

УДК 532.516

ТРЕХМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ НА ТОРЦЕВЫХ ДИСКАХ

© 2019 г. В. Д. Борисевич^{a,*}, Е. П. Потанин^{a,b,**}

^a Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, Россия

^b Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Москва, Россия

* E-mail: VDBorisevich@mephi.ru

** E-mail: Potanin_EP@nrcki.ru

Поступила в редакцию 01.10.2018 г.

После доработки 18.12.2018 г.

Принята к публикации 18.12.2018 г.

Представлена аналитическая модель расчета гидродинамических характеристик потока вязкой несжимаемой жидкости во вращающемся цилиндре при наличии тормозящей крышки в случае образования на торцевых поверхностях турбулентных пограничных слоев. Анализ выполнен с учетом всех нелинейных инерционных членов в уравнениях движения в рамках интегральных соотношений Лойцянского. Приближенные профили скоростей в пограничных слоях задаются в соответствии с эмпирическим $1/7$ – законом. Основной поток разделяется на вязкое квазитвердое ядро и боковой слой, в котором сосредоточена практически вся восходящая часть циркуляционного потока. Неизвестные величины угловой скорости ядра и его границы по радиусу оцениваются из баланса моментов сил трения, действующих на основной вращающийся поток, и условия неразрывности циркуляционного течения.

Ключевые слова: вращающиеся потоки, турбулентные пограничные слои, вязкая жидкость, ядро потока

DOI: 10.1134/S0568528119030022

Вращательное движение жидких и газообразных сред находит широкое применение во многих приложениях – центробежное разделение газовых и жидких смесей [1], получение изотопомодифицированных материалов (газовые центрифуги) [2], очистка воздуха от жидкости и пыли [3], газотурбинные установки [4], насосные агрегаты [5] и др. Для многих прикладных задач важной модельной проблемой является изучение трехмерной гидродинамики вязкого газа во вращающемся цилиндре при наличии тормозящих элементов в верхней его части [6]. Последние вызывают нарушение равновесия между центробежной силой и градиентом давления в торцевых зонах и, как следствие, возникновение вторичного циркуляционного течения. Указанная задача непосредственно связана с газодинамикой центробежных разделительных устройств [2].

Интерес к изучению течений в быстро вращающемся цилиндре при наличии тормозящей крышки обусловлен тем, что такая система качественно моделирует течение в центрифуге с механическим возбуждением циркуляции [2]. Если скорость вращения разделяемой смеси в объеме определяет радиальный эффект разделения, то вторичные циркуляционные потоки, связанные с тормозящим влиянием неподвижного торца, ответственны за умножение первичного эффекта разделения по высоте аппарата. В [6] рассмотрено трехмерное движение газа во вращающемся цилиндре с тормозящей крышкой и рассчитан циркуляционный поток, вызванный тормозящим действием крышки в случае ламинарного течения в торцевых пограничных слоях. При больших числах Рейнольдса на вращающемся дне и неподвижной крышке возможно образование турбулентных пограничных слоев [7, 8]. Известно, что в газовых центрифугах для разделения изотопов, при увеличении длины ротора интенсивность циркуляционного течения падает [9]. В связи с этим приходится искать пути увеличения интенсивности циркуляции (например, увеличивать градиент температуры на боковой стенке ротора), что требует дополнительных энергозатрат и увеличивает стоимость получаемого продукта [10, 11]. Отсюда следует важность оценок влияния турбулизации течения в приторцевых пограничных слоях на интенсивность осевой циркуляции.

В настоящей работе исследуется трехмерное движение вязкой сплошной среды во вращающемся с постоянной угловой скоростью ω_0 цилиндре в случае турбулентного характера течения в пограничных слоях на верхней тормозящей крышке и нижнем торце цилиндра.

1. ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА БЕСКОНЕЧНО ПРОТЯЖЕННОМ ДИСКЕ

Рассмотрим сначала вращающийся с угловой скоростью ω_0 диск бесконечного радиуса при наличии внешнего потока вращающегося с угловой скоростью $\omega_1 < \omega_0$.

