ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2019, № 2, с. 3–13

УДК 532.5.013.4:519.634

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО КЛАССА ВНУТРЕННИХ ТЕЧЕНИЙ

 В. И. Жук*

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

** E-mail: zhuk@ccas.ru*

Поступила в редакцию 28.02.2017 г.
После доработки 14.02.2018 г.
Принята к публикации 15.03.2018 г.

Строится теория возмущений для комбинации течений Куэтта и Пуазейля. Излагается асимптотический анализ четырех типов нейтральных (или близких к нейтральным) собственных линейных колебаний.

Ключевые слова: течение Куэтта–Пуазейля, неустойчивость, дисперсионное соотношение, функция Эйри, волна Толлмина–Шлихтинга, нейтральная кривая, фазовая скорость, волновое число, критический слой

DOI: 10.1134/S0568528119020154

Предлагаемая работа иллюстрирует возможность распространения основных представлений асимптотической теории свободного взаимодействия пограничного слоя с внешним потоком на задачи устойчивости внутренних течений типа Куэтта–Пуазейля. Применение многоярусных асимптотических конструкций позволяет не только уточнить поведение нейтральных кривых и свойства собственных функций уравнения Орра–Зоммерфельда, но и установить асимптотическую структуру флуктуационных полей и указать физические механизмы неустойчивости.

Тот факт, что внутренние волны в пограничном слое с самоиндуцированным давлением представляют собой асимптотику волн Толлмина–Шлихтинга (собственных решений уравнения Орра–Зоммерфельда) в пределе больших чисел Рейнольдса, служит руководящим соображением для асимптотического описания как верхней, так и нижней ветвей нейтральной кривой. Дополнительный анализ исходной системы уравнений Навье–Стокса приводит к асимптотической теории, пригодной к предсказанию потери устойчивости движений с примыкающими к стенкам пограничными слоями.

Вопрос о причинах возникновения неустойчивости в плоском течении Куэтта является дискуссионным, в частности, из-за отсутствия нейтральной кривой линейных возмущений. В [1, 2] доказано, что течение Куэтта остается устойчивым в линейном приближении при всех числах Рейнольдса. Напротив, основные аспекты неустойчивости течения Пуазейля хорошо известны [3–5]. Ниже строится теория возмущений для комбинации течения Куэтта и течения Пуазейля. Предполагается, что невозмущенное движение несжимаемой жидкости в канале порождается не только продольным градиентом давления, но и движением ограничивающих его двух бесконечных плоских параллельных стенок с противоположными скоростями по касательной к себе. Для анализа такого течения Куэтта–Пуазейля привлечем асимптотическую теорию свободного взаимодействия [6–8], которая оказалась применимой к задачам гидродинамической устойчивости [9, 10].

Распространение названной теории на течение Пуазейля продемонстрировано в [11, 12] и предполагает разбиение поля скоростей на несколько подслоев (палуб) с различными свойствами, причем асимптотические разложения в каждом подслое должны удовлетворять условиям сращивания. Трехпалубная модель движения вязкой жидкости привлечена в [13, 14] к анализу волн Толлмина–Шлихинга, возбуждаемых установленными на стенках канала гармоническими осцилляторами.

Возникновение многопалубной структуры возмущенного течения Куэтта–Пуазейля в пределе стремящихся к бесконечности чисел Рейнольдса отмечается в [15]. Если трехпалубная схема возмущений реализуется для параметров колебаний из окрестности так называемой нижней ветви нейтральной кривой, то верхняя ветвь описывается существенно более сложной асимптотической конструкцией, состоящей из нескольких подслоев. Переход от трех к многопалубной структуре исследован посредством численного решения уравнения Орра–Зоммерфельда в [16], где, в частности, обсуждаются пределы применимости существующих асимптотических моделей.

Заметим, что в течении Куэтта–Пуазейля можно указать режимы возбуждения пульсационных полей, которые принципиально отсутствуют в течении Пуазейля. В настоящей работе излагается асимптотический анализ четырех типов нейтральных (или близких к нейтральным) собственных колебаний, причем в качестве исходных с самого начала взяты линеаризованные уравнения Навье–Стокса.

1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Функции

$$u^* = u_\text{o}^*(y^*) = \frac{1}{2\nu^*\rho^*}\left|\frac{dp_\text{o}^*}{dx^*}\right|[b^{*2} - y^{*2}] + u_w^*\frac{y^*}{b^*}, \quad v^* = 0 \tag{1.1}$$

задающие исходное течение Куэтта–Пуазейля в канале при постоянном градиенте давления $\partial p^*/\partial x^* = -|\partial p_\text{o}^*/\partial x^*|$, удовлетворяют уравнениям Навье–Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \times \nabla_*)\,\mathbf{u}^* = -\frac{1}{\rho^*}\nabla_* p^* + v^*\nabla_*^2\mathbf{u}^*, \quad \nabla_*\mathbf{u}^* = 0, \quad \nabla_* = \left\{\frac{\partial}{\partial x^*}, \frac{\partial}{\partial y^*}\right\}$$

и граничным условиям

$$y^* = b^*: \quad u^* = u_w^*, \quad v^* = 0$$

$$y^* = -b^*: \quad u^* = -u_w^*, \quad v^* = 0$$

Вычисленное по решению (1.1) среднее значение скорости движения жидкости

$$U_m^* = \frac{1}{2b^*}\int_{-b^*}^{b^*} u_\text{o}^* dy^* = \frac{b^{*2}}{3\nu^*\rho^*}\left|\frac{\partial p_\text{o}^*}{\partial x^*}\right|$$

