УДК 532.529:534.2

АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА, ПОКРЫТЫМИ ВЯЗКОУПРУГОЙ ОБОЛОЧКОЙ

© 2019 г. Д. А. Губайдуллин[a],*, Ю. В. Федоров[a],**

[a]*ФИЦ Казанский научный центр РАН, Институт механики и машиностроения, Казань, Россия*

** e-mail: gubaidullin@imm.knc.ru*

*** e-mail: kopperfildd@ya.ru*

Поступила в редакцию 17.04.2018 г.
После доработки 27.06.2018 г.
Принята к публикации 27.06.2018 г.

Исследовано распространение акустических волн в смеси жидкости с пузырьками газа, покрытыми вязкоупругой оболочкой. Приведена система дифференциальных уравнений возмущенного движения смеси, найдено дисперсионное соотношение. Получены низкочастотные асимптотики фазовой скорости и коэффициента затухания. Установлена и проиллюстрирована зависимость равновесной скорости звука от частоты возмущений и размера покрытых пузырьков. Дано сравнение теории с известными экспериментальными данными.

Ключевые слова: акустическая волна, пузырьковая жидкость, вязкоупругая оболочка, модуль сдвига, коэффициент затухания, равновесная скорость звука

DOI: 10.1134/S0568528119010079

Исследование акустических свойств сложных пузырьковых сред актуально. Различные проблемы акустики смеси жидкости с пузырьками газа или пара рассмотрены в монографиях [1–4]. В работах [5–7] представлены результаты экспериментов по изучению частотных зависимостей фазовой скорости и коэффициента затухания в жидкости с пузырьками газа. Теоретические результаты опубликованы, к примеру, в работах [8–10]. С большим количеством публикаций можно ознакомиться в обзорах [11, 12].

Покрытые оболочкой пузырьки встречаются во многих областях. Большое применение они нашли в биомедицине, где используются в качестве контрастных веществ для ультразвуковой диагностики [13, 14]. В [15] приведено описание наноробота, способного перемещаться в жидкой среде новым способом. На поверхности устройства прикрепляются пузырьки газа, заключенные в специальные капсулы. Под воздействием ультразвуковых колебаний пузырьки начинают поочередно расширяться и сжиматься, оказывая давление на стенку, к которой они прикреплены. Частота колебаний зависит от размеров пузырьков, и чем ближе она к их резонансной частоте, тем эффективнее происходит движение наноробота.

Существующие теоретические модели основаны на различных формах записи уравнений колебаний сферических пузырьков с учетом упругости и вязкости поверхностного слоя. В [16] получено модифицированное уравнение Релея–Плессета, учитывающее радиальные колебания газового пузырька с вязкоупругой оболочкой конечной толщины в жидкости на основе реологического уравнения Кельвина–Фойгта. Проанализировано влияние параметров оболочки. Впоследствии модель [16] была упрощена на случай, когда толщина вязкоупругой оболочки пузырьков близка к нулю [17]. Найдено теоретически и экспериментально влияние полимерной оболочки микропузырьков на затухание импульсного возмущения. В [18] изучено поведение газовых пузырьков, имеющих упругую оболочку, под действием ультразвука в упругой среде. В линейном приближении получены выражения для амплитуды рассеяния и резонансной частоты колебаний включений. Радиальные колебания газового пузырька в сжимаемой вязкоупругой жидкости исследованы в [19]. Показано, что при радиальных пульсациях упругие и вязкие свойства оболочки пузырьков преобладают над вязкоупругими свойствами жидкости.

В настоящей работе представлена математическая модель, определяющая распространение акустической волны в жидкости с покрытыми оболочкой пузырьками газа.

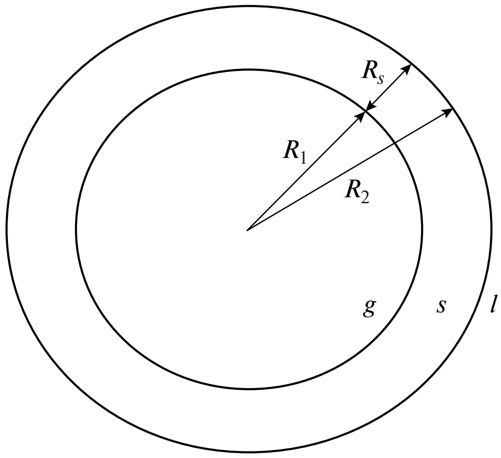

Рис. 1. Схема пузырька с оболочкой: g – газ, s – оболочка, l – жидкость

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим газовую полость, покрытую тонкой сферической вязкоупругой оболочкой внутри массива неподвижной, несжимаемой жидкости (рис. 1). Ввиду непроницаемости оболочки скорость изменения ее радиуса $\dot{R}_1 = dR_1/dt$ совпадает с радиальной скоростью движения на поверхности $u(R_1, t)$.

Уравнение неразрывности в сферической системе координат при наличии центральной симметрии имеет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 u) = 0$$

решение которого записывается следующим образом

$$u(r,t) = \frac{R_1^2(t)}{r^2}\dot{R}_1(t) \tag{1.1}$$

Уравнение сохранения импульса в сферических координатах берется в виде

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{rr}) - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\varphi\varphi}}{r} \tag{1.2}$$

где ρ – плотность, p – давление, τ – компоненты тензора напряжений.