Для расчета турбулентного пограничного слоя на диске воспользуемся интегральными соотношениями, полученными в результате интегрирования уравнений Навье–Стокса в проекции на радиальное и азимутальное направления [12]

$$\frac{d}{dr} \left(r \int_0^{\delta} u^2 dz \right) - \int_0^{\delta} v^2 dz = -r \frac{\tau_r}{\rho} - \int_0^{\delta} r \frac{\partial p}{\partial r} dz \quad (1.1)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \int_0^{\delta} uv dz \right) - \omega_1 r^2 \frac{d}{dr} \left(r \int_0^{\delta} u dz \right) = -r^2 \frac{\tau_\varphi}{\rho} \quad (1.2)$$

где u и v – радиальная и азимутальные компоненты скорости среды, p – давление рабочего газа, r – радиальная координата; z – осевая координата, отсчитываемая от поверхности диска, τ_r и τ_φ – соответствующие компоненты вязких напряжений на диске. Отметим, что подобные соотношения без учета второго члена в левой части уравнения (1.2) впервые использовал Карман [13], а в дальнейшем – Окайя и Хасегава [14].

Зададим величины u и v в пограничном слое в виде (1.3)–(1.4), воспользовавшись эмпирическим законом “1/7”. Однако, в отличие от работы [14], используем симметричный профиль радиальной скорости

$$u = \alpha r (\omega_0 - \omega_1) \left(\frac{z}{\delta} \right)^{1/7} \left[1 - \left(\frac{z}{\delta} \right)^{1/7} \right] \quad (1.3)$$

$$v = r (\omega_1 - \omega_0) \left(\frac{z}{\delta} \right)^{1/7} + r \omega_0 \quad (1.4)$$

где δ – толщина пограничного слоя на диске, α – неизвестная постоянная, которая наряду с δ подлежит определению.

Вблизи диска ($z \rightarrow 0$) справедливы зависимости

$$\frac{v - r\omega_0}{r(\omega_0 - \omega_1)} = - \left(\frac{z}{\delta} \right)^{1/7}, \quad \frac{u}{r(\omega_0 - \omega_1)} = \alpha \left(\frac{z}{\delta} \right)^{1/7}$$

вследствие чего α представляет собой отношение радиальной и азимутальной составляющих напряжений трения τ_r и τ_φ ($\tau_r = -\alpha\tau_\varphi$) на диске.

Для определения τ_φ и τ_r используем полуэмпирические соотношения [7, 14]

$$\tau_\varphi = -0.0225 \rho r^{7/4} (\omega_0 - \omega_1)^{7/4} \left(\frac{v}{\delta} \right)^{1/4} (1 + \alpha^2)^{3/8} \quad (1.5)$$

$$\tau_r = 0.0225 \alpha \rho r^{7/4} (\omega_0 - \omega_1)^{7/4} \left(\frac{v}{\delta} \right)^{1/4} (1 + \alpha^2)^{3/8} \quad (1.6)$$

где ν – коэффициент кинематической вязкости среды.

Будем предполагать, что полученные решения для протяженного диска справедливы при условии $10^5 \leq \text{Re} \leq 10^6$ [7].

В пограничном слое радиальный градиент давления равен градиенту давления во внешнем потоке [6, 15]

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega_1^2 r \quad (1.7)$$

Полагая согласно [14] $\delta = \gamma r^{3/5}$ и используя (1.1)–(1.7), получим следующие уравнения:

$$M \alpha^2 \gamma (1-m)^2 + (m-1)(1+8m) = -N \alpha (1+\alpha^2)^{3/8} (1-m)^{7/4} \quad (1.8)$$

$$R \alpha \gamma [23(1-m)^2 + 50m(1-m)] = N \alpha (1+\alpha^2)^{3/8} (1-m)^{7/4} \quad (1.9)$$

где $m = \omega_1/\omega_0$; $M = 504/275$; $N = 1/44$; $R = 7/1800$.