однозначно связано с давлением в канале

$$p^* = p_\text{o}^*(x^*) = -\frac{3\nu^*\rho^* U_m^* x^*}{b^{*2}}$$

Пусть масштабные множители для координат пространства $\{x^*, y^*\} = \{b^*x, b^*y\}$, времени $t^* = b^* U_m^{*-1} t$, компонент вектора скорости $\mathbf{u}^* = \{u^*, v^*\} = \{U_m^* u, U_m^* v\} = U_m^*\mathbf{u}$ и давления $p^* = \rho^* U_m^{*2} p$ содержат полуширину канала b^*, среднюю по сечению канала скорость U_m^* и плотность ρ^* несжимаемой жидкости. Тогда невозмущенное стационарное решение уравнений Навье–Стокса

$$u = u_\text{o}(y) = \frac{3}{2}(1 - y^2) + u_w y, \quad v = v_\text{o} = 0, \quad p = p_\text{o}(x) = -\frac{3}{\text{Re}}x \tag{1.2}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} y = 1: &\quad u = u_w, \quad v = 0 \\ y = -1: &\quad u = -u_w, \quad v = 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

определяется скоростями стенок канала $\pm u_w$ и числом Рейнольдса $\text{Re} = U_m^* b^* \nu^{*-1}$, где ν^* – кинематическая вязкость.

Для исследования устойчивости течения Куэтта–Пуазейля положим $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\text{o} + \mathbf{u}'$, $p = p_\text{o} + p'$ и отбросим квадратичные по $\mathbf{u}'$, p' члены в уравнениях Навье–Стокса, предварительно совершив в них переход к новым зависимым и независимым переменным согласно введенным выше масштабам. Тогда линейное приближение в применении к помеченным штрихами возмущениям $\mathbf{u}' = \{u', v'\}$, p' исходного поля скоростей $\mathbf{u}_\text{o} = \{u_\text{o}, v_\text{o}\}$ и давления p_o приводит к уравнениям

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}_\text{o} \times \nabla)\mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \times \nabla)\mathbf{u}_\text{o} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}}\nabla^2 \mathbf{u}', \quad \nabla \times \mathbf{u}' = 0, \quad \nabla = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\} \tag{1.4}$$

Будем искать решение уравнений (1.4) в виде свободных колебаний вязкой жидкости

$$[u', v', p'] = [\tilde{u}(y), \tilde{v}(y), \tilde{p}(y)]e^{ik(x-ct)} \tag{1.5}$$

Дальнейшее изложение удобно вести в терминах параметра σ, посредством которого прибегнем к нормировке

$$\tilde{u} = u_1, \quad \tilde{v} = \sigma v_1, \quad \tilde{p} = \sigma^2 p_1 \quad k = \sigma K \tag{1.6}$$

Амплитудные функции u_1, v_1, p_1 удовлетворяют вытекающей из (1.4), (1.5), (1.6) системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$iK(u_\text{o} - c)u_1 + \frac{du_\text{o}}{dy}v_1 = -i\sigma^2 K p_1 - \frac{\sigma K^2}{\text{Re}}u_1 + \frac{1}{\sigma \text{Re}}\frac{d^2 u_1}{dy^2} \tag{1.7}$$

$$iK(u_\text{o} - c)v_1 = -\frac{dp_1}{dy} - \frac{\sigma K^2}{\text{Re}}v_1 + \frac{1}{\sigma \text{Re}}\frac{d^2 v_1}{dy^2} \tag{1.8}$$

$$iKu_1 + \frac{dv_1}{dy} = 0 \tag{1.9}$$

Граничные условия к системе (1.7)–(1.9) являются однородными

$$y = \pm 1: \quad u_1 = 0, \quad v_1 = 0 \tag{1.10}$$

поскольку условия прилипания (1.3) частиц жидкости к движущимся стенкам канала реализуются посредством невозмущенных функций u_o, v_o.

Задача (1.7)–(1.10) эквивалентна задаче

$$(u_\text{o} - c)\left(\frac{d^2 v_1}{dy^2} - \sigma^2 K^2 v_1\right) - \frac{d^2 u_\text{o}}{dy^2}v_1 = \frac{1}{i\sigma \text{Re} K}\left(\frac{d^4 v_1}{dy^4} - 2\sigma^2 K^2 \frac{d^2 v_1}{dy^2} + \sigma^4 K^4 v_1\right) \tag{1.11}$$

$$y = \pm 1: \quad v_1 = \frac{dv_1}{dy} = 0 \tag{1.12}$$

причем уравнение Орра–Зоммерфельда (1.11) получается из (1.7)–(1.9) исключением функций u_1, p_1. Вспомогательный параметр σ, который считается малым, позволяет дать единообразное описание четырех различных режимов нейтральных (или близких к нейтральным) колебаний.

2. ЯДРО ВОЗМУЩЕННОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА–ПУАЗЕЙЛЯ

Положим $\text{Re} \to \infty$ и отбросим в правых частях (1.7), (1.8) члены, содержащие Re^{-1} в качестве коэффициента. Тогда исключение функции u_1 из (1.7) с помощью (1.9) имеет следствием уравнение

$$(u_\text{o} - c)^2 \frac{d}{dy}\frac{v_1}{u_\text{o} - c} = i\sigma^2 K p_1 \tag{2.1}$$

Дифференциальный оператор в левой части (2.1) переводит в нуль одномерное подпространство функций $a_1(u_\text{o} - c)$ при произвольных a_1. Поэтому эквивалентная интегральная форма дифференциального уравнения (2.1) имеет вид

$$v_1 = a_1(u_\text{o} - c) + (u_\text{o} - c)\int_0^y \frac{i\sigma^2 K p_1}{(u_\text{o} - c)^2}d\hat{y} \tag{2.2}$$

