

УДК 532.591

ПРОЦЕСС ФОРМИРОВАНИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН, ИНИЦИИРОВАННЫЙ НАЧАЛОМ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

© 2019 г. П. В. Матюшин*

Институт автоматизации проектирования РАН, Москва, Россия

* e-mail: pmatyushin@mail.ru

Поступила в редакцию 11.04.2018 г.

После доработки 16.10.2018 г.

Принята к публикации 18.10.2018 г.

Впервые детально рассмотрен механизм формирования пространственных гравитационных внутренних волн, инициированный началом движения диска заданного диаметра и конечной толщины в горизонтальном направлении вдоль оси симметрии диска справа налево с заданной постоянной скоростью в линейно стратифицированной по плотности несжимаемой вязкой жидкости благодаря численному решению системы уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска и визуализации пространственной вихревой структуры рассчитанного течения. Полученные поля векторов скоростей и возмущения давления обладают горизонтальной и вертикальной плоскостями симметрии, проходящими через ось симметрии диска. Описан процесс формирования течения в верхнем полупространстве, обусловленный сдвиговой и гравитационной неустойчивостями, – сначала между тыльным торцом диска и местом импульсного старта формируются две горизонтальные вихревые нити, трансформирующиеся в ножки шпилькообразной вихревой петли, головная часть которой расположена правее места старта. Далее над местом старта периодически в течение половины периода плавучести жидкости формируются вихревые кольца, левые половины которых преобразуются в полуволны, заполняющие пространство между диском и местом старта.

Ключевые слова: стратифицированная вязкая жидкость, диск, гравитационные внутренние волны, математическое моделирование

DOI: 10.1134/S0568528119020099

Понимание физики сложных трехмерных процессов генерации пространственных гравитационных внутренних волн движением тел в горизонтальном направлении в устойчиво стратифицированной вязкой сплошной среде океана и атмосферы важно как с практической, так и с теоретической точек зрения. Известно, что начало движения тела сопровождается излучением пучка нестационарных гравитационных внутренних волн, которые распространяются вдоль радиус-векторов от места старта Q тела [1, 2].

В настоящей работе при помощи математического моделирования течений линейно стратифицированной по плотности несжимаемой вязкой жидкости и визуализации пространственной вихревой структуры рассчитанных течений впервые детально рассмотрен сложный трехмерный механизм формирования волн, инициируемый началом движения диска диаметром d и толщиной $h = 0.76d$ в горизонтальном направлении вдоль своей оси симметрии Z справа налево со скоростью U при $0.5 < Fr < 4$ и $Re = 50$, где $Fr = UT_b/(2\pi d)$ – внутреннее число Фруда, $Re = Ud/\nu$ – число Рейнольдса, T_b и ν – период плавучести и коэффициент кинематической вязкости жидкости соответственно. В [3] описана начальная стадия этого механизма при $T < 0.5$ в вертикальной плоскости симметрии течения для $Fr = 1$, $Re = 500$; T – обезразмеренное на T_b время, прошедшее с начала старта диска.

Традиционно экспериментаторы, исследуя течения стратифицированной вязкой жидкости, рассматривают картину гравитационных внутренних волн и след околодвигающихся тел (сфер и цилиндров) [2, 4–7] или обтекаемых препятствий на поверхности нашей планеты [8] только в вертикальной плоскости, тогда как математическое моделирование дает трехмерную вихревую структуру внутренних волн [3, 9–11]. Механизм формирования этой структуры эксперименталь-

но не исследован. В [10] приведена классификация течений стратифицированной вязкой жидкости около сферы при $0.005 < Fr < 100$ и $1 < Re < 500$, которая хорошо согласуется с экспериментом [6]. Результаты [12] для сферы при $Re = 200$, $0.125 < Fr < 100$ хорошо согласуются с экспериментом [6] при $0.25 < Fr < 100$. При $Fr < 0.25$ в [6] наблюдается нестационарное периодическое течение в следе за сферой, а в [12] – стационарное течение. Классификация режимов течений около диска толщиной $h = 0.76d$ при $0.05 < Fr < 100$ и $50 < Re < 500$ приведена в [11].

Для получения начального представления о трехмерном механизме формирования пространственных гравитационных внутренних волн может служить задача о течении, индуцированном диффузией на сфере, помещенной в покоящуюся непрерывно стратифицированную вязкую жидкость [13]. Рассматривалось течение, осесимметричное относительно вертикальной прямой q , проходящей через центр Q сферы, при симметрии поля векторов скорости еще и относительно горизонтальной плоскости, проходящей через точку Q . При $T \leq 0.5$ в верхнем полупространстве генерируется осесимметричное вихревое кольцо, заполняющее все это полупространство. При $T > 0.5$ в течение каждого $\Delta T = 0.5$ в окрестности прямой q над сферой генерируется новое вихревое кольцо, которое уменьшает вертикальные размеры ранее сгенерированных колец. Каждая пара колец формирует одну гравитационную внутреннюю волну. Групповая скорость этих волн перпендикулярна их фазовой скорости и направлена по радиус-вектору от каждого из двух эффективных центров волнообразования – полюсов сферы [13]. Волновая энергия распространяется в радиальных направлениях от полюсов сферы с групповой скоростью параллельно гребням волн. Со временем на больших удалениях от тела фазовые поверхности с постоянной угловой скоростью стремятся к горизонтальным плоскостям, проходящим через центры волнообразования. При $T > 500$ около этих горизонтальных плоскостей останутся только два вихревых кольца, сильно сплюснутых в вертикальном направлении и наблюдаемых в эксперименте [13].

Для понимания пространственного механизма формирования гравитационных внутренних волн служит и двухмерная задача о равномерном движении бесконечно длинного горизонтально ориентированного цилиндра в горизонтальной направлении справа налево, перпендикулярно своей оси симметрии Z (при $Re < 200$ и $Fr < 1$) [2, 3, 9, 10]. Здесь около места Q старта цилиндра появляются два центра волнообразования, как и в эксперименте [13]. Поле векторов скорости здесь будет симметричным относительно горизонтальной прямой, проходящей через точку Q . В течение каждого $\Delta T = 1$, справа и слева от вертикальной прямой q , проходящей через Q , в верхней и нижней полуплоскостях генерируется по одной новой внутренней волне [3, 9, 10]. Волны левее прямой q двигаются влево вместе с цилиндром, а волны правее прямой q остаются на месте и сжимаются в вертикальном направлении под действием вновь нарождающихся волн. Картины изолиний горизонтального градиента плотности около квадратного цилиндра, полученные в результате математического моделирования в [3, 9, 10] при $Fr = 0.1$, очень хорошо согласуются с теоретическими картинками “вертикальная щель – нож Фуко” течений около кругового цилиндра, полученными в эксперименте [2] при $Fr = 0.094$.

Настоящая статья является логическим продолжением работ автора [3, 9, 10, 13], посвященным анализу механизма формирования гравитационных внутренних волн.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД ЕЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим равномерное течение линейно стратифицированной по плотности несжимаемой вязкой жидкости в горизонтальном направлении Z слева направо со скоростью U . В некоторый момент времени в это течение мгновенно вносится диск с диаметром d , толщиной $h = 0.76d$ и с горизонтальной осью симметрии Z (рис. 1а), и ставится задача об изменении картины течения. Для ее решения в геометрическом центре диска помещается начало неподвижной декартовой системы координат (СК1) (X, Y, Z) , где ось X – вертикальна. Плотность жидкости $\rho(X, Y, Z) = 1 - 0.5 \cdot X/\Lambda + S(X, Y, Z)$ безразмерна на плотность на уровне центра диска ρ_0 , а координаты X, Y, Z – на $d/2$; $N = 2\pi/T_b$ и $\Lambda = g/N^2$ – частота и масштаб плавучести жидкости; $A = \Lambda/d$ – отношение масштабов; g – ускорение свободного падения; S – безразмерное на ρ_0 возмущение солёности, которое в начале расчета равно нулю. Значения параметра $A > 100$ выбрали для выполнения реализуемых в эксперименте условий $N \approx 1 \text{ с}^{-1}$, $0.1 \text{ см} < d < 10 \text{ см}$.

