (рис. 3б). Тогда, если состояние R_2 находится левее вертикальной штрихованной прямой 3, пересекающей линию термодинамического равновесия в точке B , то реализуется решение второго типа, а правее – решение первого типа. Таким образом, при фиксированном состоянии I_2 область параметров, соответствующая

решению второго типа, ограничена прямыми 1 и 3 левее и ниже точки B , а остальная подобласть ниже прямой 1 соответствует решению первого типа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена задача Римана, описывающая закачку нагретого раствора соли в холодный водонасыщенный пласт. Показано, что если нагнетаемый раствор достаточно недонасыщен ($\xi_i \ll \tau_*(T_i)$), то реализуется решение задачи первого типа, содержащее только два разрыва – быстрый фронт концентрации и медленный фронт температуры. Если же нагнетаемый раствор близок к состоянию насыщения ($\xi_i \rightarrow \tau_*(T_i)$), то реализуется решение задачи второго типа, содержащее три разрыва, из которых два самых медленных ограничивают область осаждения соли, а температура изменяется только на внутреннем разрыве. Показано, что решение задачи определяется двумя параметрами подобия. Разработан геометрический метод, позволяющий на фазовой плоскости ограничить области различных типов решений и определить тип и количественные характеристики распределений параметров для заданных значений параметров подобия. Исследовано поведение решений задачи на фазовой плоскости и показано, что возможны только два описанных типа решения задачи, причем для любых начальных и граничных условий существует не более одного решения.

БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16–17–10199).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Blundy J., Mavrogenes J., Tattitch B., Sparks S., Gilmer A.* Generation of porphyry copper deposits by gas–brine reaction in volcanic arcs // *Nat. Geosci.* 2015. V. 8. P. 235–240.
<https://doi.org/10.1038/ngeo2351>
2. *Weis P.* The dynamic interplay between saline fluid flow and rock permeability in magmatic–hydrothermal systems // *Geofluids* 2015. V. 15. P. 350–371.
<https://doi.org/10.1111/gfl.12100>
3. *Afanasyev A., Blundy J., Melnik O., Sparks S.* Formation of magmatic brine lenses via focused fluid-flow beneath volcanoes // *Earth Planet. Sci. Lett.* 2018. V. 486. P. 119–128.
<https://doi.org/10.1016/j.epsl.2018.01.013>
4. *Афанасьев А.А., Мельник О.Э.* Численное моделирование формирования линзы концентрированного рассола при дегазации магматического очага // *Изв. РАН. МЖГ.* 2017. № 3. С. 88–95.
<https://doi.org/10.7868/S0568528117030100>
5. *Цыпкин Г.Г.* Накопление и выпадение солей в осадок при испарении и движении грунтовых вод // *Изв. РАН. МЖГ.* 2003. № 6. С. 84–93.
6. *Battistelli A., Calore C., Pruess K.* The simulator TOUGH2/EWASG for modelling geothermal reservoirs with brines and noncondensable gas // *Geothermics.* 1997. V. 26. P. 437–464.
[https://doi.org/10.1016/S0375-6505\(97\)00007-2](https://doi.org/10.1016/S0375-6505(97)00007-2)
7. *Калоре К., Цыпкин Г.Г.* Численное моделирование образования осадка при кипении раствора соли в геотермальном резервуаре // *Изв. РАН. МЖГ.* 2015. № 4. С. 110–118.
8. *Tsyupkin G.G., Woods A.W.* Precipitate formation in a porous rock through evaporation of saline water // *J. Fluid. Mech.* 2005. V. 537. P. 35–53.
<https://doi.org/10.1017/S0022112005005124>
9. *Афанасьев А.А.* Математическая модель неизотермической многофазной фильтрации бинарной смеси // *Изв. РАН. МЖГ.* 2011. № 1. С. 104–115.
10. *Beek W.J., Mutzall M.K., Van Heuven J.W.* *Transport Phenomena* / 2nd ed. N.Y.: Wiley, 1999. 342 p.
11. *Driesner T.* The system H_2O – $NaCl$. Part II: Correlations for molar vol-ume, enthalpy, and isobaric heat capacity from 0 to 1000°C, 1 to 5000 bar, and 0 to 1 XNaCl // *Geochim. Cosmochim. Acta* 2007. V. 71. P. 4902–4919.
<https://doi.org/10.1016/j.gca.2007.05.026>
12. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* *Нелинейные волны в упругих средах.* М.: Моск. лицей, 1998. 412 с.
13. *Buckley S.E., Leverett M.C.* Mechanism of fluid displacement in sands // *Trans. AIME.* 1942. V. 146. P. 107–116.