Что касается функции p_1, то она выражается через v_1 посредством уравнения (1.8) с точностью до постоянной b_1

$$p_1 = -\int_0^y iK(u_\text{o} - c)v_1 d\hat{y} + b_1 \tag{2.3}$$

Из (2.2) видно, что отбрасывание вязких членов порядка Re^{-1} в уравнениях (1.7), (1.8) дает правильное асимптотическое приближение к точному решению при $\text{Re} \to \infty$ лишь вне критических слоев, а именно вне окрестностей точек $y = y_{\pm c}$, являющихся корнями уравнения $u_\text{o}(y) = c$. Действительно, фигурирующий в (2.2) интеграл от неограниченной в окрестностях точек $y = y_{\pm c}$ функции является расходящимся. Поскольку функция u_o, задаваемая (1.2), является полиномом второго порядка, то упомянутое уравнение $u_\text{o}(y) = c$ имеет два корня $y_{\pm c}$.

Обратимся к случаю

$$c \to 0, \quad u_w \to 0, \quad u_w \sim c \tag{2.4}$$

Решения уравнения $u_\text{o}(y) = c$ в соответствии с (1.2) фиксируют два критических слоя, располагающихся для случая (2.4) вблизи верхней и нижней стенок

$$y_{\pm c} = \frac{u_w}{3} \pm \sqrt{1 - \frac{2c}{3} + \frac{u_w^2}{9}} = \pm 1 + \frac{u_w}{3} \mp \frac{c}{3} + O(c^2) \tag{2.5}$$

Здесь и всюду в последующих формулах берется либо верхний знак, либо нижний знак в символах $\pm$ и $\mp$.

Оценим толщины критических слоев, воспользовавшись формулой

$$u_\text{o}(y) - c = u_\text{o}(y) - u_\text{o}(y_{\pm c}) = u_w(y - y_{\pm c}) - \frac{3}{2}(y^2 - y_{\pm c}^2) = \mp 3(y - y_{\pm c})\left[1 \pm \frac{y - y_{\pm c}}{2} + O(c)\right] \tag{2.6}$$

Для $y \to y_{\pm c}$ в уравнении (1.7) два члена, а именно $iK(u_\text{o} - c)u_1$ и $\sigma^{-1}\,\text{Re}^{-1}\, d^2u_1/dy^2$, становятся одного порядка, если

$$y - y_{\pm c} = O(\sigma^{1/3}\,\text{Re}^{1/3}) \tag{2.7}$$

Асимптотическая оценка (2.7), выведенная из (2.6), и определяет размеры тех подобластей в окрестностях точек $y_{\pm c}$, где часть вязких членов в уравнениях (1.7)—(1.9) оказывает существенное влияние на структуру решения.

С другой стороны, решение невязких уравнений (2.2), (2.3) не может удовлетворять двум условиям (1.10) на каждой стенке канала одновременно (в противном случае это решение должно быть тривиальным, так как отбрасывание правой части (1.9) приводит к уравнению второго порядка). Следовательно, вязкая природа возмущений сохраняется в пристеночных слоях даже в пределе $\text{Re} \to \infty$.

В окрестностях стенок канала удобно использовать растянутые координаты $Y_\pm$, вводимые как

$$Y_+ = (1 - y)\sigma^{3/2}\,\text{Re}^{1/2}, \quad Y_- = (1 + y)\sigma^{3/2}\,\text{Re}^{1/2} \tag{2.8}$$

Выражения (2.7) учитывают оценку

$$y \mp 1 = O(\sigma^{-3/2}\,\text{Re}^{-1/2}) \tag{2.9}$$

толщин вязких пристеночных слоев. Для получения данной оценки достаточно приравнять порядки величин первого и третьего членов в правой части уравнения (1.7).

Подстановка в (2.3) выражения (2.2) с учетом (1.2) дает

$$p_1(y) = -ia_1K\int_0^y (u_\text{o} - c)^2 d\hat{y} + b_1 = -ia_1K\left(\frac{9}{4}y - \frac{3}{2}y^3 + \frac{9}{20}y^5\right) + b_1 + O(c)$$

и, в частности, на верхней и нижней стенках

$$p_\pm = p_1(\pm 1) = \mp\frac{6}{5}ia_1K + b_1 + O(c) \tag{2.10}$$

Найдем поведение решения невязких уравнений (2.2), (2.3), которым описывается возмущенное течение в основной толще (ядре) канала, при приближении извне к критическим слоям (где само невязкое решение непригодно). Именно локальные значения $p_\pm = p_1(\pm 1)$ определяют главную часть и конечную часть в смысле Адамара [17] расходящегося в точках $y = y_{\pm c}$ интеграла в формуле (2.2). Принимая во внимание (2.4), (2.6), после выделения главной части выражения (2.2) находим его предельный вид при $y \to y_{\pm c}$

$$v_1 = \mp 3(y - y_{\pm c})\left\{a_1 \mp \frac{i}{9}\sigma^2 Kp_{\pm}\ln\left[\mp(y - y_{\pm c})\right]\right\} \pm \frac{i}{3}\sigma^2 Kp_{\pm} + O(\sigma^4 \ln\sigma) \tag{2.11}$$

Уточним выбор однозначной ветви многозначной функции $\ln[\mp(y - y_{\pm c})] = \ln|y - y_{\pm c}| + i\arg[\mp(y - y_{\pm c})]$ в правой части (2.11). Предположим, что величина c (а следовательно, и $y_{\pm c}$) вещественна. Тогда для $y_{-c} < y < y_{+c}$ считаем, что $\arg(y - y_{-c}) = 0$ и $\arg(y_{+c} - y) = 0$. Случаи $y < y_{-c}$ и $y > y_{+c}$, а также $c_{im} \neq 0$ (где c_{im} — мнимая часть c) будут обсуждаться ниже.

