ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2019, № 2, с. 134–144

УДК 533.7

О МОДИФИКАЦИИ ОСРЕДНЕННЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

© 2019 г. В. В. Лунев*

Центральный научно-исследовательский институт машиностроения (ЦНИИмаш), Королев, Московская обл., Россия

* *E-mail: lunev_vv@mail.ru*

Поступила в редакцию 03.08.2018 г.
После доработки 18.10.2018 г.
Принята к публикации 18.10.2018 г.

Путем осреднения "по Рейнольдсу" уравнений Навье–Стокса, в рамках общепринятой модели осредненных (по спектру) пульсаций, в явной форме получена новая форма уравнений Навье–Стокса, содержащих новые члены, обусловленные пульсациями плотности, и придана физическая обоснованность некоторым ранее "интуитивным" членам этих уравнений. Для вывода уравнений $k-\omega$-модели применен "метод моментов", и из общего уравнения импульсов выведено новое уравнение для пульсаций вихря ω, которое ранее выписывалось на "интуитивно-аналоговом" уровне.

Ключевые слова: турбулентные пульсации, уравнения Навье–Стокса, осреднение Рейнольдса, модель Прандтля, дифференциальные $k-\omega$-уравнения для средних энергии пульсаций и вихря, учет пульсаций плотности

DOI: 10.1134/S0568528119020087

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И КРАТКАЯ ИСТОРИЯ ВОПРОСА

В 1883 г. О. Рейнольдс [1] обнаружил, что смена режима течения жидкости в трубе от "упорядочного" (ламинарного) к "хаотичному" (турбулентному) происходит при достижении некого "критерия подобия" $\mathrm{Re} = \rho U d/\mu$ (ныне "числа Рейнольдса", U, ρ, μ – скорость, плотность и коэффициент вязкости жидкости, d – диаметр трубы). В 1895 г. тот же О. Рейнольдс [2, 3] ввел в уравнения Навье–Стокса новые члены – "турбулентные напряжения" τ_{tij}, обусловленные "турбулентными пульсациями", чем положил начало развития теории турбулентных течений.

Уравнение Рейнольдса выводится из полного уравнения импульсов Навье–Стокса

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_c \mathbf{U}_c) + \mathbf{L}_{\mathrm{U}c} = -\nabla p_c + \mathrm{Div}\mathbf{P}_{\mu c}, \quad \mathrm{Div}\mathbf{P}_{\mu c} = \mathrm{Div}\mathbf{P}_{lc} - \nabla p_c$$
$$\mathbf{L}_{\mathrm{U}c} = \mathrm{div}(\rho_c \mathbf{U}_c \mathbf{U}_c) = (\nabla \rho_c \mathbf{U}_c)\mathbf{U}_c = \frac{\partial}{\partial x}(\rho_c U_{xc}\mathbf{U}_c) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_c U_{yc}\mathbf{U}_c) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_c U_{zc}\mathbf{U}_c) \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{U}$, p – вектор скорости и давление газа, а индекс "c" помечает полные, не осредненные его параметры, и отсутствует у осредненных. Использована декартова система координат x, y, z (с ортами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \boldsymbol{\varkappa}$); этими же индексами помечены компоненты скоростей. Член $\mathrm{Div}\mathbf{P}_\mu$ – дивергенция тензора $\mathbf{P}$, содержит только вязкие напряжения, а тензор $\mathbf{P}_l$ полных ламинарных напряжений определяется известными соотношениями ([4–7] и др.) "Обобщенного закона Ньютона" (термин Л.Г. Лойцянского [6]), или (по Г. Шлихтингу [5]) "Закона сопротивления Стокса" [8].

Пусть теперь $\mathbf{U}$, $\mathbf{u}$ есть векторы средней и пульсационной скоростей жидкости

$$\mathbf{U}_c = \mathbf{U} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{U} = \langle \mathbf{U}_c \rangle = \mathbf{i}U_x + \mathbf{j}U_y + \boldsymbol{\varkappa}U_z, \quad \mathbf{u} = \mathbf{i}u_x + \mathbf{j}u_y + \boldsymbol{\varkappa}u_z \tag{1.2}$$

При этом, если F и f' есть некоторые средние и пульсационные (помечены, кроме $\mathbf{u}$, верхними штрихами) величины, то по определению последних имеем

$$F_c = F + f', \quad \langle f' \rangle = 0, \quad \langle f' F \rangle = 0, \quad \langle F_{ic}F_{jc} \rangle = F_i F_j + \langle f_i' f_j' \rangle \tag{1.3}$$

Положив еще плотность $\rho_c = \rho + \rho'$ и давление $p_c = p + p'$, после осреднения уравнения (1.1), получим "уравнение Рейнольдса" в векторной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{U}) + \mathbf{L}_\mathbf{U} = -\nabla p + \mathrm{Div}\mathbf{P}_t + \mathrm{Div}\mathbf{P}_\mu - \mathbf{L}'_\mathbf{U}, \quad \mathbf{P}_t = \|\tau_{tij}\|$$
$$\mathbf{L}_\mathbf{U} = \mathrm{div}(\rho\mathbf{U}\mathbf{U}), \quad \mathbf{L}'_\mathbf{U} = \mathrm{div}\langle(\rho'\mathbf{U}_c\mathbf{U}_c)\rangle, \quad \tau_{tij} = -\langle \rho u_i u_j \rangle \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{P}_t$ – тензор турбулентных напряжений Рейнольдса с элементами τ_{tij}. Это уравнение Рейнольдс получил для несжимаемой жидкости (т.е. при $\rho = \mathrm{const}$, $\rho' = 0$, $\mathbf{L}'_\mathbf{U} = 0$), но в такой "обобщенной" форме оно применимо и к сжимаемому газу. Конкретизацию же члена $\mathbf{L}'_\mathbf{U}$, порожденного пульсациями плотности, отнесем в разд. 5. Член $\mathrm{Div}\mathbf{P}_\mu$ зависит здесь лишь от средних параметров течения, что строго справедливо лишь при постоянных μ и ρ, но распространяется и на общий случай, как покажем позже, также в разд. 2.

Подчеркнем, что здесь опущен член $\partial\langle\rho'\mathbf{u}\rangle/\partial t$, подобные члены будут опущены и далее, т.е. во всех нестационарных членах плотность ρ_c сразу заменим средней плотностью ρ, что прокомментируем в разд. 6.