Решение системы (1.8)–(1.9) приводит к следующему результату:

$$\alpha^2 = \frac{(1+7m-8m^2)}{(1-m)[S(1-m)+7m]}, \quad \gamma = \left\{ \frac{N(1+\alpha^2)^{3/8} (1-m)^{7/8}}{R \alpha [23(1-m)^2 + 50m(1-m)]} \right\}^{4/5} \quad (1.10)$$

где $S = 2779/550$.

Определив на основании (1.5) и (1.10) напряжение τ_ϕ , можно рассчитать коэффициент момента сил трения, действующих на одну сторону диска

$$C_M = \frac{2M}{\rho \omega^2 R_0^5} \quad (1.11)$$

где $M = 2\pi \int_0^{R_0} r^2 \tau_\phi dr$

Отметим важность учета в левой части уравнения для проекции азимутального импульса второго члена, описывающего ускорение среды

$$A = -\omega_1 r^2 \frac{d}{dr} \left(r \int_0^\delta u dz \right)$$

Дело в том, что знак этого члена противоположен инерционному ускорению, описываемому первым членом в уравнении (1.2), при радиальном потоке, направленном к периферии, и совпадает с ним при обратном направлении этого потока. По этой причине в случае вращения среды над неподвижным основанием и диска, вращающегося в движущейся среде (при $\omega_0 > \omega_1$), когда направление радиального потока изменится на противоположное, инерционные ускорения имеют противоположные знаки, по-разному влияя на циркуляционный поток. Важно отметить, что при учете в (1.2) ускорения A и одновременном использовании несимметричного профиля радиальной скорости [14] решение задачи в случае вращения среды над неподвижным основанием отсутствует.

Рассмотрим подробнее частный случай торможения вращающегося над неподвижным основанием азимутального потока $\omega_1 \neq 0$, $\omega_0 = 0$.

На рис. 1 линией 1 показана определенная согласно (1.11) зависимость C_M от величины $Re_1^{0.2}$, где $Re_1 = \omega_1 R_1^2 / \nu$ – число Рейнольдса, рассчитанное по угловой скорости ω_1 . Пунктирной линией 2 показаны результаты расчета, полученные без учета второго члена в левой части уравнения (2) [14]. Как следует из расчета, выполненного с использованием формул (1.5)–(1.11), выражение для коэффициента момента сил трения принимает вид

$$C_M = 0.034 Re^{-0.2} \quad (1.12)$$

Отметим, что полученная зависимость (1.12) учитывает как упомянутый выше инерционный член, так и изменение второго члена в скобках для профиля радиальной скорости.

Аналогичное соотношение по результатам [14] имеет вид

$$C_M = 0.038 Re^{-0.2} \quad (1.13)$$

Воспользуемся теперь общими соотношениями (1.10) для расчета случая вращения диска в неподвижной среде ($\omega_1 = 0$, $\omega_0 \neq 0$).

На рис. 2 приведены зависимости коэффициента момента сил трения от числа Рейнольдса для диска, вращающегося в неподвижной среде, полученные расчетным путем и эксперимен-

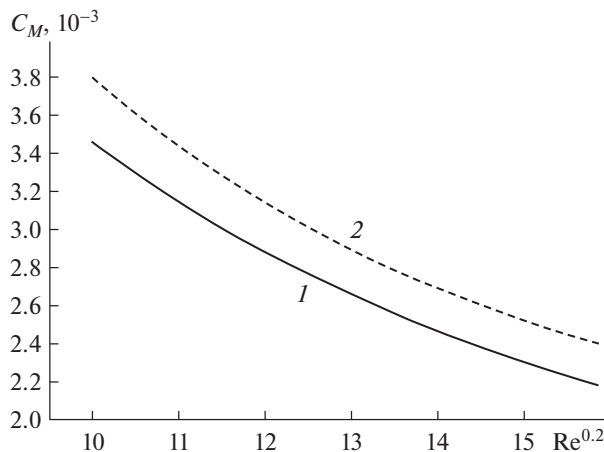


Рис. 1. Зависимости коэффициента момента сил трения о поверхность неподвижного диска при наличии внешнего вращающегося потока: 1 – расчет с использованием формул (1.5)–(1.11); 2 – результаты [14] без учета второго члена в левой части уравнения (1.2) в случае несимметричного профиля радиальной скорости.