3. ТРЕХЪЯРУСНАЯ СХЕМА ВОЗМУЩЕНИЙ: $u_w = O(\mathrm{Re}^{-2/7})$

Пусть расстояния $|y_{\pm c} \mp 1|$ от критических слоев до стенок канала порядка толщины самих критических слоев. Это означает, что пристеночные слои совпадают с критическими и оценки их толщин идентичны: $|y_{\pm c} \mp 1| \sim |y \mp 1|$ для $Y_{\pm} = O(1)$. Приравнивая правые части (2.7) и (2.9), получим

$$\sigma = \mathrm{Re}^{-1/7} \tag{3.1}$$

Но тогда соотношение $y_{\pm c} \mp 1 \sim c$, вытекающее из выведенной для $c \to 0$, $c \sim u_w$ формулы (2.5), приводит в соответствии с (2.7), (2.9) к оценкам $c = O(\mathrm{Re}^{-2/7}), u_w = O(\mathrm{Re}^{-2/7})$.

Таким образом, рассматривается трехъярусная структура поля возмущенного потока в канале, состоящая из невязкого ядра $y = O(1)$ и двух примыкающих к стенкам канала вязких критических слоев $Y_{\pm} = (1 \mp y)\mathrm{Re}^{2/7} = O(1)$. Вышеприведенные оценки для c и u_w делают естественной нормировку

$$c = \mathrm{Re}^{-2/7}\,\bar{c}, \quad u_w = \mathrm{Re}^{-2/7}\,\bar{u}_w \tag{3.2}$$

где $\bar{c} = O(1), \bar{u}_w = O(1)$.

Тонкие критические слои характеризуются большими значениями производных по вертикальной координате y, поэтому, заменяя в уравнении Орра–Зоммерфельда (1.9) коэффициент $u_o - c$ его асимптотическим представлением (2.6), имеем для главных членов

$$\mp 3(y - y_{\pm c})\frac{d^2 v_1}{dy^2} = \frac{1}{i\,\mathrm{Re}^{6/7}\,K}\frac{d^4 v_1}{dy^4} \tag{3.3}$$

Уравнения (3.3) справедливы в критических слоях, причем из (2.5), (2.8), (3.1), (3.2) очевидно

$$\mp(y - y_{\pm c}) = 1 \mp y - \frac{c}{3} \pm \frac{u_w}{3} = \left(Y_{\pm} - \frac{\bar{c}}{3} \pm \frac{\bar{u}_w}{3}\right)\mathrm{Re}^{-2/7} \tag{3.4}$$

Параметр Re в уравнениях (3.3) исключается посредством перехода к комплексным переменным

$$Z_{\pm} = \mp(3iK)^{1/3}(y - y_{\pm c})\,\mathrm{Re}^{2/7} = \left(\frac{iK}{9}\right)^{1/3}(3Y_{\pm} - \bar{c} \pm \bar{u}_w) \tag{3.5}$$

а сами уравнения (3.3) приобретают вид уравнения Эйри [18]

$$Z_{\pm}\frac{d^2 v_1}{dZ_{\pm}^2} = \frac{d^4 v_1}{dZ_{\pm}^4} \tag{3.6}$$

относительно второй производной $d^2 v_1/dZ_{\pm}^2$. Согласно (3.5) в критических слоях $Z_{\pm} = O(1)$.

На комплексной плоскости K проведем разрез по положительной мнимой полуоси и зафиксируем однозначную ветвь многозначной функции $K^{1/3}$ в (3.5), полагая

$$\arg K \in \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \tag{3.7}$$

Граничные условия (1.10) в терминах переменных $Z_\pm$ переписываются следующим образом:

$$Z_\pm = \zeta_\pm: \quad v_1 = \frac{dv_1}{dZ_\pm} = 0 \tag{3.8}$$

где комплексные постоянные $\zeta_\pm$ представляют собой значения $Z_\pm$ на стенках канала $y = \pm 1$, то есть при $Y_\pm = 0$

$$\zeta_\pm = \left(\frac{iK}{9}\right)^{1/3} (\pm \overline{u}_w - \overline{c}) \tag{3.9}$$

Помимо граничных условий (3.8), решения уравнений (3.6) должны удовлетворять асимптотическим условиям сращивания с внешним невязким решением (2.2), (2.3) в ядре потока. Дисперсионное соотношение, обеспечивающее выполнение необходимых и достаточных условий сращивания, налагает следующую функциональную связь между параметрами K, $\overline{c}$, $\overline{u}_w$ однородной краевой задачи (1.7)–(1.10):

$$\frac{d\mathrm{Ai}(\zeta_-)}{dZ}\left[\int_{\zeta_-}^{\infty}\mathrm{Ai}(Z)dZ\right]^{-1} + \frac{d\mathrm{Ai}(\zeta_+)}{dZ}\left[\int_{\zeta_+}^{\infty}\mathrm{Ai}(Z)dZ\right]^{-1} = \frac{4(3i)^{1/3}K^{7/3}}{15} \tag{3.10}$$

где $\zeta_\pm$ определены с помощью (3.9). Заметим, что в дисперсионном соотношении (3.10) число Рейнольдса Re не фигурирует. Однако величины K, $\overline{c}$, $\overline{u}_w$ введены нормировкой параметров k, c, u_w на некоторые степени числа Рейнольдса по формулам (1.6), (3.1), (3.2).