И, наконец, еще раньше Ж. Буссинеск, ([9], 1877), по аналогии с коэффициентом μ, ввел понятие коэффициента "турбулентной вязкости" μ_t в линейной зависимости турбулентных напряжений τ_{tij} от производных средних скоростей. В обобщении эта модель сводится к получению турбулентного закона сопротивления $\mathbf{P}_t$ из ламинарного $\mathbf{P}_l$, заменой "ламинарных" членов на "турбулентные" (очевидна и обратная операция, так что выписывать тензор $\mathbf{P}_l$ здесь не будем). Таким образом

$$\mathbf{P}_t = -p_{t*}E + 2\mu_t\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \tau_{tij} = -\langle\rho u_i u_j\rangle = -p_{t*}\delta_{ij} + 2\mu_t\varepsilon_{ij}, \quad p_{t*} = p_t + \frac{2}{3}\mu_t \mathrm{div}\mathbf{U}$$
$$p_t = -\frac{1}{3}\sum_i \tau_{ii} = \frac{2}{3}\rho k, \quad k = \frac{1}{2}\sum_i u_i^2, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.5}$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор скоростей деформаций ε_{ij}, E – единичная матрица, δ_{ij} – символ Кронеккера, k – удельная кинетическая энергия пульсаций и введено понятие "турбулентного давления" p_t – аналога обычного давления p, что позволяет говорить о "молекулярно-пульсационной аналогии", лежащей, по существу, в основе модели Буссинеска и упоминаемой в трудах классиков.

При этом проблемой стало определение турбулентной вязкости μ_t и первым результатом здесь была широко известная "1-я формула Л. Прандтля" для турбулентного сопротивления в трубах, с поперечным профилем средней продольной скорости $U_y = U_y(y)$ (1925 г., [10, 11], см. также [3–6])

$$\tau_{txy} = -\langle\rho u_x u_y\rangle = \mu_t\frac{dU_x}{dy}, \quad \mu_t = \rho l^2\left|\frac{dU_x}{dy}\right| \tag{1.6}$$

Здесь y – расстояние до стенки, l – "длина пути перемешивания", или "масштаб турбулентности", понятия, введенные Л. Прандтлем и положенные в основу полученных ниже результатов. Но применимость подобных формул (как собственно и других теорий того времени, Кармана, например, [3–6]) ограничена лишь пристеночными или слоистыми течениями и не допускает непосредственного распространения на течения более широких классов. Поэтому современная теория турбулентных течений основана на использовании именно уравнений Навье–Стокса, с добавлением в них дополнительных, рейнольдсовских членов с турбулентными коэффициентами переноса, определяемыми по различным моделям.

В этих моделях турбулентная вязкость определяется, как правило, по теории размерностей формулой $\mu_t = C'_{\mu t}\rho k^{1/2}l$, где $C'_{\mu t}$ – коэффициент, а для параметров k и l выводятся дополнительные соотношения или уравнения. В частности, это могут быть наиболее продвинутые в наше время дифференциальные модели турбулентности, которым и посвящена данная статья. В распространенном k–ω-варианте таких моделей заменой $l = k^{1/2}/\omega$ вводится в теорию новый параметр "ω", с размерностью вихря и с тем же названием. Тогда $\mu_t = C_{t\mu}k/\omega$, где $C_{t\mu}$ – некоторый коэффициент.

Такая система уравнений для развитых турбулентных несжимаемых течений (без учета молекулярной вязкости) была впервые предложена А.Н. Колмогоровым ([12], 1942 г.), и для одной i-й компоненты средней скорости выписана ниже

$$\frac{dU_i}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\rho} + b\right) + A\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{b}{\omega}\varepsilon\right), \quad \varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right), \quad b = \frac{1}{3}\sum_j \langle u_j^2\rangle \tag{1.7}$$

$$\frac{db}{dt} = P_k - b\omega + A''\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{b}{\omega}\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_j}\right), \quad \varepsilon^0 = \sum_{i,j}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)^2, \quad P_k = \frac{A}{3}\frac{b}{\omega}\varepsilon^0 \tag{1.8}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = P_\omega - \frac{7}{11}\omega^2 + A'\sum_j\left(\frac{b}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\right), \quad P_\omega = 0 \tag{1.9}$$

Уравнение (1.7) является упрощенным аналогом уравнения (1.4), P_k есть член, “порождающий энергию пульсаций”, величина ω “есть некоторая средняя частота пульсаций” (не называется “вихрем”), так что обратная величина ω^{-1} есть характерное время развития пульсаций. Последние члены в этих уравнениях описывают процессы диффузии, причем отношение b/ω “играет роль некоторого коэффициента диффузии”. И “наконец, A, A', A'' суть численные постоянные, которые должны быть определены раз и навсегда сравнением какого-либо решения уравнений с экспериментальными данными”.

Приведенные уравнения можно считать прообразом современных $k-\omega$ систем уравнений, только теперь в аналогах уравнения (1.9) присутствуют порождающий член P_ω и другая структура последнего, диффузионного члена в аналогах уравнения (1.8) (см. разд. 3.). Аналог уравнения (1.8) был предложен так же Прандтлем в 1945 г. и приведен в статье [13]. Попытку получить уравнение для кинетической энергии пульсаций сделал и сам Рейнольдс [2, 3], правда, с труднообозримым результатом. А саму статью Колмогорова впервые, по-видимому, заметил Д. Сполдинг, обративший на нее внимание П. Сеффмена [14]. На этот приоритет А.Н. Колмогорова указано и в монографии Д. Уилкокса [15].

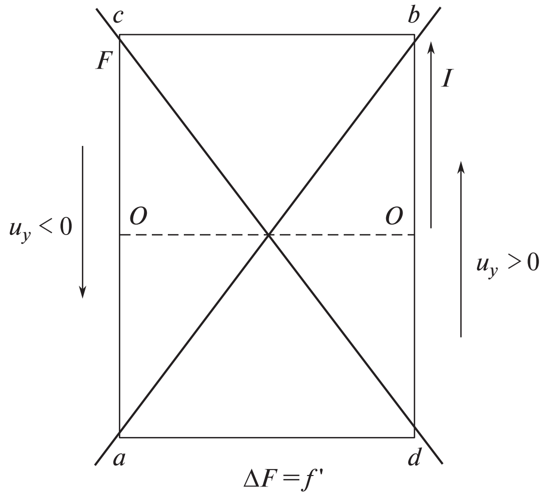
Система (1.8), (1.9) двухпараметрическая, так как содержит два уравнения для параметров k и ω (например, [14, 16, 17]). Известны и модели алгебраические, с конечными формулами для μ_t, или однопараметрические, с одним уравнением типа (1.8) и с некими формулами для масштаба l ([13, 18, 19]), или вообще с одним уравнением непосредственно для μ_t [20], (книги [15, 21]).

Все эти уравнения конструируются, как правило, интуитивно, на основе аналогий с уравнениями Навье–Стокса и анализа размерностей, и относительно их физической достоверности часто проявляется осторожный скептицизм. Так, в статье [14] (где в аналоге уравнения (1.9) используется параметр ω^2 вместо ω и внесен член $P_\omega \sim \omega^2\varepsilon$) подчеркивается, что “величины e (аналог $b = 3k/2$) и ω нельзя рассматривать как имеющие прямой физический смысл, и они являются лишь вспомогательными параметрами, введенными по аналогии с энергией и вихрем для вычисления среднего поля скоростей и напряжений Рейнольдса”. Это утверждение по отношению к уравнению (1.8) справедливо лишь отчасти, так как в современных его аналогах, по крайней мере, порождающий член P_k с точностью до коэффициента, вычисляется через момент общего уравнения импульсов (например, О.И. Хинце [22], Ю.В. Лапин [23]). Но современные варианты уравнения (1.9) до последнего времени конструировались “по аналогиям”, причем термин “вихрь” применительно к параметру ω основан лишь на его размерности.