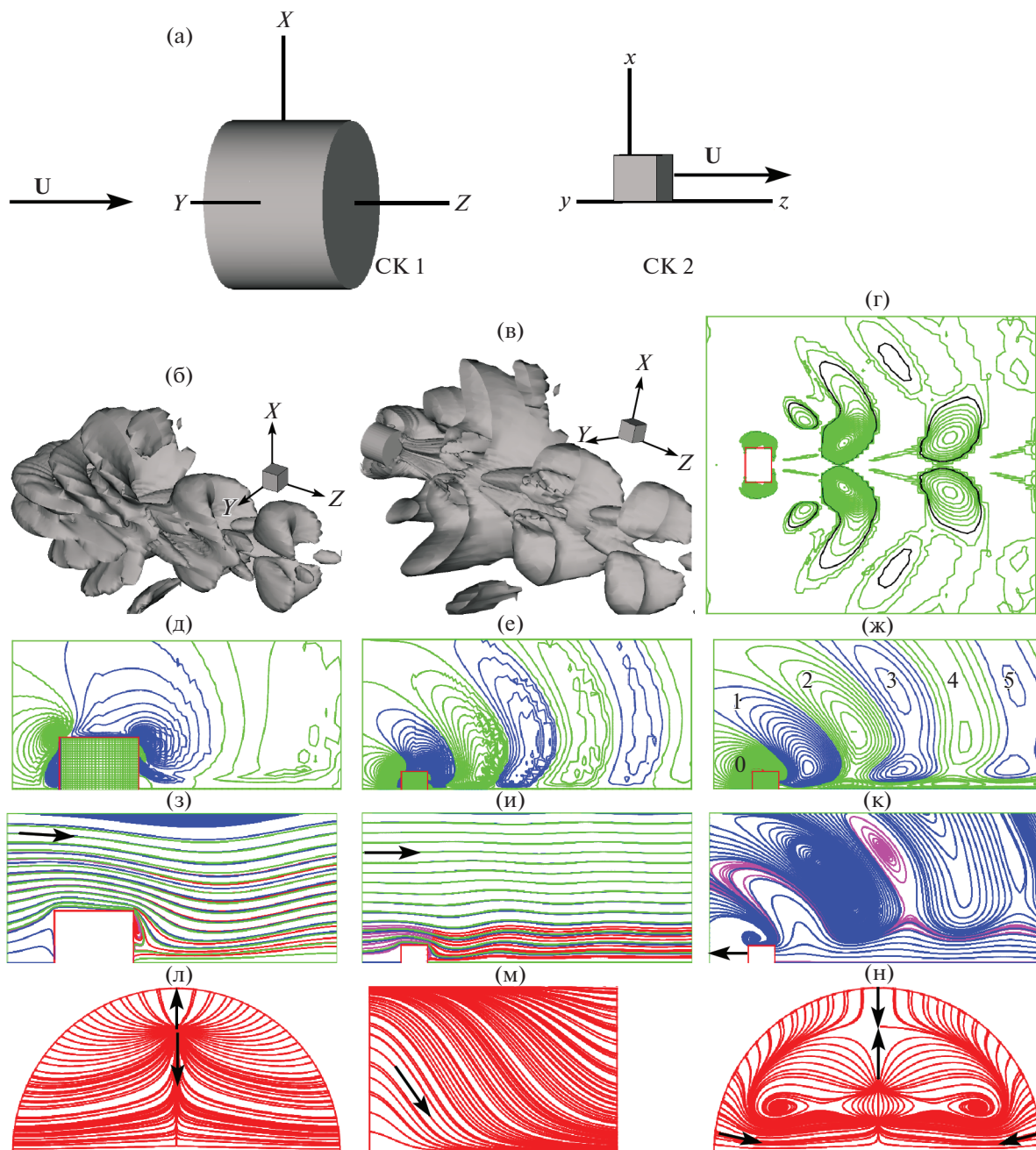


Рис. 1. (а) Постановка задачи об исследовании течения жидкости около диска. (б-н) Визуализация установившегося со временем течения при $Fr = 0.5$, $Re = 50$, $A = 981.6$, $T = 11.46$ ($C_d = 2.649$) в пространстве (б-в), в вертикальной плоскости $X-Z$ (г-к) и на диске (л-н): (б-в) – изоповерхности $\beta = 0.02$; г-ж – изолинии β с шагом 0.01 (г), S_z с шагами 4×10^{-5} и 10^{-5} (д и е) и S с шагом 10^{-5} (ж); з-к – линии тока в СК1 (з-и) и СК2 (к); л-н – линии трения передней (л), боковой (м) и тыльной (н) поверхностях диска в СК1

Для математического моделирования поставленной задачи решается система уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска, записанная в цилиндрической СК (Z, R, φ): $Z = Z$, $X = R \cos \varphi$, $Y = R \sin \varphi$. В декартовой СК1 эта система уравнений выглядит следующим образом

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) S = \frac{2}{ScRe} \Delta S + \frac{v_x}{2A} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{2}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v} + \frac{A}{2\text{Fr}^2} S \frac{\mathbf{g}}{g} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.3)$$

где $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ – вектор скорости; p – возмущение давления, обезразмеренное на $\rho_0 U^2$; t – время (обезразмеренное на $f = d/(2U) = 1/(2\text{Fr}N)$); $\text{Sc} = \nu/\kappa = 709.22$ – число Шмидта; κ – коэффициент диффузии соли; ∇ и Δ – операторы Гамильтона и Лапласа.

Для решения этой задачи использовался численный метод расщепления по физическим факторам МЕРАНЖ [14], который успешно применялся для моделирования течений несжимаемой вязкой жидкости около сфер, цилиндров и дисков [3, 9–11, 13, 15, 16], а также для течений со свободной поверхностью [14].

Использовалась цилиндрическая расчетная сетка $[Z, R, \varphi] = [I \times J \times K] = [240 \times 110 \times 40]$, занимающая область $[-13 < Z < 50, 0 < R < 30, 0 < \varphi < 2\pi]$. Сетка сгущается ко всем поверхностям диска и к оси Z так, чтобы на скоростной пограничный слой приходилось 5 ячеек сетки. При удалении от поверхности обтекаемого тела вдоль направлений Z или R длины сторон ячеек сетки вдоль Z и R монотонно увеличиваются по полиномиальному закону до некоторого заданного максимального значения и далее не меняются. Минимальные (максимальные) размеры ячеек сетки для $\text{Re} = 50$ вдоль направлений Z и R равны 0.036 и 0.035 (0.41 и 0.67) соответственно.

Применялся разнесенный сеточный шаблон, когда переменные S и p определяются в центрах расчетных ячеек, а компоненты скорости – в центрах их граней; переменные S и p на поверхности тела не определялись.

Приведем алгоритм расчета для декартовой СК1. В начальный момент времени $t_0 = 0$ задавалось некоторое начальное течение около диска. Пусть при $t_n = n\tau$, где τ – величина шага по времени, n – номера шагов ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$), известны значения S , $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ и p . Тогда схему нахождения неизвестных функций S , \mathbf{v} и p в момент времени $t_{n+1} = (n+1) \cdot \tau$ можно представить в виде

$$\frac{S^{n+1} - S^n}{\tau} = -(\mathbf{v}^n \cdot \nabla) S^n + \frac{2}{\text{ScRe}} \Delta S^n + \frac{v_x^n}{2A} \quad (1.4)$$

$$\frac{\mathbf{w} - \mathbf{v}^n}{\tau} = -(\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^n + \frac{2}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v}^n + \frac{A}{2\text{Fr}^2} S^{n+1} \frac{\mathbf{g}}{g} \quad (1.5)$$

$$\tau \Delta p = \nabla \cdot \mathbf{w} \quad (1.6)$$

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{w}}{\tau} = -\nabla p \quad (1.7)$$

где \mathbf{w} – вспомогательная промежуточная скорость.

Сложение уравнений (1.5) и (1.7) дает уравнение (1.2). Уравнение (1.6) получается при скалярном умножении оператора Гамильтона на уравнение (1.7), учитывая уравнения неразрывности (1.3).

Для аппроксимации конвективных членов уравнений (1.4–1.5) использовалась гибридная конечно-разностная схема, для которой характерны второй порядок аппроксимации по пространственным переменным, минимальная схемная вязкость и дисперсия, работоспособность в широком диапазоне Re и Fr и монотонность [14]. Для аппроксимации других пространственных производных уравнений (1.4–1.7) – центральные разности.

Рассмотрим аппроксимацию уравнения Пуассона (1.6) на входной части внешней границы цилиндрической расчетной области ($Z = -13$)

$$\tau \frac{(p_{2,j,k} - p_{1,j,k}) - (p_{1,j,k} - p_{0,j,k})}{h^2} + \Lambda = \frac{w_{z,2,j,k} - w_{z,1,j,k}}{h} + \Lambda, \quad (1.8)$$

где h – шаг сетки, $p_{0,j,k}$ и $p_{1,j,k}$ – значения давления в центрах ячеек “0, j , k ” и “1, j , k ”, расположенных левее и правее по отношению к границе соответственно ($j = 1, 2, \dots, J$; $k = 1, 2, \dots, K$). В (1.8) граничные значения $p_{0,j,k}$ и $w_{z,1,j,k}$ неизвестны.

Выпишем выражение для $w_{z,1,j,k}$, полученное из уравнения (1.7)

$$w_{z,1,j,k} = v_{z,1,j,k}^{n+1} + \tau \frac{(p_{1,j,k} - p_{0,j,k})}{h}$$

Подставим это выражение для $w_{z,1,j,k}$ в уравнение (1.8)

$$\tau \frac{(p_{2,j,k} - p_{1,j,k})}{h^2} + \Lambda = \frac{w_{z,2,j,k} - v_{z,1,j,k}^{n+1}}{h} + \Lambda. \quad (1.9)$$

Таким образом, на входной части внешней границы цилиндрической расчетной области ($Z = -13$) вместо уравнения (1.8) можно использовать (1.9), где уже нет неизвестных граничных значений $p_{0,j,k}$ и $w_{z,1,j,k}$. Аналогично можно показать, что для всех оставшихся границ граничные условия для давления не нужны.