Значения входящих в показатели экспоненциальной функции из (1.5) величин k и c (при заданных u_w, Re) являются собственными для исходной краевой задачи (1.7)–(1.10) и эквивалентной задачи (1.11), (1.12). Отвечающие им собственные функции выражаются через функцию Эйри в пристеночных подобластях и задаются выражением (2.2) в ядре возмущенного течения Куэтта–Пуазейля. Построенный класс внутренних волн представляет собой предельную форму (при $\mathrm{Re} \to \infty$) волн Толлмина–Шлихтинга с прилегающими к стенкам критическими слоями.

Укажем некоторые решения дисперсионного уравнения (3.10). С этой целью положим $\zeta_\pm \to \infty$, $\arg\zeta_\pm \in (-\pi, \pi)$ и заменим функцию Эйри в левой части (3.15) ее асимптотикой [18, 19]. В результате (3.10) приобретает вид

$$\overline{c} = \frac{2K^2}{5} + \frac{3\times 5^{1/2}}{2^{3/2}K^{3/2}}\mathbf{e}^{i\pi/4}\left\{\left[1 - \frac{5\overline{u}_w}{2K^2}\right]^{-1/2} + \left[1 + \frac{5\overline{u}_w}{2K^2}\right]^{-1/2}\right\} + O(K^{-5}) \tag{3.11}$$

Предельный вид (3.11) дисперсионного соотношения (3.10) показывает, что среди его решений присутствуют неустойчивые моды. В самом деле, фазовая скорость $\overline{c} = \overline{c}_r + i\overline{c}_{im}$ при $K \to +\infty$ в соответствии с (3.11) имеет положительную мнимую часть $\overline{c}_{im} > 0$ и, следовательно, амплитуда волновых возмущений (1.5) экспоненциально нарастает во времени.

Для фиксированных K и $\overline{u}_w$ существует бесконечный дискретный спектр собственных значений $\overline{c}$. Доказательство данного утверждения основано на поведении функции Эйри в окрестности отрицательной вещественной полуоси [18, 19]. Спектр фазовых скоростей $\overline{c}^{(j)}$ для заданных K, $\overline{u}_w$ устанавливается с помощью (3.9), причем в случае $K = O(1)$, $\overline{u}_w = O(1)$, $j \to +\infty$ справедлива асимптотика

$$\overline{c}^{(j)} = \frac{3^{2/3}\zeta^{(j)}}{i^{1/3}K^{1/3}}$$

Что касается первой моды из упомянутого спектра, то траектории первого корня дисперсионного соотношения (3.10) вычерчиваются на комплексной плоскости $\overline{c} = \overline{c}_r + i\overline{c}_{im}$ для фиксированной величины $\overline{u}_w$, когда K пробегает интервал $(0, +\infty)$. Точки пересечения указанных траекторий с осью $\overline{c}_{im} = 0$ отвечают нейтральным решениям дисперсионного уравнения (3.10), определяющим границы устойчивых и неустойчивых областей.

Основным качественным результатом развитой асимптотической теории является неединственность нейтрального решения при ненулевых скоростях стенок $\overline{u}_w$. Нейтральные (то есть дающие $\overline{c}_{im} = 0$) значения волнового числа K оказываются многозначной функцией $\overline{u}_w$.

Заметим, что для $\bar{u}_w = 0$ (течение Пуазейля) нейтральная мода с примыкающими к стенкам критическими слоями [20] единственна. Поскольку течение Куэтта, которое, как отмечено выше, устойчиво и соответствует противоположному предельному переходу $\mathrm{Re}^{-2/7}\,\bar{u}_w \to +\infty$ (выводящему за пределы применимости описываемой асимптотической конструкции), качественное поведение нейтральных собственных решений является достаточно неожиданным.

4. МНОГОЯРУСНАЯ СХЕМА ВОЗМУЩЕНИЙ С ОТДЕЛЕННЫМИ ОТ СТЕНОК КРИТИЧЕСКИМИ СЛОЯМИ: $u_w = O(\mathrm{Re}^{-2/11})$

Сохраним предположение (2.4), при котором верно выражение (2.5), фиксирующее локализацию критических слоев $y = y_{\pm c}$. Однако теперь считаем, что расстояния $|y_{\pm c} \mp 1|$ от критических слов до стенок канала, оцениваемые как $O(c)$ согласно (2.5), превосходят по порядку величины толщину (2.7) критических слоев.

Потребуем, чтобы асимптотика (2.11) обеспечивала условия непротекания $v_1 = 0$ на стенках канала $y = \pm 1$

$$a_1(\pm u_w - c) \pm \frac{i\sigma^2 K}{3}\left(\mp\frac{6ia_1K}{5} + b_1\right) + O(\sigma^4 \ln\sigma) = 0 \tag{4.1}$$

При выводе (4.1) использовано (2.4), (2.5), (2.10). Складывая равенства (4.1), получим

$$c = \frac{2}{5}\sigma^2 K^2 + O(\sigma^4 \ln\sigma) \tag{4.2}$$

Считая здесь и всюду ниже, что $K > 0$ – вещественно, заключаем, что вещественная часть c_r фазовой скорости $c = c_r + ic_{im}$ имеет порядок $c_r \sim c \sim \sigma^2$. По аналогии с (3.2) положим

$$c_r = \sigma^2 \bar{c}_r, \quad u_w = \sigma^2 \bar{u}_w \tag{4.3}$$

где $\bar{c}_r = O(1)$, $\bar{u}_w = O(1)$. Вычитание равенств (4.1) (взятых с различными верхними и нижними знаками) приводит к

$$b_1 + O(\sigma^2 \ln\sigma) = \frac{3ia_1 u_w}{\sigma^2 K} = \frac{3ia_1 \bar{u}_w}{K} \tag{4.4}$$