Ниже, в разд. 4, этот недостаток будет устранен путем вывода уравнения для пульсаций вихря из исходного уравнения импульсов. Одновременно (разд. 2, 3) будет придана физическая обоснованность некоторым “интуитивным” членам и в других уравнениях и введены новые члены (разд. 5), обусловленные пульсациями плотности.

2. ОСРЕДНЕНИЕ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

К основной системе уравнений относятся уравнения импульсов, энергии и неразрывности. При их осреднении образуются члены типа $\langle f_i' f_j'\rangle$, (назовем их “корреляциями”), среди которых будем различать “конвективные” корреляции типа $\langle \mathbf{u} f_i'\rangle$ от “точечных”, не содержащих скорость $\mathbf{u}$. Последними будем пренебрегать, полагая $\langle f_i' f_j'\rangle = 0$, при отсутствии достаточных аргументов



Фиг. 1. К выводу формулы Прандтля (2.1)

статистической зависимости входящих в них сомножителей. То же относится и к "тройным" корреляциям. Заметим также, что из допустимой относительной малости скоростей пульсаций, т.е. при $|u|/|U| \ll 1$, не следует, в общем, малость отношения их производных, так как эти производные, к примеру, $\partial u_i/\partial x_j \sim u_i/l_j$ могут и не быть малыми.

Далее обобщим упомянутую выше гидродинамическую модель, или теорию пути перемешивания Л. Прандтля, суть которой в следующем. Члены типа $\mathbf{u}F_c$ связаны с переносом некого параметра $F_c = F + f'$ со средней F, и пульсационной f', слагаемыми со скоростью $\mathbf{u}$. И пусть требуется определить среднюю величину произведения $\langle u_l(F + f')\rangle = \langle u_l f'\rangle$, где u_l – компонента мгновенной скорости $\mathbf{u}$ в направлении $\mathbf{l}$. Тогда при $\partial F/\partial l > 0$ (линия a–b на фиг. 1) и с нижнего уровня ad на средний уровень OO переносится жидкая частица единичной массы с параметром F, меньшим местного на величину $\Delta F = l\partial F/\partial l$, где l – длина пути перемешивания (отрезки aO и Oc на фиг. 1); при этом на среднем уровне будет $f' = -\Delta F$ и, следовательно, $u_l f' < 0$. А при $u_l = u_{l-} < 0$ получим на среднем уровне уже $f' > 0$, но так же будет $u_l f' < 0$. Наоборот, при $\partial F/\partial l < 0$ имеем $\Delta F = -l\partial F/\partial l$ и аналогично получим $u_l f' > 0$ при обоих $u_{l\pm}$. Так как из определения (1.3) средних и пульсационных величин следует условие $\langle u_{l+}\rangle = \langle u_{l-}\rangle$, то все эти варианты опишем "2-формулой Прандтля" (для отличия от 1-й, (1.6)).

$$\langle u_l f'\rangle = -D_u \frac{\partial}{\partial l} F, \quad \text{или} \quad \langle \mathbf{u}f'\rangle = -D_u \nabla F, \quad D_{ul} = \langle |u_l| l_l\rangle \tag{2.1}$$

Здесь l_l – длина пути перемешивания в направлении $\mathbf{l}$, D_{ul} – турбулентный коэффициент диффузии в этом направлении, который, однако, будем считать этот коэффициент изотропным $D_{ul} = D_u$. И тогда будет справедлива 2-я, векторная формула (2.1). Близкие к (2.1) формулы (при $F = U$) приведены также Дж. Тэйлором ([3], 1932) и Г. Шлихтингом (в книге [5] которого дано дополнительное обоснование этой "модели, или теории Прандтля").

Применим эту модель для вывода формул (1.5) из уравнения импульсов (1.4). В них в произведениях $\langle u_i u_j\rangle$ оба сомножителя равноправны, так что соотношения типа первой формулы (2.1) справедливы для каждого из направлений l_i, l_j, и, выбирая за функцию F обе скорости U_i и U_j одновременно, получим в сумме

$$-\langle \rho u_i u_j\rangle = \rho D_u \left(\frac{\partial U_j}{\partial l_i} + \frac{\partial U_i}{\partial l_j}\right) = 2\rho D_u \varepsilon_{ij}, \quad l_i, l_j = x, y, z \tag{2.2}$$

Помноженная здесь на ρ, формула (2.2) дает 2-й член в формуле (1.5) для τ_{tij}, если положить $\mu_t = \rho D_u$ в ней. Однако в этой формуле отсутствует турбулентное давление p_t как напряжение при изотропных однородных пульсациях в однородном среднем поле. Этот эффект и устранен введением члена p_{t*} в формулу (1.5) для τ_{tij} Заметим, что 1-ю формулу Прандтля (1.6) можно получить из 2-й (2.2), положив в ней $U_y = 0$ и в коэффициенте D_u сделав замену

$$\langle |u_y| \rangle = \langle |u_x| \rangle = l |\partial U_x / \partial y|$$

Перейдем к осреднению уравнения энергии с исходным его вариантом в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}(\rho_c E_c) + L_H = q_{efc}, \quad H_c = \frac{1}{2}U_c^2 + h_c, \quad E_c = \frac{1}{2}U_c^2 + e_c, \\ L_H = \operatorname{div}(\rho_c H_c \mathbf{U}_c) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho_c H_c U_{xc}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_c H_c U_{yc}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_c H_c U_{zc})\end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь H_c, E_c и h_c, e_c – полные и удельные энтальпии и энергии газа, q_{ef} – сумма навье-стоксовских ламинарных членов. Дополним разложения (1.2) следующими:

$$\begin{gathered}U_c^2 = (\mathbf{U}\cdot\mathbf{U}) = U^2 + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{U}) + u^2, \quad (\mathbf{u}\cdot\mathbf{U}) = u_x U_x + u_y U_y + u_z U_z, \quad h_c = h + h' \\ H_c = H + H', \quad H = \frac{1}{2}U^2 + h, \quad H' = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{U}) + \frac{1}{2}u^2 + h', \quad E_c = E + E'\end{gathered} \tag{2.4}$$

С учетом разложений (1.2), (2.4) уравнение (2.3) запишем пока в общем виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}(\rho E_0) + L_0 = P_H + L_h + L_k - L_\rho + q_{ef}, \quad L_0 = \operatorname{div}(\rho H_0 \mathbf{U}) \\ L_\rho = \operatorname{div}\langle \rho' H_c \mathbf{U}_c \rangle, \quad H_0 = \frac{1}{2}U^2 + h + k, \quad E_0 = \frac{1}{2}U^2 + e + k\end{gathered} \tag{2.5}$$