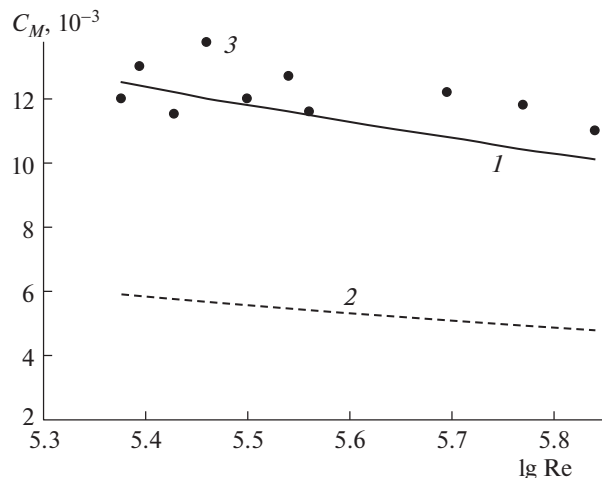


Рис. 2. Зависимости коэффициента момента сил трения от числа Рейнольдса при вращении диска в неподвижной среде: 1 – расчет с использованием формул (1.5), (1.10) и (1.11); 2 – результаты расчета, полученные в [14]; 3 – экспериментальные данные [16].

тально. Сплошная линия 1 описывает зависимость C_M от $\lg Re$, где число Рейнольдса определено по угловой скорости вращения диска ω_0 . Пунктирной линией 2 показаны результаты расчета из работы [14] для турбулентного пограничного слоя на протяженном диске, вращающемся в неподвижной среде. Также показаны экспериментальные данные 3 работы [16]. Видно, что влияние инерционного члена A не проявляется, однако симметризация профиля способствует лучшему согласованию результатов эксперимента и расчета.

2. ТРЕХМЕРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТОРМОЗЯЩЕЙ КРЫШКИ

Исследуем поле скоростей во вращающемся с угловой скоростью ω_0 прямом круговом цилиндре при наличии неподвижного верхнего торца, воспользовавшись предложенной в [6] приближенной методикой учета влияния пограничных слоев на торцах вращающегося цилиндра. Предположим, что на обеих торцевых поверхностях образуются тонкие турбулентные пограничные слои. Будем также предполагать, что полученные решения для протяженного диска в условиях неперекрывающихся пограничных слоев справедливы при условии $10^5 \leq Re \leq 10^6$ [7]. Отсутствие перекрытия слоев ($L \gg \delta_r(R) + \delta_b(R)$) при $Re = 10^6$ приводит к неравенству $L \gg 10^{-2}$ м. Назовем основным объемом всю область потока за исключением торцевых пограничных слоев. Предположим, что в центральной части основного объема возникает ламинарное квазитвердое невязкое ядро с исчезающе малой радиальной скоростью, а к боковой поверхности примыкает вязкий ламинарный слой, в котором доминирует восходящий осевой поток – рис. 3.

Пусть ядро радиуса R_1 вращается с некоторой неизвестной угловой скоростью Ω . Эти характеристики ядра вместе с толщинами пограничных слоев δ_r , δ_b , а также параметрами циркуляционного течения подлежат определению. Следуя [6], будем предполагать, что в основном объеме отсутствуют изменения окружной и осевой компонент скорости по высоте цилиндра $\partial V_\phi / \partial z = \partial W_z / \partial z = 0$.