На твердой поверхности диска ставятся граничные условия прилипания и непротекания: $\mathbf{v} = (v_z, v_R, v_\varphi) = (0, 0, 0)$, $\partial\rho/\partial n = 0$, где \mathbf{n} – вектор нормали к поверхности диска (на передней и тыльной сторонах диска: $\partial S/\partial z = 0$; на боковой стороне диска: $\partial S/\partial R = 0.5 \cos \varphi/A$). На входной части внешней границы цилиндрической расчетной области ($Z = -13$): $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$, $\partial S/\partial z = 0$. На боковой части внешней границы ($R = 30$): $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$, $\partial S/\partial R = 0$. На выходной части внешней границы ($Z = 50$): $v_z = 1$, $v_R = 0$, $\partial v_\varphi/\partial z = 0$, $\partial S/\partial z = 0$. На бесконечном удалении от тела $S = 0$, но в силу ограниченных размеров расчетной сетки на ее внешней границе ставятся “свободные” граничные условия: $\partial S/\partial n = 0$. На выходной части внешней границы естественно поставить “свободные” граничные условия $\partial v_\varphi/\partial z = 0$ для третьей компоненты вектора скорости. К сожалению, постановка аналогичных “свободных” граничных условий для всех компонент скорости при $Z = 50$ приводит к аварийной остановке процесса вычислений.

Созданный программный комплекс математического моделирования и визуализации пространственных течений стратифицированной вязкой жидкости около диска был всесторонне протестирован [3, 11]. Для $Re = Fr = 50$, $A = 9816$ коэффициент сопротивления диска равен $C_d = 1.923$, длина рециркуляционной (застойной) области $D1$ за диском, отсчитываемая от тыльной критической точки диска, равна $L/d = 0.741$, что хорошо согласуется с экспериментом [17]. Расчеты проводились на вычислительных ресурсах Межведомственного суперкомпьютерного центра Российской академии наук (МСЦ РАН).

2. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА

При $Fr > 10$ течение около диска будет эквивалентно течению однородной вязкой жидкости и представляет в СК1 след за телом. При $Fr < 5$ наблюдается генерация гравитационных внутренних волн, характеризующихся горизонтальной и вертикальной плоскостями симметрии, проходящими через ось Z [3, 9–11].

Рассмотрим рассчитанное установившееся трехмерное поле течения при $Fr = 0.5$, $Re = 50$, $A = 981.6$ (рис. 1). В силу горизонтальной плоскости $Y-Z$ симметрии поля векторов скоростей этого течения анализируем только верхнее полупространство течения.

Линии трения (предельные линии тока) на поверхности диска [15, 16] при $X > 0$ показаны на рис. 1л–1н. Набегающий слева поток (рис. 1а) фокусируется в некоторой точке на передней стороне диска (ближе к ее верхней границе), а потом растекается по ней в разных направлениях (рис. 1л). На боковых сторонах диска поток стремится вниз к плоскости $Y-Z$ (рис. 1м). В силу существования вертикальной плоскости симметрии $X-Z$ поля векторов скоростей этого течения, в плоскости $X-Z$ можно наблюдать линии тока (рис. 1з–1к). Более наглядна картина “синусоидальных” линий тока в СК1 (рис. 1з–1и). Здесь наблюдаются гребни и впадины волн. На рис. 1и расстояние между первым и вторым гребнем волны вдоль оси Z приблизительно равно λ , где $\lambda = UT_b = 2\pi U/N = 2\pi Frd$ – длина внутренних волн в вертикальной плоскости $X-Z$.

В экспериментах, как правило, наблюдаются картины изолиний различных производных плотности. Например, популярная и информативная теневая картина “вертикальная щель – нож Фуко” [2] дает поле изолиний горизонтального градиента плотности S_z . Ниже для сравнения с экспериментом строятся изолинии S_z в вертикальной плоскости $X-Z$ (рис. 1д–1е). Темные ($S_z < 0$) и светлые ($S_z \geq 0$) полосы на рис. 1е визуализируют фазовые поверхности внутренних волн, а на их границах располагаются линии гребней и впадин, ясно видимые и на рис. 1и. В этом смысле рис. е и и подобны. В то же время поле изолиний S_z около тыльной стороны диска

(рис. 1д) дает больше структурных элементов течения, чем картина линий тока на рис. 1з. Темные ($S < 0$) и светлые ($S \geq 0$) полосы на картине изолиний S на рис. 1ж визуализируют полуволны впадин и гребней соответственно.

Поскольку в экспериментах тело обычно движется относительно покоящейся жидкости, то введем систему координат СК2 (x, y, z) (ось x – вертикальна, z – параллельна Z), которая равномерно двигается слева направо со скоростью U относительно СК1 (рис. 1а). В СК2 наблюдаются линии тока, для которых значения горизонтальных компонент векторов скорости, рассчитанные в СК1, уменьшаются на единицу – ср. з–и и к, а значения переменных S и p в СК2 те же, что и в СК1.

Картины мгновенных линий тока в СК2 визуализируют циркуляционные (вихревые) ячейки течения (рис. 1к). При $t = 0$ начало СК2 совпадает центром Q тыльной стороны диска. За время $T = [tf]/T_b = [t/(2FrN)][N/2\pi] = t/(4\pi Fr)$ начало СК2 смещается в СК1 на расстояние $s = U[tf]/(0.5d) = t = 4\pi FrT$.

Можно показать [9], что для установившегося течения в плоскости симметрии X – Z картина изолиний S (рис. 1, ж) подобна картине линий тока в СК2 (рис. 1к), где четко выделяются волнообразное движение жидкости около оси Z за равномерно движущимся справа налево тыловым торцом диска и ряд вытянутых циркуляционных ячеек над ним. Назовем часть жидкости между циркуляционной ячейкой номера M и осью Z на рис. 1к “базой” M этой ячейки. В циркуляционной ячейке 0, прилегающей к диску на рис. 1к, циркуляция жидкости идет по часовой стрелке, в следующей вытянутой “базе” 1, прилегающей справа к ячейке 0, жидкость описывает петлю, двигаясь против часовой стрелки; в ячейке 2, прилегающей справа к базе 1, циркуляция жидкости идет по часовой стрелке и т.д. Номера ячеек 0, 2–5 и базы 1 указаны на рис. 1ж. Таким образом, в ячейках 0, 2 и 4 на рис. 1к жидкость циркулирует по часовой стрелке, а в ячейках 3 и 5 (полуволнах впадин) – против часовой стрелки. На рис. 1ж и 1к четко прослеживаются базы 1, 3 и 5.

Для отображения пространственной вихревой структуры течения в каждом центре ячейки расчетной сетки определялась функция β . Если в центре ячейки существуют комплексно-сопряженные собственные значения $\sigma_{1,2} = \alpha \pm i\gamma$ тензора градиента скорости \mathbf{G} , то $\beta = \gamma > 0$, иначе $\beta = -1$. Далее строится изоповерхность $\beta = \beta_0 > 0$ (рис. 1б–1в). Если в некоторой фиксированной точке течения $\beta > 0$, то в декартовой СК x с началом в этой точке и двигающейся со скоростью этой точки можно записать обыкновенное дифференциальное уравнение $\mathbf{v} = dx/dt \approx \mathbf{G}\mathbf{x}$, где \mathbf{v} – скорость движения жидкости в СК x . Можно показать [16], что фазовой траекторией частицы жидкости в СК x является плоская спираль, по которой она двигается вокруг выбранной точки течения с угловой скоростью β . Пространственные вихревые структуры двухнитевого следа и цепочки шпилькообразных вихревых петель в следе за сферой, обтекаемой однородной вязкой жидкостью, полученные при помощи β -визуализации в [15, 16], хорошо согласуются с вихревыми структурами, полученными в экспериментах [18, 19] при помощи визуализации краской или эмульсией.

Картина изолиний $\beta > 0$ в вертикальной плоскости X – Z на рис. 1г подобна картине линий тока в СК2 на рис. 1к. Каждой полуволне на рис. 1ж, 1к можно поставить в соответствие полуволну на рис. 1г. Таким образом, на рис. 1г в плоскости X – Z можно выделить три полуволны впадин (соответствующие темным полосам 1, 3, 5 с $S < 0$ на рис. 1ж) и две полуволны гребней (соответствующие светлым полосам 2, 4).

Из рис. 1г следует переход от двухмерной вихревой структуры внутренних волн в плоскости X – Z к пространственной структуре волн на рис. 1б–1в, где показаны U-образные структуры первых полуволн впадин и гребней, часть второй полуволны впадин, а также V-образные структуры “осевых частей” первой (только на рис. 1в), второй и третьей полуволн гребней около оси Z , которые связаны между собой и с D1 при помощи горизонтальных вихревых нитей.

3. ЭВОЛЮЦИЯ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ПРИ $T \leq 0.7$

При старте диска в горизонтальном направлении в устойчиво стратифицированной вязкой жидкости с плотностью $\rho_{00}(X) = 1 - \frac{X}{2A}$, частички жидкости около диска выйдут из состояния покоя и начнут колебаться с частотой плавучести N в вертикальном направлении. Со временем эти колебания в ближнем следе затухнут, сформировав внутренние волны (рис. 1), распространяющиеся в СК2 справа налево вместе с телом и со скоростью тела. Ниже проводится детализация процесса формирования этих волн.