В силу (4.4) комплексная постоянная $b_1 = b_r + ib_{im}$ обладает свойством $b_r = o(b_{im})$, то есть b_1 эквивалентна своей мнимой части. Таким образом, на основании (4.2) и (4.4) имеем с указанной асимптотической точностью

$$\bar{c}_r = \frac{2}{5}K^2, \quad b_{im} = \frac{3a_1\bar{u}_w}{K} \tag{4.5}$$

Связь (4.2) является следствием условий непротекания $v_1(\pm 1) = 0$ и представляет собой не что иное, как главную часть дисперсионного соотношения. Условиям прилипания частиц жидкости к стенкам канала $dv_1(\pm 1)/dy = -iKu_1(\pm 1) = 0$ посредством решений невязких уравнений (2.2), (2.3) с асимптотикой (2.11) удовлетворить невозможно. Упомянутые условия реализуются в вязких пристеночных слоях, масштаб толщины которых (2.9) меньше, чем расстояние от критических слоев до стенок порядка $O(c)$.

Произведем сращивание асимптотических разложений (2.11) и аналогичных разложений в пристеночных слоях. Продолжим аналитически функции (2.11) из промежутка $y_{-c} < y < y_{+c}$ в промежутки $y > y_{+c}$ и $y < y_{-c}$, лежащие над верхним и под нижним критическими слоями. В самих критических слоях выражения (2.11) непригодны. Для осуществления указанного аналитического продолжения достаточно обойти логарифмические точки ветвления $y = y_{\pm c}$ (выйдя с действительной оси на комплексную плоскость по переменной y), руководствуясь следующим правилом [10, 21, 22]: векторы $y_{+c} - y$ и $y - y_{-c}$ поворачиваются по часовой стрелке. Поэтому в (2.11) следует положить

$$\ln(y_{+c} - y) = \ln|y - y_{+c}| - i\pi, \quad y > y_{+c} \tag{4.6}$$

$$\ln(y - y_{-c}) = \ln|y - y_{-c}| - i\pi, \quad y < y_{-c} \tag{4.7}$$

Упомянутое сращивание приводит к зависимости

$$\sigma = \mathrm{Re}^{-1/11} \tag{4.8}$$

и устанавливает вид двух частей дисперсионного соотношения

$$c_r = \mathrm{Re}^{-2/11}\bar{c}_r, \quad \bar{c}_r = \frac{2}{5}K^2 \tag{4.9}$$

$$c_{im} = \mathrm{Re}^{-4/11}\left\{\frac{3}{2^{3/2}K^{1/2}}\left[\frac{1}{(\bar{c}_r - \bar{u}_w)^{1/2}} + \frac{1}{(\bar{c}_r + \bar{u}_w)^{1/2}}\right] - \frac{\pi}{3}(\bar{u}_w^2 + \bar{c}_r^2)\right\} \tag{4.10}$$

Дисперсионное соотношение (4.9), (4.10) записано в параметрической форме

$$\bar{c}_r = \bar{c}_r(\mathrm{Re}, K, \bar{u}_w), \quad \bar{c}_{im} = \bar{c}_{im}(\mathrm{Re}, K, \bar{u}_w) \tag{4.11}$$

Наряду с числом Рейнольдса Re параметрами в (4.10) служат ортонормированные волновое число K и скорость стенок $\bar{u}_w$, причем в соответствии с (1.6), (4.3), (4.8) имеем $K = \mathrm{Re}^{1/11}k$, $\bar{u}_w = \mathrm{Re}^{2/11}u_w$.

Отметим, что для $K \to +\infty$ из (4.10) следует $c_{im} < 0$, то есть волна (1.5) экспоненциально затухает и течение Куэтта–Пуазейля устойчиво по отношению к возмущениям данного вида, а для $K \to +0$ из (4.10) имеем $c_{im} > 0$ и течение Куэтта–Пуазейля неустойчиво.

5. СТРУКТУРА ВОЗМУЩЕНИЙ С ДВУМЯ КРИТИЧЕСКИМИ СЛОЯМИ, ОДИН ИЗ КОТОРЫХ ГРАНИЧИТ С ВЕРХНЕЙ СТЕНКОЙ: $u_w = O(\mathrm{Re}^{-2/13})$

Наличие особой точки ветвления $\bar{c}_r = \bar{u}_w$ степенной функции $(\bar{c}_r - \bar{u}_w)^{1/2}$, присутствующей в выражении (4.10), показывает, что окрестность этой точки описывается иными асимптотическими разложениями по сравнению с примененными выше. Необходимо положить

$$c = u_w + \sigma^4\hat{c}, \quad u_w = \sigma^2\bar{u}_w \tag{5.1}$$

Отличительная черта изучаемого здесь режима состоит в том, что в системе координат, связанной с верхней стенкой, фазовая скорость волнового возмущения в соответствии с (5.1) близка к нулю (имеет порядок σ^4). Поэтому очевидно, что верхний критический слой соприкасается со стенкой и поглощает верхний вязкий пристеночный слой. Рассматриваемая структура поля возмущений диктует связь

$$\sigma = \mathrm{Re}^{-1/13} \tag{5.2}$$

Таким образом, считаем, что окрестность y_{+c} совпадает с верхним пристеночным подслоем, в то время как окрестность y_{-c} и нижний пристеночный подслой разделены. Осуществляя процедуру сращивания асимптотических разложений в указанных подобластях, получим

$$\left(\frac{9}{iK}\right)^{1/3}\frac{d\mathrm{Ai}(\zeta_+)}{dZ_+}\left[\int\limits_{\zeta_+}^{\infty}\mathrm{Ai}(Z_+)dZ_+\right]^{-1} = -\frac{K(\Delta_i + \hat{b}_i)}{3a_1} - i\hat{c}_{im} - \frac{8i}{15}\pi K^2\bar{u}_w \tag{5.3}$$