Предположим, что полученное выше решение для бесконечно протяженных дисков приближенно справедливо до радиуса $r = R_1$. Решение для окружной скорости в слое на боковой поверхности v^s найдем сшиванием на границе двух областей при $r = R_1$.

Решение для v^s будем искать в виде

$$v^s = \Omega r - \frac{(\Omega - \omega_0)R_0}{(R_0 - R_1)^2} (r - R_1)^2 \quad (2.1)$$

Осевой перепад давления определим из баланса центробежных сил, действующих в пограничных слоях на нижнем и верхнем дисках $\Delta p_z \approx Qr^2$, где

$$Q = \frac{\rho\omega_0^2}{72}(1 + 7m_\Omega), \quad m_\Omega = \Omega/\omega_0$$

Осевую компоненту скорости в слое на боковой поверхности $w^s(r)$ определим из баланса вязких сил и сил давления

$$\eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw^s}{dr} = -\frac{Qr^2}{L} \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) следует решать при следующих граничных условиях

$$w^s(R_1) = -w^c(R_1), \quad w^s(R_0) = 0 \quad (2.3)$$

Здесь $w^c(R_1) = \frac{7}{36} \Omega \alpha \gamma(\Omega) (v/\Omega)^{0.2} R_1^{0.6}$ – абсолютная величина осевой скорости в ядре на радиусе R_1 .

Интегрируя (2.2) с условиями (2.3), получим

$$w^s(r) = \frac{D}{16}(R_0^4 - r^4) + \left(\frac{(R_0^4 - R_1^4)D}{16} + w^c(R_1) \right) \frac{\ln(r/R_0)}{\ln(R_0/R_1)} \quad (2.4)$$

где $D = \frac{\rho\omega_0^2}{72\eta L}(1 + 7m_\Omega)$.

Для определения неизвестных R_1 и m_Ω , входящих в (2.4), воспользуемся балансами сил трения, действующих на вращающийся основной объем [6, 15], и неразрывностью циркуляционного потока

$$M_0 + M_s = M_1, \quad (2.5)$$

$$\int_0^{R_1} w^c(r) 2\pi r dr = \int_{R_1}^{R_0} w^s(r) 2\pi r dr. \quad (2.6)$$

Здесь M_0 , M_s – вращающие моменты сил трения, действующие со стороны нижнего основания и боковой поверхности цилиндра, M_1 – тормозящий момент со стороны неподвижного торца. Аналогично [6] из (2.5)–(2.6) с учетом (1.5), (2.1) и (2.4) получим приближенные соотношения для определения R_1 и Ω

$$\frac{1}{207} (2d)^{3/20} \left[\frac{m_\Omega^{9/8} (1 + \alpha_t^2)^{3/8}}{\gamma_t^{1/4}} - \frac{(1 - m_\Omega)^{7/4}}{\gamma_b^{1/4}} \right] = \frac{l^2 (1 - m_\Omega) (1 + x_1)}{(1 - x_1) \text{Re}_L} \quad (2.7)$$

$$\frac{7}{78} M x_1^{13/5} = \left\{ \frac{(1 - x_1^2)dc}{32} - \frac{(1 - x_1^6)c}{96} + \left[\frac{(1 - x_1^4)dc}{16 \ln x_1} + \frac{7}{36 \ln x_1} M x_1^{3/5} \right] \left(\frac{1}{4} + \frac{x_1^2}{2} \ln x_1 - \frac{x_1^2}{4} \right) \right\} \quad (2.8)$$

где $x_1 = \frac{R_1}{R_0}$, $l = \frac{L}{R_0}$, $\text{Re}_L = \frac{\omega_0 L^2}{\nu}$, $d = \frac{\omega_0^2 R_0^4}{2\nu^2}$, $c = \frac{1 + 7m_\Omega}{36}$, $M = \frac{m_\Omega^{4/5} \text{Re}_L}{(2d)^{1/10} l} \alpha_t \gamma_t$, $\alpha_t = \alpha(m_\Omega = 0)$, $\alpha_b = \alpha(m_\Omega)$, $\gamma_t = \gamma(m_\Omega = 0)$, $\gamma_b = \gamma(m_\Omega)$.