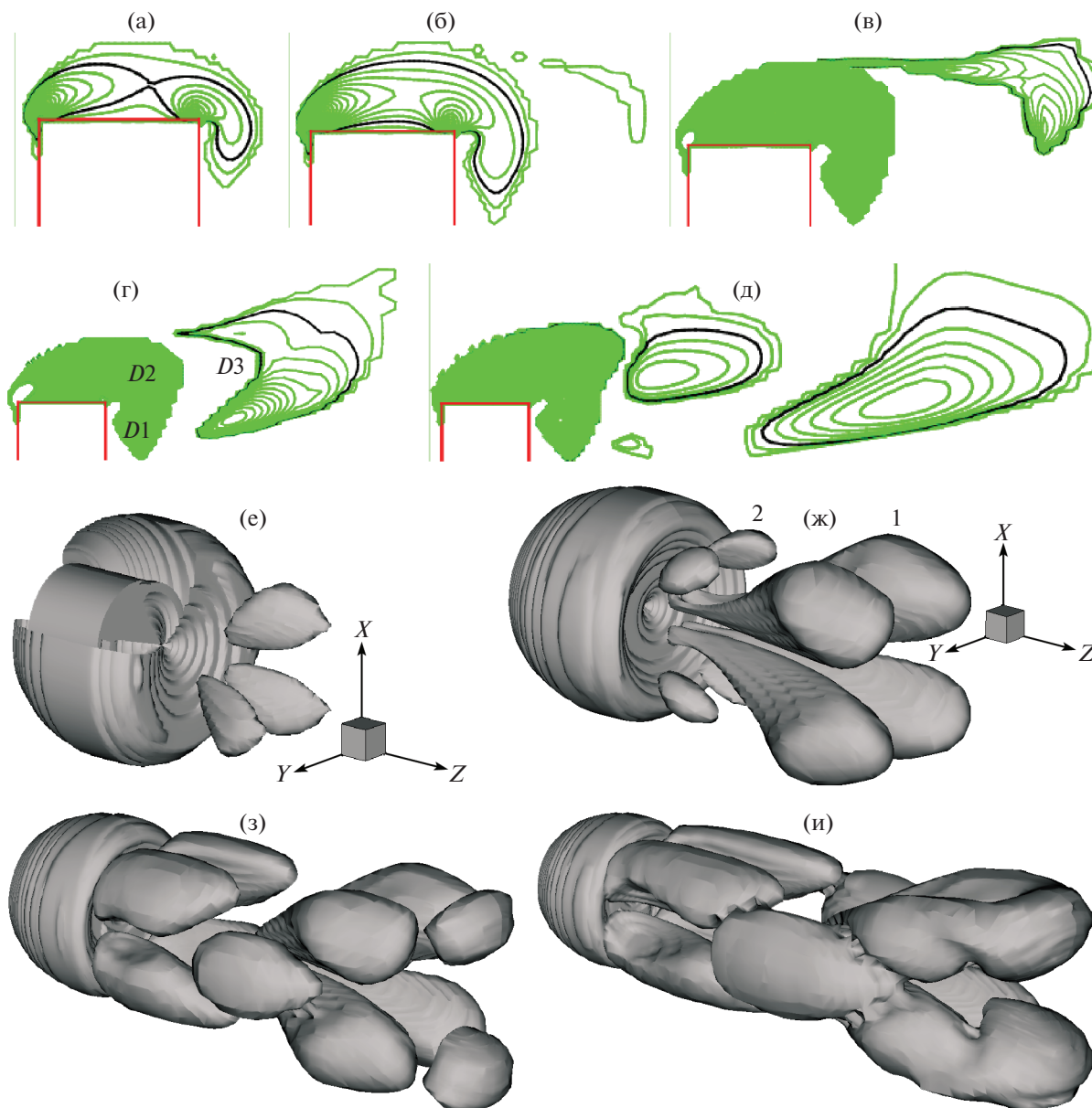


Рис. 2. Течение за диском при $Fr = 4$, $Re = 50$, $A = 2776.4$: (а–д) – изолинии $\beta > 0$ при $\varphi = \pi/4$ с шагами 0.2, 0.1, 0.0002, 0.0005, 0.002 при $T = 0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.19$; (е–и) – изоповерхности $\beta = 0.003$ при $T = 0.08, 0.16, 0.24, 0.32$

Для $Fr = 4$, $Re = 50$ в неподвижной системе координат СК1 в картине линий тока при $T \leq 0.001$ наблюдается ламинарное обтекание диска; при $T = 0.008$ – отрыв потока около тыльных кромок диска и присоединение потока к тыльной стороне диска выше оси Z . Здесь работает основной механизм формирования течения вязкой жидкости 1k (генерация вихревого кольца (или полукольца) у поверхности обтекаемого тела) [16]. Цифра 1 в названии механизма 1k обозначает, что этот механизм функционирует в D1.

На рис. 2 при $T = 0.04, 0.08, 0.12, 0.14, 0.32$ за диском наблюдаются D1, длиной $L/d = 0.388, 0.565, 0.653, 0.671, 0.729$. При $T > 0.32$ L/d больше не растет. При этом толщина D1 у тыльной стороны диска равна $0.928d$. Для $Fr = 4$, $Re = 50$ вихревая оболочка (область течения D2 на рис. 2г) и D1 осесимметричны.

Если q – вертикальная прямая, проходящая через место Q импульсного старта центра тыльной стороны диска, то в СК2 этот центр за время T переместился влево на расстояние $s = 4\pi Fr T$ от неподвижной прямой q . При $0.02 < T < 0.04$ между правым краем оболочки и прямой q на ме-

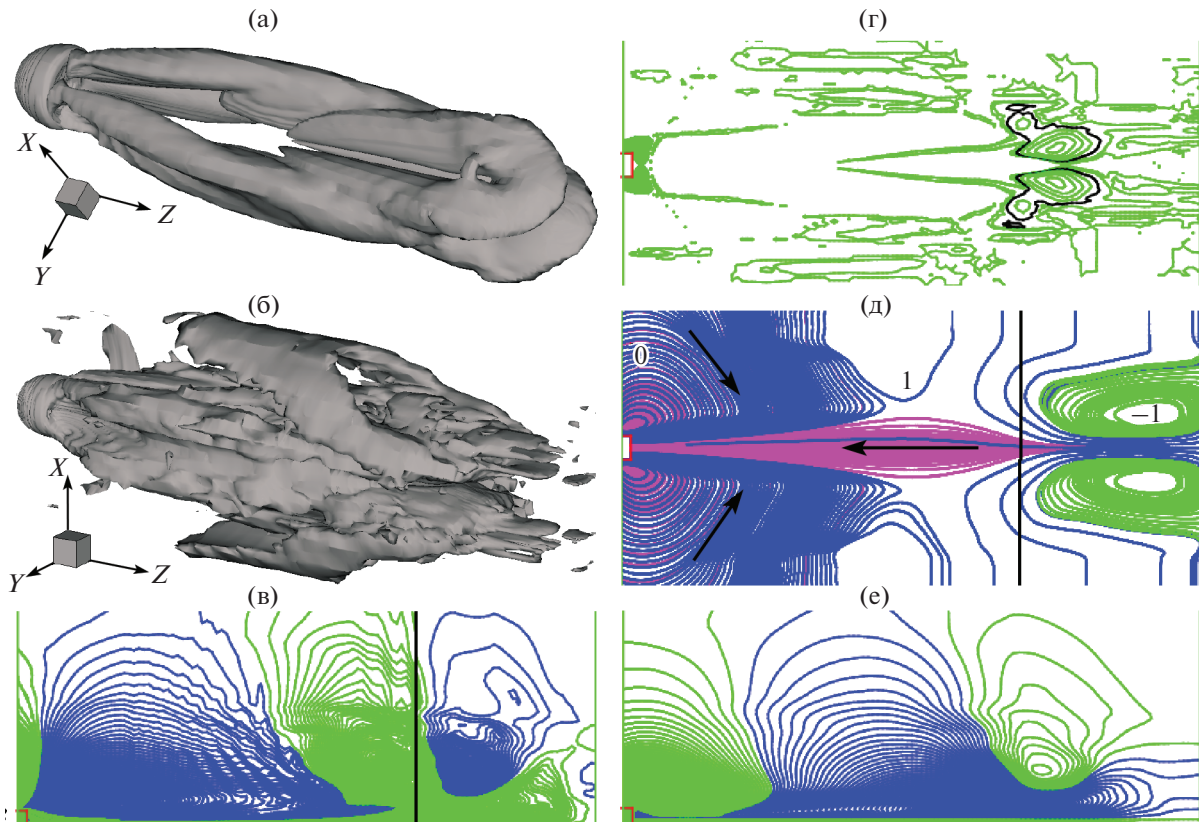


Рис. 3. Течение за диском при $F_r = 4$, $Re = 50$, $A = 2776.4$, $T = 0.72$: (а–б) – изоповерхности $\beta = 0.003, 0.001$; (в–е) – изолинии S_z с шагом 10^{-7} (в), β с шагом 0.001 (г) и S с шагом 10^{-6} (е) и мгновенные линии тока в СК2 (д) в вертикальной плоскости $X-Z$

сте резкого сдвига жидкости в окрестностях плоскостей $\varphi = \pi/4$ и $\varphi = 3\pi/4$ начинают формироваться четыре вихревые структуры, симметричные относительно плоскостей $X-Z$ и $Y-Z$ (правая половина рис. 2б). Дальнейшее развитие этих структур при $0.06 \leq T \leq 0.32$ показано на рис. 2 как при помощи изолиний $\beta > 0$ в плоскости $\varphi = \pi/4$ (в правых половинах рис. 2в–2д), так и при помощи изоповерхностей β (рис. 2е–2и). При $T \geq 0.08$ эти четыре структуры уже похожи на вихревые нити. На рис. 2б–2ж при $0.04 \leq T \leq 0.19$ прямая q проходит через правые края этой первой четверки нитей. При $0.14 < T < 0.16$ левые концы первой четверки нитей (около D1) индуцируют вторую четверку вихревых нитей (рис. 2д, 2ж). (Цифры 1 и 2 на рис. 2ж указывают на первую и вторую четверку вихрей соответственно).