Здесь в полные энтальпию H_0 и энергию E_0 включена удельная кинетическая энергия пульсаций k, члены P_H, L_h, L_k обусловлены конвективным сносом параметров $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{U}), h, u^2$ со скоростью $\mathbf{u}$, а член L_ρ аналогичен члену $\mathbf{L}'_\mathbf{U}$ в уравнении (1.4). Используя формулу (2.4) для произведения $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{U})$, получим

$$P_H = -\operatorname{div}\langle \rho(\mathbf{u}\cdot\mathbf{U})\mathbf{u} \rangle = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j \tau_{\mathrm{t}ij} U_j, \quad (\tau_{\mathrm{t}ij} = -\langle \rho u_i u_j \rangle, i, j = x, y, z) \tag{2.6}$$

Величина P_H – вклад турбулентной диссипации кинетической энергии в общий баланс энергии движущегося газа. При вычислении же других членов L_i используем векторный вариант формулы (2.1). Тогда, положив $F = h$, будем иметь

$$L_h = -\operatorname{div}\langle \rho h' \mathbf{u} \rangle = \operatorname{div}(\rho D_u \nabla h) \tag{2.7}$$

Этот член обусловлен вкладом турбулентной, “пульсационной” теплопроводности в общий баланс энергии, с коэффициентом $\lambda_\mathrm{t} = c_p D_u$, если положить $\nabla h = c_p \nabla T$, где c_p – теплоемкость, а T – температура газа.

При преобразовании члена L_k в (2.5) представим член u^2 в виде суммы, в которой последний член Δu^2 есть добавка к средней величине $\langle u^2 \rangle = 2k$

$$u^2 = 2k + \Delta u^2, \quad \langle u^2 \mathbf{u} \rangle = \langle 2k\mathbf{u} \rangle + \langle \Delta u^2 \mathbf{u} \rangle = \langle \Delta u^2 \mathbf{u} \rangle \tag{2.8}$$

Тогда, положив $F = k$, $f' = \Delta u^2/2$ в (2.1), придем к формуле типа (2.7)

$$L_k = -\operatorname{div}\left\langle \frac{1}{2}\rho u^2 \mathbf{u} \right\rangle = \operatorname{div}(\rho D_u k) \tag{2.9}$$

Этот член обусловлен диффузией кинетической энергии пульсаций. С учетом же полученных результатов уравнение (2.5) в итоге примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E_0) + \operatorname{div}(\rho H_0 \mathbf{U}) = P_H + \operatorname{div}(\rho D_u \nabla h) + \operatorname{div}(\rho D_u \nabla k) - L_\rho + q_{ef} \tag{2.10}$$

Осреднение же ламинарных членов $\operatorname{Div}\mathbf{P}_\mu$ и q_{ef} в уравнениях (1.1) и (2.3) сводится к использованию в них средних параметров течения. Строго это допущение справедливо лишь при постоянных коэффициентах переноса, но оно сохраняется и в более общем случае. В самом деле, использование разложений типа $\mu_c = \mu + \mu'$, $\lambda_c = \lambda + \lambda'$ привело бы к появлению в этих уравнениях новых членов типа $\langle \mu' \partial u_i/\partial x_j \rangle$, $\langle \lambda' \partial h'/\partial x_i \rangle$, пульсационные параметры, в которых можно полагать статистически независимыми и пренебречь этими членами вообще. Иными словами, основными ответственными за возникновение эффектов турбулентности являются только нелинейные невязкие операторы $\mathbf{L}_U$ и L_H. Поэтому далее ламинарные, или молекулярные, члены $\mathbf{P}_l$ и q_{ef} не будем детализировать.

3. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЭНЕРГИИ ПУЛЬСАЦИЙ

Дифференциальные уравнения турбулентности типа (1.8) выводятся, как правило, путем применения методов моментов к невязким операторам уравнений Навье–Стокса (например, [22, 23]). При выводе уравнения для k за исходное примем уравнение импульсов (1.1), только в не дивергентной форме

$$\rho_c \frac{\partial \mathbf{U}_c}{\partial t} + \mathbf{N}_c + \nabla p_c = \mathrm{Div}\mathbf{P}_{\mu c}, \quad \mathbf{N}_c = \rho_c(\mathbf{U}_c \cdot \nabla)\mathbf{U}_c \tag{3.1}$$

Это векторное уравнение умножим скалярно на вектор $\mathbf{u}$ скорости пульсаций и осредним его, добавив к (1.2), (2.4) еще разложение $\mathbf{P}_{\mu c} = \mathbf{P}_\mu + \mathbf{P}'_\mu$. Результат осреднения этого уравнения запишем в общем виде

$$\begin{gathered} N_0 = \Pi_k + N_2 + N_3 + N_\rho + \langle(\mathbf{u}\cdot \mathrm{Div}\mathbf{P}'_\mu)\rangle, \quad N_0 = \left\langle \left(\rho \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)\right\rangle + \\ + \rho\langle(\mathbf{u}\cdot(\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{u})\rangle = \rho\frac{\partial k}{\partial t} + \rho\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(U_i k) = \rho\frac{dk}{dt}, \quad \left(k = \frac{1}{2}\langle u^2\rangle\right) \end{gathered} \tag{3.2}$$

Остальные члены в (3.2) получим, используя формулы (1.2), (2.4), в частности

$$\Pi_k = -\langle(\rho\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{U})\rangle = -\sum_i \left\langle \rho u_i \left(\mathbf{u}\cdot\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i}\right)\right\rangle \tag{3.3}$$

Раскрывая здесь произведения $(\mathbf{u}\cdot \partial\mathbf{U}/\partial x_i)$ и т.д., с учетом (1.5) получим

$$\begin{gathered} \Pi_k = -\rho\sum_i\sum_j \langle u_i u_j\rangle \varepsilon_{ij} = \sum_i\sum_j \tau_{ij}\varepsilon_{ij} = P_k + P_{k1}, \quad P_{k1} = -p_t^*\mathrm{div}\mathbf{U} \\ P_k = 2\mu_t(\varepsilon_{xx}^2+\varepsilon_{yy}^2+\varepsilon_{zz}^2)+4\mu_t(\varepsilon_{xy}^2+\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2) \end{gathered} \tag{3.4}$$

Член $P_k \geq 0$ является порождающим, т.е. обеспечивающим перевод кинетической энергии осредненного течения в энергию пульсаций. Но член P_{k1} в общем случае знакопеременный и равен нулю для несжимаемой жидкости.