Взятие мнимых частей справа и слева в (5.3) порождает соотношение

$$\mathrm{Im}\left\{\left(\frac{9}{iK}\right)^{1/3}\frac{d\mathrm{Ai}(\zeta_+)}{dZ_+}\left[\int\limits_{\zeta_+}^{\infty}\mathrm{Ai}(Z_+)dZ_+\right]^{-1}\right\} = -\hat{c}_{im} - \frac{4}{3}\pi\bar{u}_w^2 \tag{5.4}$$

Для $K \to +\infty$ и, следовательно, $\zeta_+ \to \infty$ воспользуемся асимптотическими свойствами функции Эйри [18], показывающими, что в указанном пределе левая часть соотношения (5.4) эквивалентна величине $\mathrm{Im}\{[9/(iK)]^{1/3}[(-\zeta_+ + O(\zeta_+^{-1/2})]\} \sim \hat{c}_{im}$. Следовательно, (5.4) приобретает форму

$$\hat{c}_{im} = -\frac{2}{3}\pi\bar{u}_w^2[1 + o(1)] \tag{5.5}$$

Заметим, что соотношения (5.5) и (4.10) близки по своей структуре: выражение в правой части (5.5) входит в качестве слагаемого в формулу (4.10), если в последней положить $\overline{c}_r \to \overline{u}_w$. Введенная в настоящем разделе модификация асимптотических разложений позволяет, как видно из (5.4), устранить особую точку ветвления $\overline{c}_r = \overline{u}_w$ в дисперсионном соотношении (4.10).

Параметры нейтральных волновых возмущений удовлетворяют уравнению

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{d\operatorname{Ai}(\zeta_+)}{dZ_+}\left[i^{1/3}\int\limits_{\zeta_+}^{\infty}\operatorname{Ai}(Z_+)dZ_+\right]^{-1}\right\} = -\frac{4\pi}{9}\left(\frac{45\overline{u}_w^{13}}{2}\right)^{1/6} \tag{5.6}$$

получающемуся из (5.4) для $\hat{c}_{im} = 0$.

6. СТРУКТУРА ВОЗМУЩЕНИЙ С ОДНИМ КРИТИЧЕСКИМ И ДВУМЯ ПРИСТЕНОЧНЫМИ СЛОЯМИ $u_w = O(\mathrm{Re}^{-4/19})$

Режим $|c| \ll u_w$ принципиально отсутствует в течении Пуазейля и требует для своего описания введения нормировки

$$\tilde{u} = u_1, \quad \tilde{v} = \sigma^3 v_1, \quad \tilde{p} = \sigma^4 p_1, \quad k = \sigma^3 K \tag{6.1}$$

отличающейся от (1.6) асимптотическим масштабом амплитуд волновых возмущений (1.5) в терминах малого параметра σ. Из (1.4), (1.5), (6.1) вместо (1.7)–(1.9) имеем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$iK(u_o - c)u_1 + \frac{du_o}{dy}v_1 = -i\sigma^4 Kp_1 - \frac{\sigma^3K^2}{\mathrm{Re}}u_1 + \frac{1}{\sigma^3\mathrm{Re}}\frac{d^2u_1}{dy^2} \tag{6.2}$$

$$iK(u_o - c)v_1 = -\frac{1}{\sigma^2}\frac{dp_1}{dy} - \frac{\sigma^3K^2}{\mathrm{Re}}v_1 + \frac{1}{\sigma^3\mathrm{Re}}\frac{d^2v_1}{dy^2} \tag{6.3}$$

$$iKu_1 + \frac{dv_1}{dy} = 0 \tag{6.4}$$

Предполагаемая в настоящем разделе структура пульсационного потока диктует следующую связь:

$$\sigma = \mathrm{Re}^{-1/19} \tag{6.5}$$

Обозначая $\overline{c} = \overline{c}_o$, в результате сращивания находим

$$\overline{c}_o = \frac{2K^2}{5} + \frac{3}{(2K\overline{u}_w)^{1/2}} \tag{6.6}$$

Полученная зависимость (6.6) между параметрами $\overline{c}_o$, K, $\overline{u}_w$ естественно интерпретировать как дисперсионное соотношение для собственных значений $\overline{c}_o$, K (при заданной $\overline{u}_w$). Оказалось, что в рассмотренном приближении волновые возмущения нейтральны, поскольку в соответствии с (6.6) фазовая скорость $\overline{c}_o$ вещественна.

Мнимая часть фазовой скорости является величиной высшего порядка малости по сравнению с вещественной частью и требует для своего определения еще одного приближения по малому параметру σ, поэтому положим

$$\overline{c} = \overline{c}_o + \sigma^2\hat{c} \tag{6.7}$$

Здесь величина $\overline{c}_o$, очевидно, подчиняется уравнению (6.6). Сращивание членов высшего порядка малости приводит к двум равенствам

$$\begin{gathered} -a_1\hat{c} = \frac{3K^{1/2}b_1\overline{c}_o}{2\overline{u}_w^{5/2}} + \frac{i^{1/2}K^{1/2}}{\overline{u}_w^{3/2}}\left(-\frac{6i}{5}Ka_1 + \hat{b}_1\right) \\ -a_1\hat{c} + \frac{1}{9}\pi Kb_1\overline{u}_w = \frac{3K^{1/2}b_1\overline{c}_o}{2\overline{u}_w^{5/2}} - \frac{K^{1/2}}{i^{1/2}\overline{u}_w^{3/2}}\left(\frac{6i}{5}Ka_1 + \hat{b}_1\right) \end{gathered} \tag{6.8}$$