При $0.22 < T < 0.24$ правее каждой пары правых концов первой и второй четверки нитей индуцируется по одному головному вихрю (рис. 2з). При $0.3 < T < 0.5$ каждая пара нитей с их головным вихрем превращаются в шпилькообразную вихревую петлю (рис. 2и и 3а). Таким образом, первая и вторая четверки вихревых нитей превращаются в первую и вторую пары вихревых петель; ножки второй пары петель стыкуются с оболочкой D2. Из рис. 4г следует, что вращение жидкости в сечении головной части первой вихревой петли вертикальной плоскостью $X-Z$ (ячейка –1) при $X > 0$ идет по часовой стрелке. Следовательно, в вертикальном сечении ножки первого вихря при $X > 0$, $Y > 0$ и $Z > 0$ вращение жидкости идет против часовой стрелки (если смотреть на тыльную сторону диска).

Согласно [16] детальный механизм формирования вихрей при $T < 0.5$ можно символически записать как $M1 = \{2k-1k-3f-3f-3t/b-3r/l\}$, где 2k – формирование оболочки диска, цифрой 3 обозначается течение D3 вне оболочки (рис. 2г), 3f – генерация в D3 четырех вихревых нитей (сначала первой четверки, а потом второй), 3t/b/r/l – генерация в D3 головных частей вихревых петель, ориентированных вверх (t), вниз (b), вправо (r) и влево (l). Формирование этих вихревых петель (механизм M1) обусловлено сдвиговой и гравитационной неустойчивостями стратифицированной вязкой жидкости, инициируемыми движением диска.

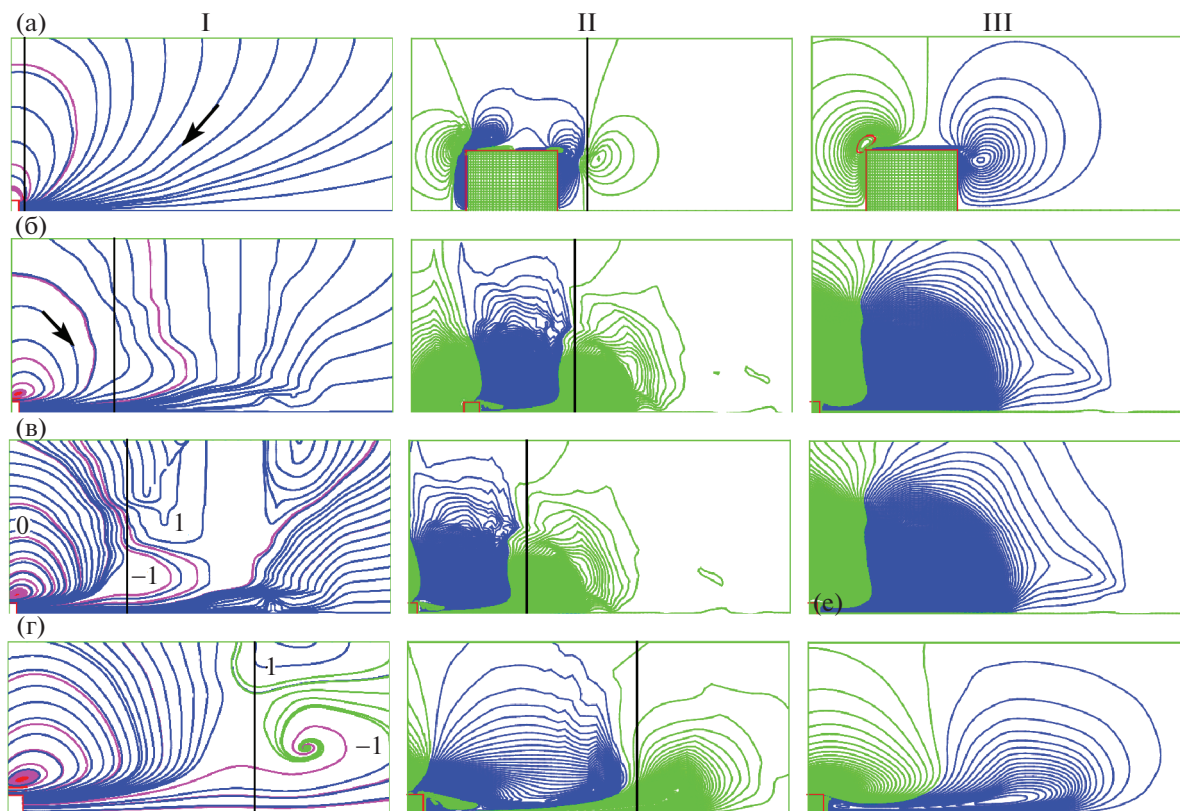


Рис. 4. Течение за диском при $Fr = 4$, $Re = 50$, $A = 2776.4$ в вертикальной плоскости $X-Z$: (а–г) – мгновенные линии тока в СК2 (I), изолинии $S_z \times 10^6$ с шагами 10, 0.1, 0.1, 1 (II) и $S \cdot 10^6$ с шагами 3, 0.1, 0.1, 5 (III) при $T = 0.01, 0.19, 0.22, 0.24$

Динамика картин мгновенных линий тока в СК2 и изолиний S и S_z в вертикальной плоскости $X-Z$ при $0.01 \leq T \leq 0.24$ на рис. 4 дополняет описанный выше процесс формирования вихревых петель (пространственный механизм М1). Начало движения диска формирует при $X > 0$ одну большую циркуляционную ячейку 0 в картине мгновенных линий тока в подвижной системе координат СК2, две ячейки в картине изолиний S (левую и правую) и три ячейки в картине изолиний S_z (рис. 4а). В картинах изолиний S_z (рис. 4, II) прямая q (черная вертикальная линия) проходит немного правее границы между центральной и правой ячейками, т.е. центральная ячейка визуализирует путь, пройденный телом в СК2. В картинах изолиний S (рис. 4, III) при $0.01 < T < 0.24$ правая ячейка тоже сдвинулась вправо. По картинам изолиний S и S_z невозможно понять механизм эволюции течения, который наглядно показывает мгновенные линии тока в плоскости $X-Z$. Вызванное движением диска интенсивное вращение жидкости по часовой стрелке левее прямой q приводит к формированию циркуляционной ячейки 1 правее q (с вращением жидкости на рис. 4в против часовой стрелки), которая в свою очередь индуцирует (совместно с правыми концами первой четверки вихрей на рис. 2з) формирование циркуляционной ячейки -1 (головной части первой вихревой петли) около оси Z правее q (рис. 4г).

При $0.25 \leq T \leq 0.7$ диск вместе с нулевой ячейкой сдвигается влево, освобождая место для приближения ячейки 1 к оси Z (рис. 3д), т.е. левее прямой q происходит формирование первой полуволны впадин (рис. 3е) из ячейки 1.

При $0.4 \leq T \leq 0.7$ на границе циркуляционных ячеек 1 (с циркуляцией жидкости против часовой стрелки) и -1 (с циркуляцией жидкости по часовой стрелке) более тяжелая жидкость поднимается вдоль прямой q на равновесный уровень для более легкой жидкости. Поэтому отрицательные значения S около прямой q становятся положительными, и в картине изолиний S вдоль прямой q при $0.4 \leq T \leq 0.7$ опускается некоторая новая светлая ячейка с $S > 0$ (рис. 3е и 5а–б (III)), которая делит правую ячейку с $S < 0$ на рис. 4г (III) на ячейку 1 (левее q) и ячейку -1 (правее q). Таким образом, ячейки 1 и -1 в картинах изолиний S формируются позднее, чем циркуляцион-

ные ячейки 1 и -1 в картинах мгновенных линий тока, и формирование первой и второй пары вихревых петель при $0.4 \leq T \leq 0.7$ сопровождается формированием первой полуволны впадин.

Тот же самый пространственный механизм M1 работает и при $Fr = 0.5$ (рис. 5а–5б и 6а–6д). Правда, при одном и том же T путь $s = 4\pi Fr T$, который прошел диск в СК2, для $Fr = 0.5$ будет в 8 раз короче пути для $Fr = 4$. Можно было бы предположить, что картины течения для $Fr = 0.5$ получаются из картин для $Fr = 4$ путем простого сжатия их в 8 раз по горизонтали. Но в реальности это не совсем так. Например, сильное вращение жидкости в циркуляционной ячейке -1 (головной части первой петли) (рис. 5а–5б (II)) при $0.25 \leq T \leq 0.6$ генерирует левее прямой q высокую базу 1 первой полуволны впадин, а циркуляционной ячейки 1 над базой 1 на рис. 5а–5б уже не видно. А при $0.01 < T < 0.1$ для $Fr = 0.5$ первая четверка вихрей зарождается впритык к вихревой оболочке (рис. 6а–6б). Поэтому вторая четверка формируется при $0.14 < T < 0.16$ уже около боковых сторон диска (рис. 6в).