Отметим, что при рассмотрении вращательного течения в длинном прямом круговом цилиндре условия образования турбулентных пограничных слоев могут отличаться от случаев, исследованных в ранних работах [16, 17] с неподвижным кожухом, поскольку действие вращающейся боковой поверхности может затягивать процесс турбулизации. По этой причине трудно оценить степень выполнения предположения о характере течения в пограничных слоях на торцах. В работе [6], в частности, использована гипотеза о ламинарности пограничных слоев даже при боль-

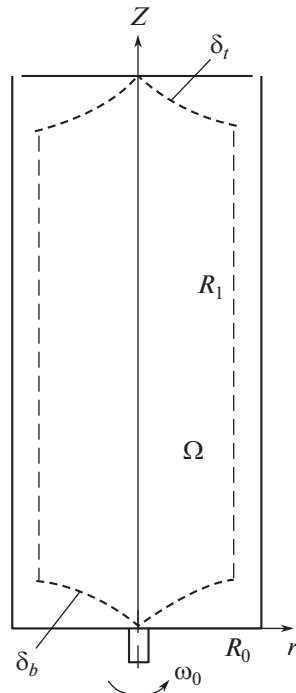


Рис. 3. Области течения во вращающемся цилиндре с неподвижной крышкой.

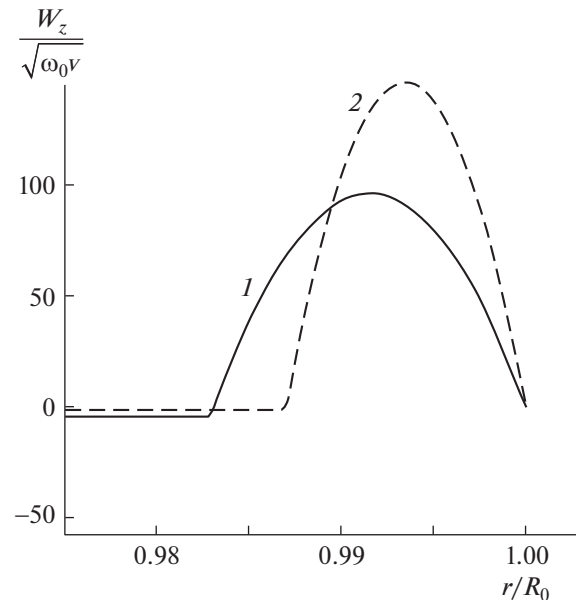


Рис. 4. Профили осевой скорости в торцевых пограничных слоях: 1 – расчет в предположении, что на дисках развиваются турбулентные пограничные слои; 2 – расчет в предположении ламинарности течения в пограничных слоях [6].

ших числах Рейнольдса. Ниже проводится сравнение результатов расчетов при обоих вышеуказанных предположениях.

Выполним расчет для воздуха при нормальных условиях. Если предположить, что на дисках развиваются турбулентные пограничные слои, то в рассматриваемом диапазоне чисел Рейнольдса сила трения вращательного потока на дисках возрастает по сравнению со случаем ламинарного течения [7]. Поэтому можно было бы предположить, что существенно больший момент сил трения в случае турбулентного пограничного слоя должен приводить к заметному увеличению циркуляционного потока. Однако результаты расчетов свидетельствуют о том, что в случае турбулентных пограничных слоев расширяется область слоя на боковой стенке цилиндра (см. рис. 4).

При этом турбулизация течения в пограничных слоях не приводит к заметному увеличению циркуляционного потока. Полученный результат можно объяснить тем обстоятельством, что силы трения увеличиваются не только для вращательного потока, но и для радиального течения в пограничном слое, компенсируя увеличение момента сил азимутального трения.