Для исключения постоянной $\hat{b}_1$ умножим первое из равенств (6.8) на i и сложим со вторым. Тогда, выделяя в полученной сумме мнимую часть, выводим соотношение

$$\hat{c}_{im} = -\frac{6}{\hat{u}_w}\left[-\frac{\pi\overline{u}_w^3}{36} + \frac{K^2}{5(2K\overline{u}_w)^{1/2}} + \frac{9}{4K\overline{u}_w}\right] \tag{6.9}$$

Здесь $\hat{c}_{im}$ означает мнимую часть комплексной величины $\hat{c} = \hat{c}_r + i\hat{c}_{im}$. Объединение формул (6.5)–(6.9) представляет собой две части дисперсионного соотношения, записанного в параметрическом виде

$$\begin{aligned} c_r &= \mathrm{Re}^{-6/19}\,\overline{c}_\mathrm{o}(K,\overline{u}_w) \\ c_{im} &= \mathrm{Re}^{-8/19}\,\hat{c}_{im}(K,\overline{u}_w) \end{aligned} \tag{6.10}$$

Остается заметить, что $K = \mathrm{Re}^{3/19}\,k$, $\overline{u}_w = \mathrm{Re}^{4/19}\,u_w$ в силу (6.1), (6.5). Функции $\overline{c}_\mathrm{o}$, $\hat{c}_{im}$ в (6.10) задаются выражениями (6.6), (6.9), причем отдельно для действительной и мнимой частей комплексной фазовой скорости $c = c_r + ic_{im}$ сохранены главные приближения в разложениях по отрицательным степеням $\mathrm{Re} \to +\infty$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена асимптотическая (число Рейнольдса $\mathrm{Re} \to +\infty$) теория четырех различных режимов развития малых волновых возмущений стационарного течения в плоском канале с подвижными стенками (течения Куэтта–Пуазейля). Режимы отличаются разным взаимным расположением вязких пристеночных и критических слоев, что приводит к разной зависимости параметров задачи (относительной скорости стенок и параметров возмущения) от Re.

Найдены и проанализированы дисперсионные соотношения между параметрами, в частности применительно к нейтральным по времени возмущениям. Показано существование растущих по времени возмущений, для которых течение Куэтта–Пуазейля неустойчиво.

В важном случае совпадения вязких пристеночных и критических слоев показана неединственность решения дисперсионного соотношения для нейтральных по времени возмущений, когда волновое число возмущения оказывается многозначной функцией относительной скорости стенок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Романов В.А.* Устойчивость плоскопараллельного течения Куэтта // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196. № 5. С. 1049–1051.
2. *Романов В.А.* Устойчивость плоскопараллельного течения Куэтта // Функциональный анализ и его приложения. 1973. Т. 7. Вып. 2. С. 62–73.
3. *Бойко А.В., Грек Г.Р., Довгаль А.В., Козлов В.В.* Возникновение турбулентности в пристенных течениях. Новосибирск: Наука. Сиб. предприятие РАН, 1999. 328 с.
4. *Heisenberg W.,* Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen // Ann. Phys. 1924. V. 74. P. 577–627.
5. *Reid W.H.* The stability of parallel flows / Basic Developments in Fluid Dynamics. Academic Press, 1965. V. 1.
6. *Нейланд В.Я.* Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений // Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 1529. 125 с.
7. *Stewartson K.* Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies // Adv. Appl. Mech. 1974. V. 14. P. 145–239.
8. *Smith F.T.* On the high Reynolds number theory of laminar flows // IMA J. Appl. Math. 1982. V. 28. № 3. P. 207–281.
9. *Smith F.T.* On the nonparallel flow stability of the Blasius boundary layer // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1979. V. 366. № 1724. P. 91–109.
10. *Жук В.И.* Волны Толлмина–Шлихтинга и солитоны. М.: Наука, 2001. 167 с.
11. *Smith F.T.* Flow through constricted or dilated pipes and channels: Part 1 // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1976. V. 29. Pt. 3. P. 343–364.
12. *Smith F.T.* Upstream interaction in channel flows // J. Fluid Mech. 1977. V. 79. Pt. 4. P. 631–655.
13. *Богданова Е.В., Рыжов О.С.* О колебаниях, возбуждаемых гармоническим осциллятором в течении Пуазейля // Докл. РАН. 1981. Т. 257. № 4. С. 837–841.

14. *Bogdanova E.V., Ryzhov O.S.* Free and induced oscillations in Poiseuille flow // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1983. V. 36. Pt. 2. P. 271–287.
15. *Smith F.T., Cowlew S.J.* On the stability of Poiseuille-Couette flow: a bifurcation from infinity // J. Fluid Mech. 1985. V. 156. P. 83–100.
16. *Healy J.J.* On the neutral curve of the flat-plate boundary layer: comparison between experiment, Orr-Sommerfeld theory and asymptotic theory // J. Fluid Mech. 1995. V. 288. P. 59–73.
17. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперолического типа. М.: Наука, 1978. 352 с.
18. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464 с.
19. Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. М.: Наука, 1979. 832 с.
20. *Жук В.И., Рыжов О.С.* О свободном взаимодействии пристеночных слоев с ядром течения Пуазейля // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257. № 1. С. 55–59.
21. *Lin C.C.* On the stability of two-dimensional parallel flow. III. Stability in a viscous fluid // Quart. Appl. Math. 1946. V. 3. № 4. P. 277–301.
22. *Линь Цзя-цзяо.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд.-во иностр. лит., 1958. 194 с.