При $0.24 < T < 0.25$ для $Fr = 0.5$ также начинают формироваться головные части перед первой четверкой вихрей (рис. 6г). Головные части второй четверки вихрей для $Fr = 0.5$ не видны на рис. 6г. Таким образом, для $0.5 \leq Fr \leq 4$ этапы формирования первой пары вихревых петель при $T \leq 0.7$ практически слабо зависят от Fr , а определяются только моментом времени T .

4. ЭВОЛЮЦИЯ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ПРИ $T > 0.7$

При $0.25 < T < 0.8$ вокруг прямой q сформировалась головная часть первой петли (рис. 6г–6д), включающая в себя циркуляционные ячейки 1 и -1 на рис. 5а–5д (II). Будем считать ее первым вихревым полукольцом. При $0.6 < T \leq 0.7$ на границе ячеек 1 и -1 в окрестности прямой q наблюдается безвихревое движение жидкости вверх (рис. 5б–5в (II)). При $0.7 < T \leq 0.9$ за счет сдвиговой и гравитационной неустойчивостей вокруг прямой q (рис. 5г–5е) формируется деформированное вихревое кольцо 2 (рис. 6е–6ж), которое при $0.9 < T \leq 1.2$ сдвигается вниз (ближе к точке Q), и его левая половина превращается в первую полуволну гребней (рис. 6з) (циркуляционную ячейку 2 на рис. 5е–5ж). А правая половинка кольца 2 (соответствующая циркуляционной ячейке -2 в плоскости $X-Z$ на рис. 5ж) остается около прямой q . Скорость вращения жидкости в циркуляционной ячейке 2 на рис. 5ж много больше, чем в ячейке -2 , поэтому правой половинки кольца 2 не видно на рис. 6з. При $1.2 < T \leq 1.7$ формируется и сдвигается к оси Z кольцо 3 (рис. 5ж–5з и 6з–6и), создавая вторую полуволну впадин (рис. 7а–7б). Таким образом, при $T > 0.7$ в течение каждого $\Delta T = 0.5$, над точкой Q наблюдается процесс зарождения вихревых колец (пространственный механизм $M2 = \{3k\}$), левые половины которых трансформируются в полуволны, заполняющие пространство между диском и точкой Q . При этом правые половины колец утончаются со временем под давлением новорожденных правых полуколец, давящих на них сверху. Универсальный механизм M2 работает и в случае покоящегося диска.

Рисунок 5ж–5з (II) наглядно подробно демонстрируют, как реализуется гравитационная неустойчивость при $1.2 < T \leq 1.25$. Безвихревой поток около прямой q на границе между ячейками 2 и -2 при $1.1 < T \leq 1.15$ направлен вниз. При $T = 1.2$ скорость вдоль правой границы $q2$ циркуляционной ячейки 2, наклоненной под некоторым небольшим углом к вертикали, становится немного больше, чем у левой границы ячейки -2 , из-за того, что ячейка 2 расположена ближе к движущемуся в СК2 диску. Более легкая жидкость опускается вдоль прямой $q2$ на уровень более тяжелой жидкости. А силы плавучести стремятся вернуть более легкую жидкость вверх на ее уровень. В результате при $T = 1.25$ линия тока $q2$ становится волнообразной и около нее в вертикальной плоскости $X-Z$ зарождаются два небольших вихря (рис. 5з (II)), которые в пространстве являются двумя частями нового вихревого кольца 3 (рис. 6и) в сечении его плоскостью $X-Z$. В результате при $T = 1.25$ на “пустом” месте генерируется кольцо 3.

При $T > 0.4$ в картине изолиний S в вертикальной плоскости $X-Z$ на рис. 5 (III) и на рис. 7 периодически в течение $\Delta T = 0.5$ вдоль прямой q опускается некоторая новая ячейка, которая делит ячейку под ней на две ячейки: левую (новую полуволну) и правую. На рис. 7з–7ж при $T = 3$ хорошо видны ячейки (полуволны) 1–5 (левее q), более тонкие ячейки -1 – -5 (правее q) и наполовину разделенная ячейка (через которую проходит прямая q), из которой при $T = 3.2$ сформируются ячейки 6 и -6 . Картины изолиний S при $Fr = 0.5$, $Re = 50$ для $T = 3$ и 11.46 (рис. 7з и 1ж) очень похожи, т.е. пространственная вихревая структура внутренних волн при $T = 3$ будет примерно такой же, как на рис. 1б–1в.

Обратимся к процессу формирования течения при $Fr = 4$, $Re = 50$ для $T > 0.72$. На рис. 3а, 3г видно начало формирования кольца 2 при $T = 0.72$. На рис. 3б (вверху и внизу) вихревая структура первой полуволны впадин похожа на сплюснутую вихревую петлю, ножки которой парал-

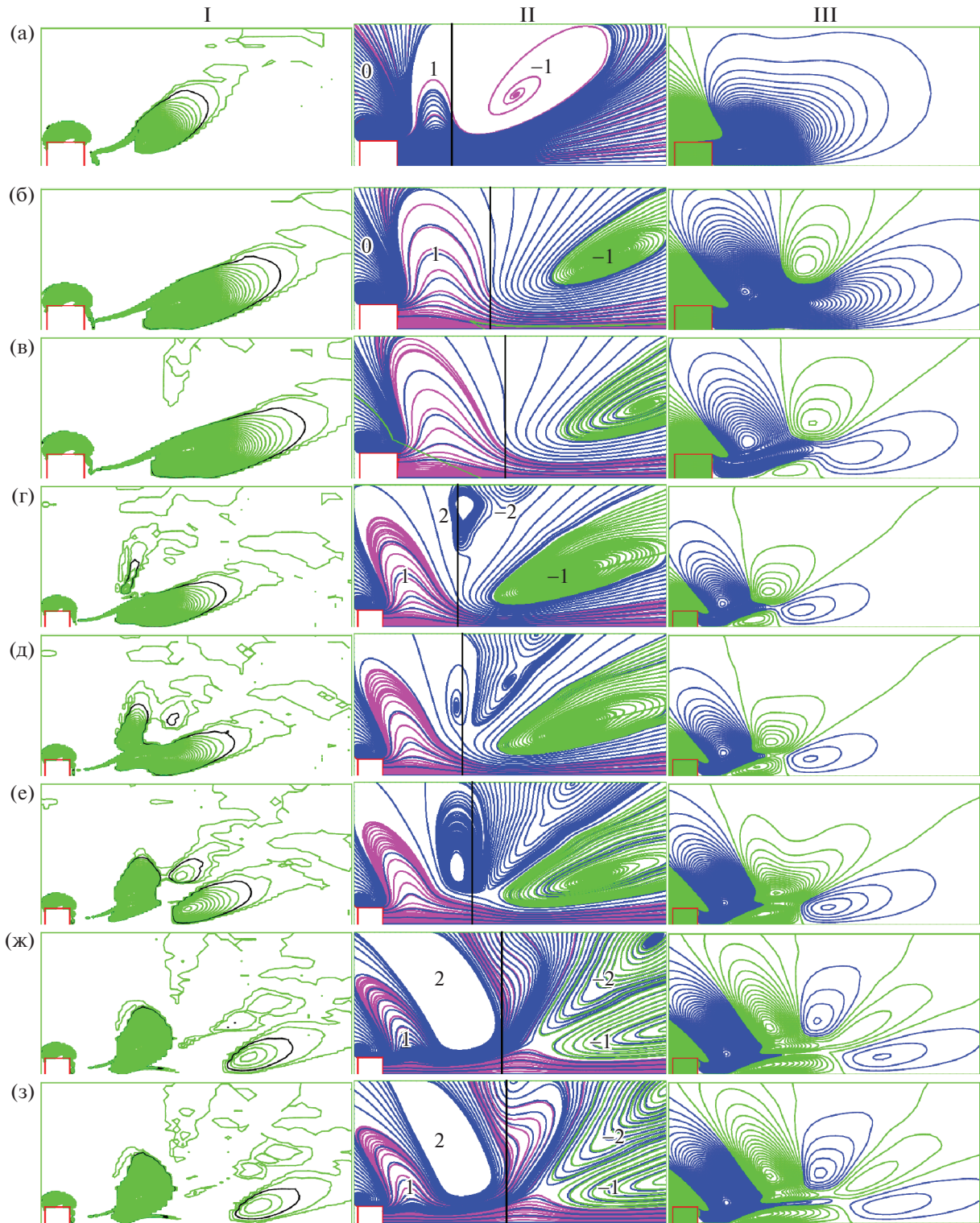


Рис. 5. Течение за диском при $Fr = 0.5$, $Re = 50$, $A = 981.6$ в плоскости $X-Z$: $a-z$ – изолинии β с шагом 0.002 (I), мгновенные линии тока (II), изолинии $S \times 10^6$ с шагами $2, 2, 6, 6, 6, 3, 3, 3$ (III) при $T = 0.35, 0.6, 0.7, 0.75, 0.8, 0.9, 1.2, 1.25$

лельны ножкам второй пары вихревых петель. При $T > 0.995$ путь, пройденный телом, равен $s = 4\pi \cdot FrT > 50 = z_{\max}$, т.е. в СК1 прямая q вместе с головной частью первой петли выйдет за границы расчетной области. Поэтому в установившемся при $T = 1.2$ течении для $Fr = 4$ и $Re = 50$ наблюдаются только левые половины ножек первой пары вихревых петель (рис. 8а, справа).