Другие члены, N_2 (полученный с учетом (2.8)) и N_3, соответственно определены

$$\begin{gathered} N_2 = -\langle(\rho\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u})\rangle = -\frac{1}{2}\sum_i\left\langle \rho u_i\frac{\partial u^2}{\partial x_i}\right\rangle = N_{21} + N_{22}, \\ N_{22} = -\frac{1}{2}\rho\langle \Delta u^2 \mathrm{div}\mathbf{u}\rangle, \quad N_{21} = -\frac{1}{2}\sum_i \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\rho u_i u^2\right\rangle \quad N_3 = -\langle(\mathbf{u}\cdot\nabla p')\rangle \end{gathered} \tag{3.5}$$

Член N_{21} в формуле (3.5) совпадает с членом L_k в (2.9) и равен $\mathrm{div}(\rho D_u \nabla k)$. Член N_{22} опустим как корреляцию двух знакопеременных величин. Так же положим и $N_3 = 0$, так как производные $\partial p'/\partial x$ и т.д. имеют порядок p'/l, не связанный со средним давления, потому преобразования (2.1) здесь не применимы.

Суммируя эти результаты, получим уравнение для k

$$\begin{gathered} \rho\frac{dk}{dt} = P_k - p_t^*\,\mathrm{div}\,\mathbf{U} + \mathrm{div}(\rho D_u\nabla k) + N_\rho - \sigma_\mathrm{k}, \quad p_t^* = p_t + \frac{2}{3}\mu_\mathrm{t}\,\mathrm{div}\,\mathbf{U} \\ \sigma_\mathrm{k} = -\langle(\mathbf{u}\cdot\mathrm{Div}\,\mathbf{P}'_\mu)\rangle = C_k\rho k\omega, \quad C_k = (\mu/\mu_\mathrm{t})C_{k0}, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2} \end{gathered} \tag{3.6}$$

Член σ_k обусловлен вязкой диссипацией кинетической энергии пульсаций и следует предположить, что $\sigma_k > 0$. Это следует и из развитой в 30–40 годы теории изотропной однородной турбулентности (книги [5, 6]), скорость затухания которой зависит только от кинематической вязкости жидкости и падает с уменьшением последней. Однако, пока в (3.6) член σ_k задан лишь из соображений его размерности, с коэффициентом C_k, зависящим от "локально-пульсационных" чисел Рейнольдса $\mathrm{Re}_{tl} \sim \rho\langle|ul|\rangle/\mu \sim \mu_t/\mu$, причем последняя формула для C_k является его упрощенным вариантом (с возможно постоянным C_{0k}), так как член $\mathrm{Div}\mathbf{P}'_\mu$ в целом пропорционален μ. Часто вместо уравнения (2.5) используется разность его с уравнением (3.6), новое уравнение не содержит уже энергию k, но в нем появляются члены P_k и σ_k. А при объединении турбулентных и вязко-ламинарных членов появляется суммарная вязкость $\mu_\sigma = \mu + \mu_t$, которая вопреки мнениям, является просто следствием вывода, а не дополнением к модели.

4. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВИХРЯ

За основу возьмем уравнение импульсов (1.1) в форме Громеко–Лэмба и, применив к нему операцию ротора, получим уравнение для вихря [6]

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}_c}{\partial t} + (\mathbf{U}_c\cdot\nabla)\mathbf{\Omega}_c - (\mathbf{\Omega}_c\cdot\nabla)\mathbf{U}_c + \mathbf{\Omega}_c \mathrm{div}\mathbf{U}_c = \mathrm{rot}\mathbf{Q}_{\omega c}, \quad \mathbf{Q}_{\omega c} = \left(T\nabla S + \frac{1}{\rho}\mathrm{Div}\mathbf{P}_\mu\right)_c \tag{4.1}$$

где S – энтропия, $\mathbf{\Omega} = \mathrm{rot}\mathbf{U}$. Умножим далее уравнение (4.1) на вектор пульсаций вихря $\boldsymbol{\omega}$ и осредним результат, дополнив разложения (1.2), (2.4) следующими:

$$\mathbf{\Omega}_c = \mathbf{\Omega} + \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{\Omega} = \mathbf{i}\Omega_x + \mathbf{j}\Omega_y + \boldsymbol{\varkappa}\Omega_z, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{i}\omega_x + \mathbf{j}\omega_y + \boldsymbol{\varkappa}\omega_z \tag{4.2}$$

Первый член нового уравнения (4.1) будет равен $\partial\omega_0^2/\partial t$, а второй член преобразуем в сумму

$$\begin{gathered}\langle(\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{U}_c\cdot\nabla)\mathbf{\Omega}_c)\rangle = \langle(\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{U}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega})\rangle + \langle(\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{\Omega})\rangle + \langle(\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega})\rangle = \\ = \frac{1}{2}(\mathbf{U}\cdot\nabla)\langle\omega^2\rangle - P_\omega + G_2, \quad P_\omega = -\langle(\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{\Omega})\rangle.\end{gathered} \tag{4.3}$$

Здесь только член P_ω содержит производные от $\mathbf{\Omega}$ и, развернув его в сумму с учетом (1.2), (2.4), (4.2), после его осреднения получим формулу

$$P_\omega = -\left\langle\sum_i \omega_i \sum_j u_j \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_j}\right\rangle \tag{4.4}$$

В этой формуле коэффициенты при производных от средних вихрей будут иметь общий вид $\langle u_i\omega_j\rangle$. И положив в формулах (2.1) $F = \Omega_i, f' = \omega_i$, получим

$$\langle u_i\omega_j\rangle = -D_u\frac{\partial\Omega_j}{\partial x_i}, \quad D_u = \langle|u_i l_i|\rangle, \quad P_\omega = D_u\sum_i\sum_j\left(\frac{\partial\Omega_i}{\partial x_j}\right)^2 > 0 \tag{4.5}$$

Полученная формула для члена P_ω, порождающего турбулентные вихри члена P_ω, отличается от комбинаций из производных от средних скоростей, часто конструируемых в предшествующих работах на основе теории размерностей.

Следующий член в сумме (4.3) преобразуется к виду

$$\begin{gathered}G_2 = \langle(\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega})\rangle = \frac{1}{2}\left\langle(\mathbf{u}\cdot\nabla)\omega^2\right\rangle = G_{21} + G_{22}, \quad G_{22} = -\frac{1}{2}\left\langle\Delta\omega^2\mathrm{div}\mathbf{u}\right\rangle \\ G_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\left\langle u_x\Delta\omega^2\right\rangle}{\partial x} + \frac{\partial\left\langle u_y\Delta\omega^2\right\rangle}{\partial y} + \frac{\partial\left\langle u_z\Delta\omega^2\right\rangle}{\partial z}\right) = -\frac{1}{2}\mathrm{div}\left(D_u\nabla\omega_0^2\right), \quad \omega_0^2 = \langle\omega^2\rangle\end{gathered} \tag{4.6}$$