На рис. 4 сплошной линией 1 показаны профили осевой скорости, рассчитанные в предположении о развитии турбулентных торцевых пограничных слоев, полученные в результате численного решения системы уравнений (2.7), (2.8) для следующих значений параметров: $\omega_0 = 10^3$ 1/с, $L = 0.1$ м, $R_0 = 0.05$ м, $\nu = 1.5 \times 10^{-5}$ м²/с; рабочая среда – воздух при нормальном давлении $P = 10^5$ Па и комнатной температуре $T = 300$ К. Пунктирная кривая 2 соответствует случаю ламинарных пограничных слоев на торцах.

Зависимость безразмерной угловой скорости вращения ядра потока от отношения длины цилиндра к его радиусу l показана на рис. 5 сплошной линией 1. Пунктирной линией 2 приведены результаты расчета в случае ламинарного течения [6]. Как видно, турбулентность течения в пограничных слоях способствует уменьшению скорости вращения невязкого ядра.

На рис. 6 приведены результаты расчета коэффициента момента сил трения, действующих на газ со стороны вращающегося дна цилиндра в случае $l \rightarrow 0$, когда можно не учитывать влияние боковых стенок. Также показаны экспериментальные результаты 2, полученные в работе [17] для шероховатого диска.

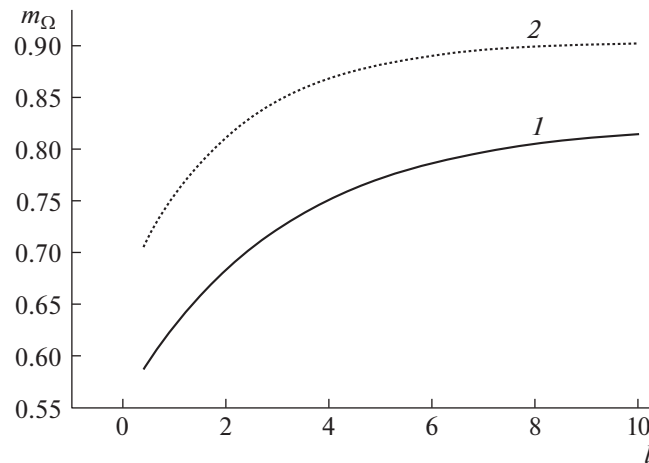


Рис. 5. Зависимость безразмерной угловой скорости вращения ядра m от отношения l высоты цилиндра к его радиусу: 1 – результаты расчета в предположении турбулентности пограничных слоев; 2 – расчет при допущении ламинарности пограничных слоев [6].

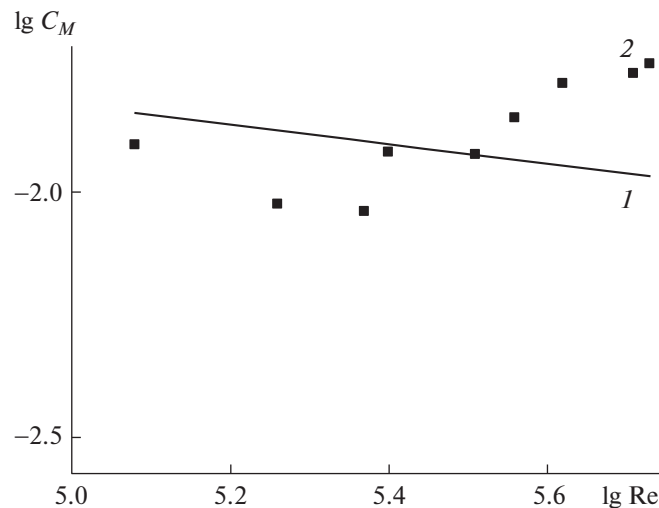


Рис. 6. Зависимости коэффициента момента сил трения от числа Рейнольдса: 1 – результаты расчета в случае $l \rightarrow 0$; 2 – экспериментальные результаты [17].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе интегральных соотношений рассчитаны турбулентные пограничные слои на вращающихся и неподвижных дисках с учетом нелинейных инерционных членов в уравнениях движения.