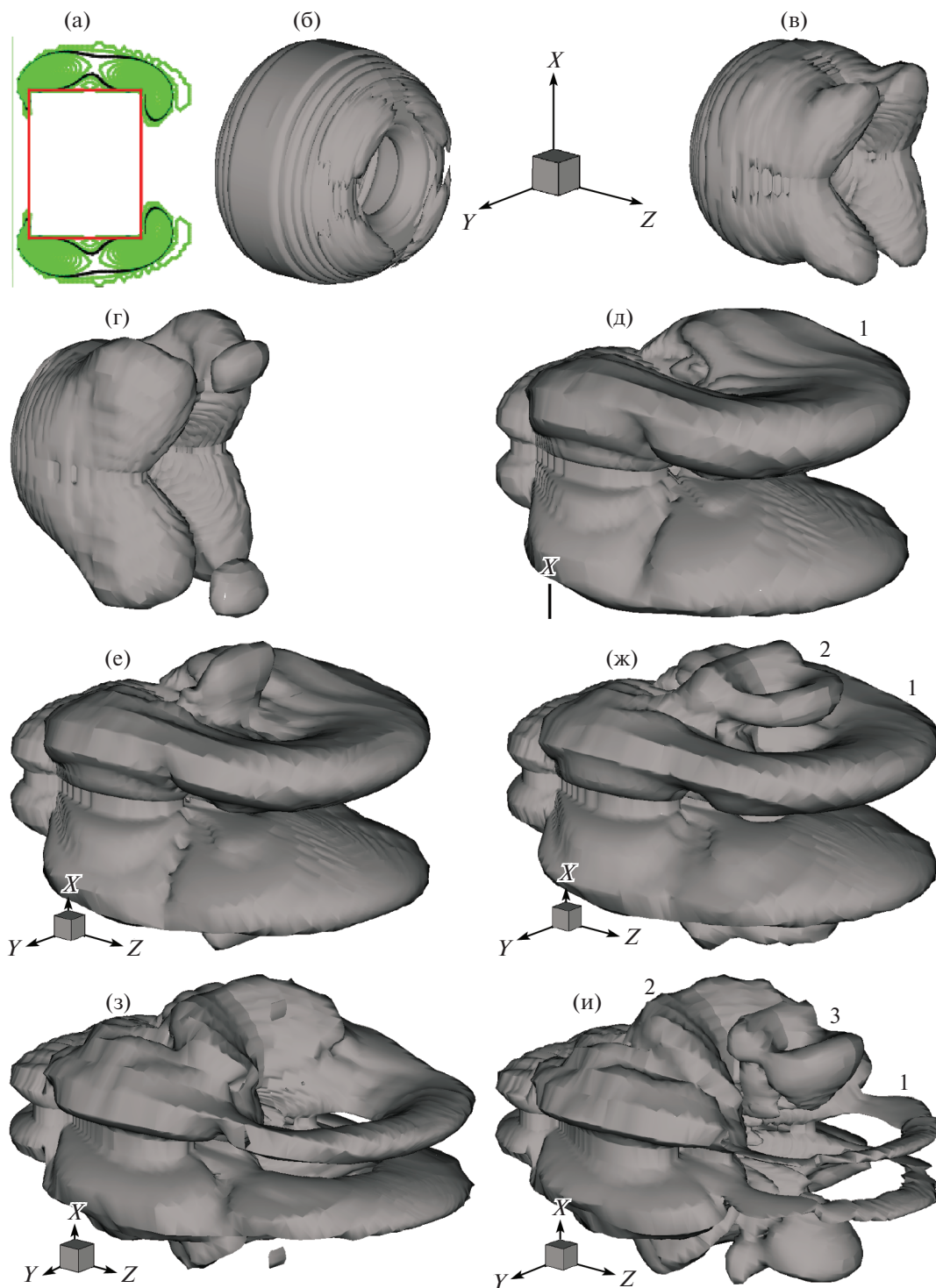


Рис. 6. Течение за диском при $Fr = 0.5$, $Re = 50$, $A = 981.6$: (а) – изолинии $\beta > 0$ в плоскости $\varphi = \pi/4$ при $T = 0.1$ с шагом 0.1; (б–и) – изоповерхности $\beta = 0.005$ при $T = 0.1, 0.2, 0.25, 0.7, 0.8, 0.9, 1.3, 1.5$

А почти все пространство между диском и правой границей расчетной области при $T = 1.2$ занимает полуовална впадин 1 (рис. 8б–8е). На картине изолиний возмущения давления p в плоскости $X-Z$ (в центре рис. 8е) можно увидеть линию впадин, как и на картине изолиний S_z на рис. 8г. Установившееся при $Fr = 4$ и $Re = 50$ течение около тыльной стороны диска является квази-осесимметричным (рис. 8з).

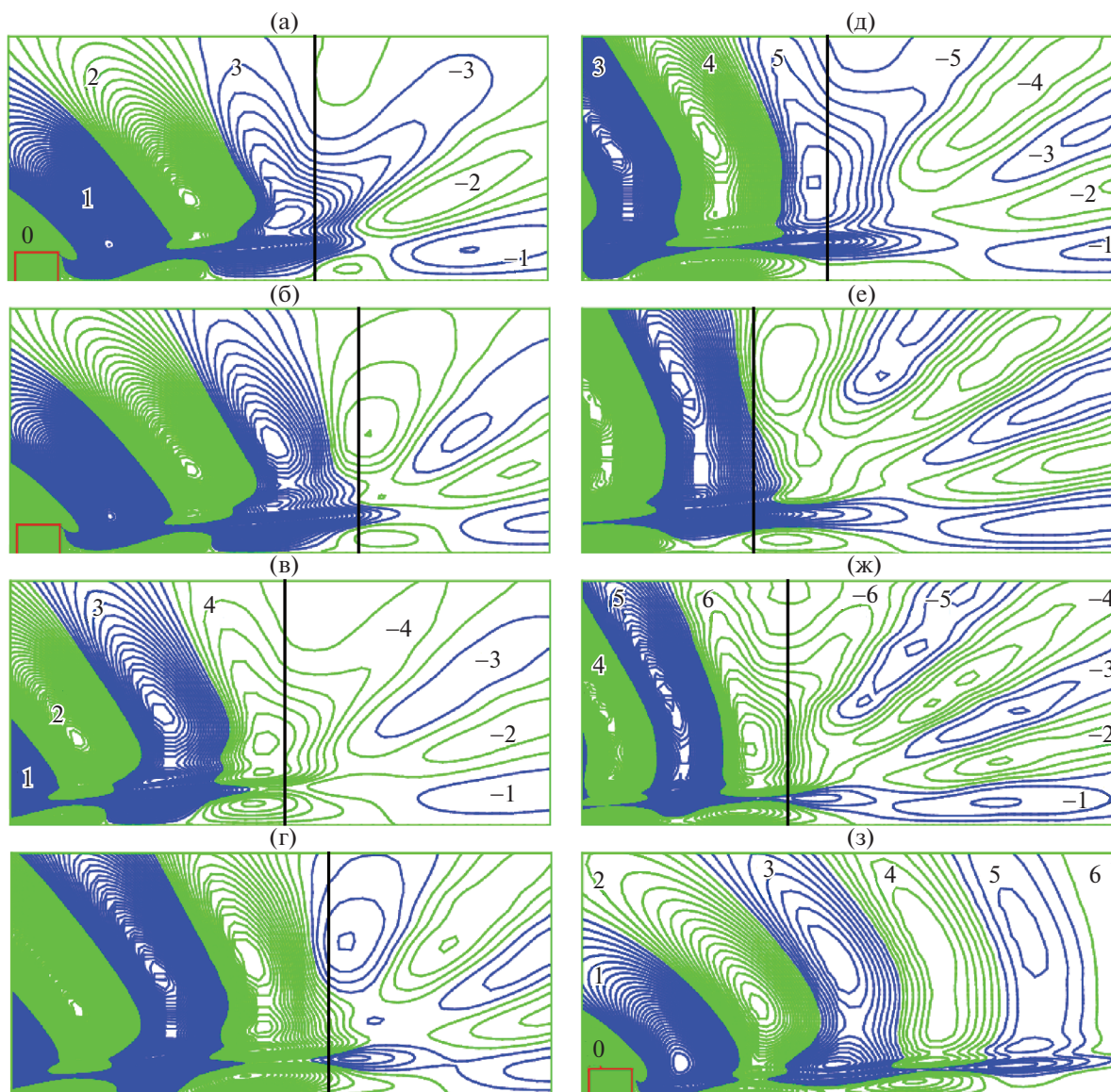


Рис. 7. Течение за диском при $Fr = 0.5$, $Re = 50$, $A = 981.6$ в плоскости $X-Z$: (а–з) – изолинии $S \cdot 10^6$ с шагами 2, 2, 2, 1, 1, 0.5, 0.5, 5 при $T = 1.5, 1.75, 2, 2.25, 2.5, 2.75, 3, 3$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате численного решения системы уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска и визуализации пространственной вихревой структуры рассчитанного течения впервые детально рассмотрен процесс формирования трехмерных гравитационных внутренних волн над местом Q импульсного старта центра тыльной стороны диска с диаметром d и толщиной $h = 0.76d$ в горизонтальном направлении вдоль оси симметрии диска Z справа налево в линейно стратифицированной по плотности вязкой жидкости при $Fr = 0.5$ и 4 для $Re = 50$.