Члены G_{21}, G_{22} получены по аналогии с (2.8), с заменой $\omega^2 = \omega_0^2 + \Delta\omega^2$ и с формулой (2.1), по аналогии с (2.9). Член G_{21} определяет вклад диффузии вихря в его изменение, а членом G_{22} пренебрежем как корреляцией независимых величин. В результате искомому уравнению придадим промежуточный вид

$$\frac{1}{2}\frac{d\omega_0^2}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\partial\omega_0^2}{\partial t} + \frac{1}{2}(\mathbf{U}\cdot\nabla)\,\omega_0^2 = P_\omega + \frac{1}{2}\mathrm{div}(D_u\nabla\omega_0^2) + \Phi$$
$$\Phi = \langle(\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\Omega}_c\cdot\nabla)\,\mathbf{U}_c)\rangle - \langle(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\Omega}_c)\,\mathrm{div}\mathbf{U}_c\rangle + \frac{1}{2}\langle\mathrm{div}(\Delta\omega^2\mathbf{u})\rangle + \langle(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{Q}_\omega)\rangle \tag{4.7}$$

Здесь правая часть Φ при усреднении преобразуется в сумму отдельных членов

$$\Phi = G_3 + G_4 + G_5 + G_6 + \langle(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{Q}_\omega)\rangle, \quad G_3 = \langle(\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\,\mathbf{U})\rangle$$
$$G_4 = \langle(\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\,\mathbf{u})\rangle, \quad G_5 = \langle(\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\,\mathbf{u})\rangle \tag{4.8}$$
$$-G_6 = \langle(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\Omega})_c\,\mathrm{div}\mathbf{U}_c\rangle = \langle\omega^2\rangle\mathrm{div}\mathbf{U} + \langle(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\Omega})\,\mathrm{div}\mathbf{u}\rangle + \langle\Delta\omega^2\mathrm{div}\mathbf{u}\rangle$$

В отличие от членов типа $\langle u_i f\rangle$ в коэффициентах P_k, G_2, которые “сворачиваются” в выражения типа (2.7), (2.9), в коэффициентах от G_3 до G_6 в сумме Φ подобные члены отсутствуют. Поэтому все корреляции здесь – “точечные”, и подлежащие учету члены типа $\langle\omega_i^2\rangle > 0$ присутствуют лишь в формулах для G_3 и G_6. Остальные же слагаемые содержат лишь корреляции типа $\langle\omega_i\omega_j\rangle, (i \neq j)$, $\langle\omega_i\partial u_i/\partial x_j\rangle$, с большой вероятностью равные нулю. То же относится и к тройным корреляциям пульсационных величин. Тогда $\Phi = G_3 + G_6$ и при $\omega_i^2 = \omega_0^2/3 + \Delta\omega_i^2$ получим формулы

$$G_3 = \langle\omega_x^2\rangle\frac{\partial U_x}{\partial x} + \langle\omega_y^2\rangle\frac{\partial U_y}{\partial y} + \langle\omega_z^2\rangle\frac{\partial U_z}{\partial z} = \frac{1}{3}\omega_0^2\mathrm{div}\mathbf{U}, \quad G_6 = -\omega_0^2\mathrm{div}\mathbf{U} \tag{4.9}$$

Суммируя далее полученные формулы в уравнении (4.7), получим в итоге

$$\frac{d\omega_0^2}{dt} = R = P_\omega + \mathrm{div}(D_u\nabla\frac{\omega^2}{2}) - \frac{2}{3}\omega^2\,\mathrm{div}\,\mathbf{U} - \sigma_\omega, \quad \omega = \omega_0 = \sqrt{\omega_0^2}$$
$$-\sigma_\omega = \langle(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{Q}_\omega)\rangle = \langle(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{rot}\,(T\nabla S)')\rangle + \langle(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{rot}\mathrm{Div}\,\mathbf{P}_\mu)\rangle \tag{4.10}$$

В формуле для σ_ω первый член справа – корреляция двух независимых сомножителей, и этим членом пренебрежем. Второй же член обусловлен молекулярной вязкостью, которая и приводит к затуханию пульсаций. Поэтому, по аналогии с членом σ_k в уравнении (3.8), постулируем зависимость

$$\sigma_\omega = C_\omega\omega_0^3 > 0, \quad C_\omega = C_\omega(\mu/\mu_t) = \frac{\mu}{\mu_t}C_{\omega 0}, \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_0^2} \tag{4.11}$$

И, наконец, о граничных условиях для $\boldsymbol{\omega}$. Направим ось y декартовой системы координат по нормали к поверхности (с $y = 0$ на ней), а оси x, z в ее касательной плоскости. Тогда с учетом условия прилипания $\mathbf{u} = 0$ на стенке вектор $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\mathbf{u}$ вблизи нее будет иметь следующие составляющие и оценки их осредненных квадратов

$$\omega_x = \frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = -\frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad \omega_0^2 = \langle\omega_x^2\rangle + \langle\omega_z^2\rangle \sim \frac{k}{l^2} \sim \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial n}\right)^2 \tag{4.12}$$

Здесь использовано, что длина l вблизи стенки имеет характерным размером только расстояние n до нее. Последнее соотношение и предопределяет для вихря ω_0 граничное условие на твердой гладкой стенке.

5. УЧЕТ ПУЛЬСАЦИЙ ПЛОТНОСТИ

В приведенных выше уравнениях члены с пульсациями плотности оставлены не расшифрованными, что и восполним ниже. Начнем с уравнения неразрывности. Полагая в нем полную плотность $\rho_c = \rho + \rho'$, получим после его осреднения

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\mathrm{div}\langle\rho_c\mathbf{U}_c\rangle = -\mathrm{div}\rho\mathbf{U} - \mathrm{div}\langle\rho'\mathbf{u}\rangle \tag{5.1}$$

Использование затем формулы Прандтля (2.1) приводит это уравнение к виду

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\mathbf{U} = \operatorname{div}\left(D_u \nabla\rho\right) \tag{5.2}$$

Член справа здесь обусловлен переносом массы за счет пульсаций. В уравнении импульсов (1.4) преобразуем член $\mathbf{L}'_\mathrm{U}$ в сумму

$$\mathbf{L}'_\mathrm{U} = \operatorname{div}\left\langle(\rho'\mathbf{U}_c\mathbf{U}_c)\right\rangle = \mathbf{L}'_\mathrm{U1} + \mathbf{L}'_\mathrm{U2} + \mathbf{L}'_\mathrm{U3} \tag{5.3}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{L}'_\mathrm{U1} = \operatorname{div}\left\langle(\rho'\mathbf{u}\mathbf{U})\right\rangle = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\left\langle\rho' u_i\right\rangle\mathbf{U}), \quad i = x, y, z \\ \mathbf{L}'_\mathrm{U2} = \operatorname{div}\left\langle(\rho'\mathbf{U}\mathbf{u})\right\rangle = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\left\langle\rho'\mathbf{u}\right\rangle)U_i, \quad \mathbf{L}_\mathrm{U3} = \operatorname{div}\left\langle(\rho'\mathbf{u}\mathbf{u})\right\rangle\end{gathered} \tag{5.4}$$