Результаты, полученные для протяженных дисков, использованы для расчета гидродинамических характеристик течения во вращающемся цилиндре с неподвижной крышкой в предположении об образовании невязкого ядра потока.

Показано, что возбуждение турбулентности в пограничных слоях на торцах приводит к уменьшению угловой скорости невязкого ядра потока из-за возрастания момента сил трения тормозящей крышки. Однако при этом не происходит существенного увеличения скорости осевой циркуляции в роторе.

Работа выполнена при поддержке Программы повышения конкурентоспособности Национального исследовательского ядерного университета МИФИ (контракт № 02.a03.21.0005 от 27 августа 2013).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Минакер В.Е., Джинчарадзе Е.К.* Центробежный аппарат для разделения смеси, состоящей из двух жидких и одной твердой фракций, Патент RU 2032470, 1995.
2. *Борисевич В.Д., Борман В.Д., Сулаберидзе Г.А., Тихомиров А.В., Токманцев В.И.* Физические основы разделения изотопов в газовой центрифуге // М: Изд. дом МЭИ, 2011. 275 с.
3. *Исакссон Р., Торвид П.* Центробежный сепаратор и ротор, Патент RU 2523817, 2014.
4. *Поршаков Б.П., Апостолов А.А., Никишин В.И.* Газотурбинные установки на газопроводах. М: Нефть и газ, 2003. 240 с.
5. *Кишкин А.А., Краев М.В., Жуйков Д.А., Мелкозёров М.Г., Черненко Д.В.* Расчет течения в конической шели с внутренним вращающимся диском. Программа для ЭВМ. РОСПАТЕНТ, св-во об офиц. регистрации № 2001611149 от 06.09. 2001 г.
6. *Потанин Е.П.* Трехмерное движение газа во вращающемся цилиндре с тормозящей крышкой // Изв. РАН. МЖГ. 2013. № 1. С. 78–87.
7. *Дорфман Л.А.* Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел. М.: ФИЗМАТГИЗ, 1960. 260 с.
8. *Itayama Sh., Alfredsson P.H., Lingwood R.J.* Experimental study of rotating-disk boundary-layer flow with surface roughness // J. Fluid Mech. 2016. V. 786. P. 5–28.
9. *Gu Z.Y., Jiang D.J., Zeng S., Borisevich V.D.* A homotopy algorithm to solve the problems of flows under strong rotation // J. Phys.: Conf. Ser. 2018. 1099. 012010.
10. *Борисевич В.Д., Наумочкин В.В., Смаков Б.М.* Механическое и тепловое возбуждение течения газа во вращающемся цилиндре // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 4. С. 24–28.
11. *Белоцерковский О.М., Бетелин В.Б., Борисевич В.Д., Денисенко В.В., Ериклинец И.В., Козлов С.А., Конюхов А.В., Опарин А.М., Трошкин О.В.* К теории противотока во вращающемся вязком теплопроводном газе // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51(2). С. 222–236.
12. *Лойцянский Л.Г.* Ламинарный пограничный слой. М.: ГИФМЛ, 1962.
13. *Karman Th.V.* Laminare and turbulente reibung // ZAMM. 1921. V. 1. P. 233–252.
14. *Okaya T., Hasegawa M.* On the friction to the disc rotating in cylinder // Jpn. J. Phys. 1939. V. 13. № 1. P. 78–91.
15. *Borisevich V.D., Potanin E.P., Whichello J.* Circulation control in MHD rotating flows // J. Fluid Mech. 2017. V. 829. P. 328–244.
16. *Schmidt W.* Ein einfaches Messverfahren für Drehmomente // Z. VDI. 1921. № 65. P. 441–444.
17. *Theodorsen Th., Regier A.* Experiments on drag of revolving discs, cylinders and streamline rods at high speeds. NASA Report. 1944. № 793.