Рассчитанные поля векторов скоростей и возмущения давления обладают горизонтальной и вертикальной плоскостями симметрии, проходящими через ось Z . Поэтому процесс формирования течения, обусловленный сдвиговой и гравитационной неустойчивостями, описывается в верхнем полупространстве следующим образом. Сначала между тыльным торцом диска и местом Q импульсного старта этого торца формируются две горизонтальные вихревые нити, которые потом трансформируются в ножки шпилькообразной вихревой петли, головная часть которой расположена правее Q . Далее над точкой Q периодически в течение промежутка времени, равного половине периода плавучести жидкости, формируются вихревые кольца, левые полови-

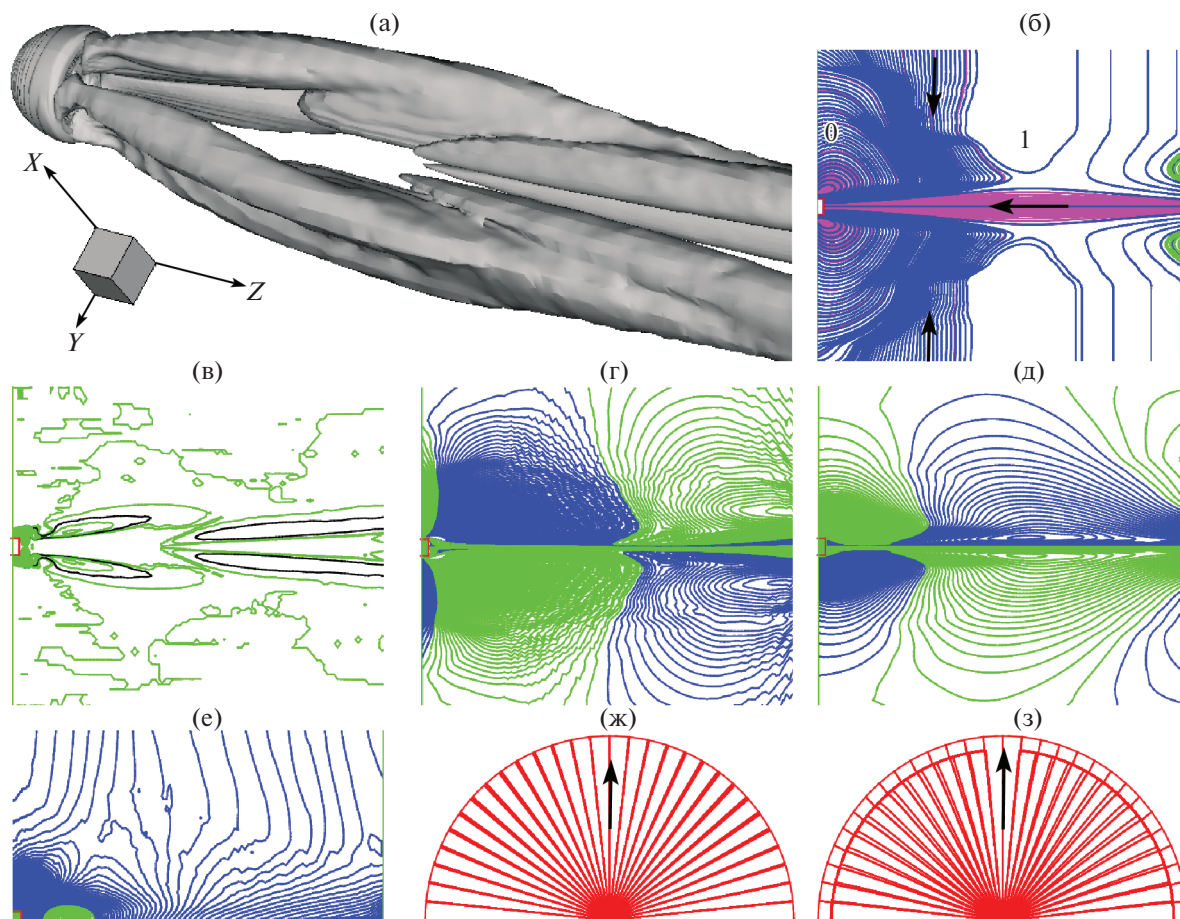


Рис. 8. Установившееся со временем течение за диском при $Fr = 4.0$, $Re = 50$, $A = 2776.4$, $T = 1.2$ ($L/d = 0.729$, $C_d = 1.89$) в пространстве (а), в плоскостях $X-Z$ (б, г-е) и $\varphi = \pi/4$ (в) и на диске (ж-з): (а) – изоповерхность $\beta = 0.003$; б – линии тока в СК2; (в-е) – изолинии $\beta > 0$ с шагом 0.002 (е), S_z с шагом 5×10^{-8} (г), S с шагом 10^{-6} (д) и p с шагом 10^{-3} (е); ж-з – линии трения на передней (ж) и тыльной (з) поверхностях диска в СК1

ны которых трансформируются в полуволны, заполняющие пространство между диском и точкой Q . При этом правые половины колец утончаются со временем под давлением новорожденных правых полуколец, давящих на них сверху.

Приведены детальное описание и результаты анализа динамики формирования пространственных вихревых структур в линейно стратифицированной вязкой сплошной среде, создаваемые движущимися в горизонтальном направлении объектами в форме диска.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lighthill J.* Waves in Fluids. Cambridge: CUP, 1978. = *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
2. *Миткин В.В., Чашечкин Ю.Д.* Трансформация висящих разрывов в вихревые системы в стратифицированном течении за цилиндром // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 1. С. 15–28.
3. *Матюшин П.В.* Эволюция течения стратифицированной вязкой жидкости при начале движения тела // Процессы в геосредах. 2016. № 4 (9). С. 333–343.
4. *Чашечкин Ю.Д., Воейков И.В.* Вихревые системы за цилиндром в непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1993. Т. 29. № 6. С. 821–830.
5. *Boyer D.L., Davies P.A., Fernando H.J.S., Zhang X.* Linearly Stratified Flow Past a Horizontal Circular Cylinder // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences. 1989. V. 328. № 1601. P. 501–528.

6. *Lin Q., Lindberg W.R., Boyer D.L., Fernando H.J.S.* Stratified flow past a sphere // *J. Fluid Mech.* 1992. V. 240. P. 315–354.
7. *Chomaz J.M., Bonneton P., Hopfinger E.J.* The structure of the near wake of a sphere moving horizontally in a stratified fluid // *J. Fluid Mech.* 1993. V. 254. P. 1–21.
8. *Boyer D.L., Davies P.A.* Laboratory studies of orographic effects in rotating and stratified flows // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 2000. V. 32. P. 165–202.
9. *Gushchin V.A., Matyushin P.V.* Mathematical Modeling of the Incompressible Fluid Flows // *AIP Conf. Proc.* 2014. V. 1631. P. 122–134.
10. *Гущин В.А., Матюшин П.В.* Моделирование и исследование течений стратифицированной жидкости около тел конечных размеров // *Журн. вычисл. матем. и матем. физики.* 2016. Т. 56. № 6. С. 1049–1063.
11. *Матюшин П.В.* Классификация режимов течений стратифицированной вязкой жидкости около диска // *Процессы в геосредах.* 2017. № 4 (13). С. 678–687.
12. *Hanazaki H.* A numerical study of three-dimensional stratified flow past a sphere // *J. Fluid Mech.* 1988. V. 192. P. 393–419.
13. *Байдулов В.Г., Матюшин П.В., Чашечкин Ю.Д.* Эволюция течения, индуцированного диффузией на сфере, погруженной в непрерывно стратифицированную жидкость // *Изв. РАН. МЖГ.* 2007. № 2. С. 130–143.
14. *Белоцерковский О.М., Гущин В.А., Коньшин В.Н.* Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью // *ЖВМ и МФ.* 1987. Т. 27. № 4. С. 594–609.
15. *Матюшин П.В.* Численное моделирование пространственных отрывных течений однородной несжимаемой вязкой жидкости около сферы. Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. М., 2003. 194 с.
16. *Гущин В.А., Матюшин П.В.* Механизмы формирования вихрей в следе за сферой при $200 < Re < 380$ // *Изв. РАН. МЖГ.* 2006. № 5. С. 135–151.
17. *Bobinski T., Goujon-Durand S., Wesfreid J.E.* Instabilities in the wake of a circular disk // *Phys. Rev.* 2014. V. E 89. P. 053021.
18. *Magarvey R.H., Bishop R.L.* Transition ranges for three-dimensional wakes // *Can. J. Phys.* 1961. V. 39. P. 1418–1422.
19. *Sakamoto H., Haniu H.* A study on vortex shedding from spheres in a uniform flow // *Trans. ASME: J. Fluids Engng.* 1990. V. 112. P. 386–392.