Используя далее формулу Прандтля (2.1), получим явные выражения

$$\left\langle\rho' u_i\right\rangle = -D_u\frac{\partial\rho}{\partial x_i}, \quad \left\langle\rho'\mathbf{u}\right\rangle = -D_u\nabla\rho, \quad L'_U = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}D_u\left(\mathbf{U}\frac{\partial\rho}{\partial x_i} + U_i\nabla\rho\right) \tag{5.5}$$

Членом же $\mathbf{L}'_\mathrm{U3}$ пренебрежем как тройной корреляцией независимых величин. Для члена L_ρ в уравнении (2.5) с учетом (2.4) получим формулы

$$\begin{gathered}L_\rho = \operatorname{div}\mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = \left\langle\rho' H_c\mathbf{U}_c\right\rangle = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2, \quad \mathbf{S}_1 = \left\langle\mathbf{u}\rho'\right\rangle H, \quad \mathbf{S}_2 = \left\langle H'\rho'\right\rangle\mathbf{U} \\ S_1 = -D_u H\nabla\rho, \quad S_2 = S_2 U, \quad S_2 = S_3 + \frac{1}{2}\langle\rho' u^2\rangle + \left\langle\rho' h'\right\rangle \\ S_3 = \left\langle\rho'(\mathbf{u}\cdot\mathbf{U})\right\rangle = \sum_i\left\langle\rho' u_i\right\rangle U_i = -\sum_i D_u U_i\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\end{gathered} \tag{5.6}$$

В последних членах в формуле для S_2 положим корреляции $\langle\rho' u^2\rangle = \langle\rho'\Delta u^2\rangle \approx 0$, (с учетом (2.8)) и (см. ниже) $\left\langle\rho' h'\right\rangle \approx 0$. Тогда $\mathbf{S}_2 = S_3\mathbf{U}$, и член L_ρ в уравнении (2.5) будет равен

$$L_\rho = \operatorname{div}\mathbf{S}_1 + \operatorname{div}S_3\mathbf{U} \tag{5.7}$$

И, наконец, последний член N_ρ в уравнении (3.2) можно, пренебрегая тройными корреляциями и используя формулы (2.1), привести к виду

$$N_\rho = \left\langle(\mathbf{u}\rho'\cdot(\mathbf{U}_c\cdot\nabla)\mathbf{U})_c\right\rangle = (\left\langle\mathbf{u}\rho'\right\rangle\cdot(\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{U}) = -D_u\left(\nabla\rho\cdot(\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{U}\right) \tag{5.8}$$

Суммируя все эти результаты и сложив уравнение (3.2) с уравнением неразрывности (5.1), умноженным на k, получим уравнение

$$\begin{gathered}\frac{d\rho k}{dt} = P_k - p_t^*\operatorname{div}\mathbf{U} + \operatorname{div}\left(\rho D_u\nabla k\right) + k\operatorname{div}\left(D_u\nabla\rho\right) + D_u\left(\nabla\rho(\nabla\cdot\mathbf{U})\mathbf{U}\right) - \sigma_\mathrm{k} \\ p_t^* = p_t + \frac{2}{3}\mu_\mathrm{t}\operatorname{div}\mathbf{U}, \quad \sigma_k = -\langle(\mathbf{u}\cdot\operatorname{Div}\mathbf{P}'_\mu)\rangle = C_k\rho k\omega, \quad C_k = C_k(\mu/\mu_t), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2}\end{gathered} \tag{5.9}$$

Тем же путем из уравнения (4.10) получим аналогичное уравнение для ω

$$\frac{d\rho\omega^2}{dt} = \frac{\partial\rho\omega^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U_x\omega^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho U_y\omega^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho U_z\omega^2) = \rho R \tag{5.10}$$

6. ДОПОЛНЕНИЕ

Выше, при осреднении нестационарных членов уравнений, плотность в них сразу полагалась средней, т.е. были опущены члены типа $\partial\left\langle\rho' f'\right\rangle/\partial t$, что законно при $f' \neq \mathbf{u}$ в рамках принятых выше допущений. Корреляцию же $\left\langle\rho'\mathbf{u}\right\rangle$ в принципе можно определить по формулам (5.5), однако, такое усложнение уравнений вряд ли оправдано. Во-первых, в нестационарном члене уравнения (1.4), (которого это касается прежде всего) эта корреляция относительно мала: $\left\langle\rho'\mathbf{u}\right\rangle \ll \rho|U|$, и ею (именно в этом члене) можно пренебречь. А во-вторых, при решении стационарных, в основном, задач методом установления нестационарный член вообще исчезает при сходимости процесса. В крайнем же общем случае принятое “усечение” нестационарных членов просто отнесем к вынужденным ограничением предлагаемой модели.

Рассмотрим еще вопрос об осреднении уравнении состояния, которое для равновесного газа зададим в общем виде $\rho_c = \rho_0(p_c, h_c)$, где ρ_0 – просто символ функции. Полагая пульсационные величины малыми относительно средних и разлагая функцию ρ_0 в ряд, опустив квадратичные члены, получим после осреднения уравнение состояния в виде $\rho = \rho_0(p, h)$, содержащим только средние параметры. Для примера проведем осреднение уравнения состояния совершенного газа, допустив, что как истинные, мгновенные, так и средние давления, плотность и температура (энтальпия), удовлетворяют уравнению Клайперона

$$\langle p + p'\rangle = p = \frac{R}{M}\langle \rho_c T_c\rangle = \frac{R\rho T}{M} + \frac{R}{M}\langle \rho' T'\rangle = \frac{R\rho T}{M}, \quad \langle \rho' T'\rangle \sim \langle \rho' h'\rangle \approx 0 \tag{6.1}$$

Напомним еще раз, что полученные выше уравнения не замкнуты, так как содержат неопределенные пока коэффициенты. Это коэффициент диффузии D_u, турбулентная вязкость μ_t, два коэффициента диссипации энергии пульсаций: σ_k и σ_ω (в уравнениях (3.8) и (4.10)) и условие граничное для вихря. Пользуясь теорией размерности, воспроизведем полный их набор

$$D_u = C_u \frac{k}{\omega}, \quad \mu_t = \rho D_u, \quad \sigma_k = C_k \rho \omega k, \quad \sigma_\omega = C_\omega \rho \omega^3, \quad \omega = C_W \frac{\partial k^{1/2}}{\partial n} \tag{6.2}$$

Эмпирические коэффициенты C_i могут быть постоянными или зависеть от различных критериев подобия задачи и подлежат определению лишь путем сопоставления теории с экспериментом, что пока выходит за рамки данной статьи.

Полученная выше модель состоит в последовательном применении осреднения по Рейнольдсу (“R-осреднения”, далее) в сочетании с моделью Прандтля. Поэтому в целом будет справедливым назвать ее моделью “Рейнольдса–Прандтля”.

Полученные в разд. 5 члены с пульсациями плотности отсутствуют в известных ранее публикациях, которые содержат явно только среднюю плотность без явного учета ее пульсаций. В оправдание ссылаются на метод осреднения уравнений по “методу Фавре”, ([24] 1965, см., например, книги [15, 23]), суть которого состоит в замене средней скорости $\mathbf{U}$ на “средне-массовую” $\mathbf{U}_F = \langle \rho_c \mathbf{U}_c\rangle / \rho$. Аналогично определяются и другие “F-осредненные” параметры (h_F и т.д., помечены индексом “F”), отличные от обычных (U, h и т.д.), принятых в классической гидродинамике.

Такая замена искомых величин потребовала постулирования альтернативной гидродинамической модели турбулентности (наиболее полно сформулированной Уилкоксом [25)], в которой все используемые уравнения и физические законы чисто формально записываются через F-осредненные параметры вместо классических. При этом скорость $\mathbf{u}_F$, определяемая из соотношений

$$\begin{gathered} \mathbf{U}_c = \mathbf{U}_F + \mathbf{u}_F = \mathbf{U} + \mathbf{u}, \quad (\langle \mathbf{u}\rangle = 0) \\ \langle \mathbf{u}_F\rangle = \mathbf{u}_{F0} = \mathbf{U} - \mathbf{U}_F \neq 0, \quad \mathbf{u}_F = \mathbf{u}_{F0} + \mathbf{u} \end{gathered} \tag{6.3}$$

как и $\mathbf{u}$, названная пульсационной, не является таковой в смысле условий (1.3), поскольку среднее значение ее $\mathbf{u}_{F0}$ отлично от нуля. Вместо этого ставится условие $\langle \rho_c \mathbf{u}_F\rangle = 0$, из которого (с учетом (6.3) и (5.5)) следует $\rho \mathbf{u}_{F0} = -\langle \rho' \mathbf{u}\rangle = D_u \nabla \rho \neq 0$.

В такой постановке постулируемое F – напряжение будет представлено как

$$\tau_{tijF} = -\langle \rho u_{iF} u_{jF}\rangle = -\rho u_{iF0} u_{jF0} + \tau_{tij}, \quad \tau_{tij} = -\langle \rho u_i u_j\rangle \tag{6.4}$$

Как видно, при заданном поле турбулентных пульсаций в общем случае напряжение τ_{tijF} не равно классическому, по Рейнольдсу τ_{tij} (принятому и в данной статье). А поскольку в обоих случаях используется один и тот же закон сопротивления (1.5), то возникает не проясненный вопрос о физическом смысле матрицы $\boldsymbol{\varepsilon}$ в F-скоростях. Не ясен также вопрос о новой записи уравнения (4.10) для вихря, в которое плотность изначально не входит вообще.

Тем не менее в практическом плане F-модель получила широкое распространение, поскольку уравнения Навье–Стокса при их F-осреднении приобретают тот же упрощенный внешний вид, что и R-осредненные, если в последних сразу положить $\rho' = 0$, $\rho_c = \rho$, т.е. как бы вообще пренебречь физическим влиянием пульсаций плотности, о наличии или отсутствии которых F-равнения “просто не знают”. А так как в большинстве работ просто используются подходящие варианты турбулентных уравнений Навье–Стокса, выписанные, в след А.Н. Колмогорову, на интуитивно-аналоговой основе, то в их ряд вполне укладываются и модели с априорно средней плотностью, эквивалентные, вообще говоря, F-осредненным. К тому же коэффициенты, подобные (6.2), подбираются сравнением с экспериментом именно для используемых уравнений, так что многие из них можно, видимо, “подогнать” под эксперимент соответствующим подбором коэффициентов. Однако это не будет гарантией физической достоверности этих моделей без достаточной физической их обоснованности и универсальности выбранных для них коэффициентов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Путем обобщения модели пути перемешивания Л. Прандтля в рамках классического осреднения по Рейнольдсу получена новая форма уравнений Навье–Стокса, содержащих явные члены, обусловленные пульсациями плотности. В рамках дифференциальной $k-\omega$-модели получено новое уравнение для пульсаций вихря как момента аналогичного точного уравнения газовой динамики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Reynolds O.* On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion // Royal Society, 1883.
2. *Reynolds O.* Philosophical Transaction of the Royal Philosophical // Transaction of the Society, 1895.
3. Проблемы турбулентности. М.: Онти. НКТП СССР, 1936.
4. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит. Ч. 2. 1948, 1963.
5. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1956.
6. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкостей и газов. М.: Физматлит, 1951.
7. *Лунев В.В.* Течение газов с большой скоростью. М.: Физматлит, 2007.
8. *Stokes G.G.* On the Theories of the Internal Friction of Fluid in Motion, Trans. Of the Cambridge Phil. Society. 1845.
9. *Boussinesq T.V.* Theorie de l’ecoulement tourbillonnan.Paris. Année d'édition, 1897.
10. *Prandtl L.* Untersuchungen zur ausgebildete Turbulenz // Zeitschrift fur Angew. Math. u. Mech.1925. № 5.
11. *Прандтль Л.* Гидроаэромеханика М.: Физматлит, 1982.
12. *Колмогоров А.Н.* Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // ДАН СССР. 1942. Т. 6.
13. *Kovasznaey S.G.* The turbulent boundary layer // Annu. Fluid. Mech. 1970. P. 95–112.
14. *Saffman P.G.* A model for inhomogeneous turbulent flow // Proc. Roy. Soc. Lond. 1970. A. 317. P. 417–433.
15. *Wilcox D.C.* Turbulence modeling for CFD. Second ed. DCW Industries, Inc. 998. 460 p.
16. *Menter F.R.* Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Application // AIAA J. 1994. V. 32. № 8. P. 1598–1605.
17. *Secundov A.N., Strelets V.Kh., Train A.K.* Two-Equation vt-L Turbultnce Model Account for Elliptic Mechanism of Turbulent Transport // ASME J. Fluid Engineering. 2000. V. 123. P. 11–15.
18. *Глушко Г.С.* Турбулентный пограничный слой на плоской пластине в несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 4. С. 13–23.
19. *Гуляев А.Н., Козлов В.Е., Секундов А.Н.* К созданию универсальной однопараметрической модели турбулентной вязкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1993. № 4. С. 69.
20. *Spalart P.R., Allmaras S.R.* A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows // AIAA Paper. 1992. C. 439.
21. *Гарборук А.В., Стрелец М.Х., Шур М.Л.* Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений. Уч. пособ. С.-Петербург.: Изд. Политех. ун-та, 2012 г.
22. *Хинце О.И.* Турбулентность, ее механизм и теория. М.: Физмалит, 1963.
23. *Лапин Ю.В.* Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. М.: 1982.
24. *Favre A.* Equations des Gaz Turbulents // J. Mecanique. 1965. № 3. P. 361–390.
25. *Wilcox D.C.* Formulation of the k-ω Turbulence Model Revisined // AIAA J. 2008. V. 46. № 11. P. 2823–2838.