Проинтегрируем уравнение (1.2) от r до ∞ с учетом (1.1) и соотношения для компонентов тензора сферы $\tau_{rr} = -(\tau_{\theta\theta} + \tau_{\varphi\varphi})$ [20]. Интервал от r до ∞ разбивается на два подинтервала: от R_1 до R_2 и от R_2 до ∞. Первый от R_1 до R_2 будет соответствовать параметрам вязкоупругого слоя, второй от R_2 до ∞ – параметрам жидкости. После интегрирования и необходимых математических действий получим

$$\begin{gathered}\rho_s R_1 \ddot{R}_1\left(1 + \frac{\rho_l - \rho_s}{\rho_s}\frac{R_1}{R_2}\right) + \rho_s \dot{R}_1^2\left(\frac{3}{2} + \frac{\rho_l - \rho_s}{\rho_s}\frac{4R_2^3 - R_1^3}{2R_2^3}\frac{R_1}{R_2}\right) = -p_s(R_2,t) + p_s(R_1,t) + \\ + p_l(R_2,t) - p_\infty + \tau_{s,rr}(R_2,t) - \tau_{s,rr}(R_1,t) - \tau_{l,rr}(R_2,t) + 3\int_{R_1}^{R_2}\frac{\tau_{s,rr}}{r}dr + 3\int_{R_2}^{\infty}\frac{\tau_{l,rr}}{r}dr\end{gathered} \tag{1.3}$$

Запишем граничные условия между движущимися средами при учете сил поверхностного натяжения [20]

$$p_s(R_1,t) - p_g(R_1,t) + \frac{2\sigma_1}{R_1} = \tau_{s,rr}(R_1,t) - \tau_{g,rr}(R_1,t) \tag{1.4}$$

$$p_l(R_2,t) - p_s(R_2,t) + \frac{2\sigma_2}{R_2} = \tau_{l,rr}(R_2,t) - \tau_{s,rr}(R_2,t) \tag{1.5}$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения. Если касательные напряжения отсутствуют $\tau = 0$, то имеет место простое уравнение Лапласа [20, 21]. Компоненты тензора напряжений для жидкости и газа задаются следующим образом

$$\tau_{l,rr} = 2\mu_l \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \tau_{g,rr} = 2\mu_g \frac{\partial u}{\partial r} \tag{1.6}$$

Здесь μ – динамическая вязкость. Отметим, что величина $\tau_{g,rr}$ по порядку меньше чем $\tau_{l,rr}$, поскольку вязкость газа меньше вязкости жидкости, поэтому в дальнейшем данной величиной можно пренебречь.

Тензор напряжений для вязкоупругой оболочки зададим следующим соотношением [16]:

$$\tau_{s,rr} = -4(R_1^2/r^3)[G_s(R_1 - R_{e1}) + \mu_s \dot{R}_1] \tag{1.7}$$

$$R_{e1} = R_{10}(1+Z), \quad Z = \frac{1}{4G_s}\frac{R_{20}^3}{V_s}\left(\frac{2\sigma_1}{R_{10}} + \frac{2\sigma_2}{R_{20}}\right), \quad V_s = R_{20}^3 - R_{10}^3$$

С учетом (1.4)–(1.7) после алгебраических преобразований уравнение (1.3) окончательно примет вид

$$\begin{gathered}\rho_s R_1 \ddot{R}_1\left(1 + \frac{\rho_l - \rho_s}{\rho_s}\frac{R_1}{R_2}\right) + \rho_s \dot{R}_1^2\left(\frac{3}{2} + \frac{\rho_l - \rho_s}{\rho_s}\frac{4R_2^3 - R_1^3}{2R_2^3}\frac{R_1}{R_2}\right) = \\ = P_g - P_l - \frac{2\sigma_1}{R_1} - \frac{2\sigma_2}{R_2} - 4\frac{\dot{R}_1}{R_1}\left(\frac{V_s\mu_s + R_1^3\mu_l}{R_2^3}\right) - \frac{4V_sG_s}{R_2^3}\left(1 - \frac{R_{e1}}{R_1}\right)\end{gathered} \tag{1.8}$$

Отметим, что данное модифицированное уравнение Релея–Плессета с учетом вязкоупругой оболочки пузырьков впервые было получено в работе [16].

Линеаризуем данное уравнение (1.8): $\psi = \psi_0 + \psi'$, $\psi' \ll \psi_0$ $\psi = R_1, R_2, P$. Учитывая условие несжимаемости оболочки $R_1^2\dot{R}_1 = R_2^2\dot{R}_2$ [22], находим связь между возмущениями $R_{20}^2 R_2' = R_{10}^2 R_1'$. После необходимых математических действий линеаризованное уравнение (1.8) запишется в виде

$$R_* \frac{\partial w_R'}{\partial t} + \frac{4}{R_{**}} w_R' = \frac{P_g' - P_l'}{\rho_s} - XR_1', \quad w_R' = \frac{\partial R_1'}{\partial t}, \tag{1.9}$$

$$R_* = R_{10}\left(1 + \frac{\rho_l - \rho_s}{\rho_s}\frac{R_{10}}{R_{20}}\right), \quad R_{**} = \frac{\rho_s R_{10} R_{20}^3}{V_s\mu_s + R_{10}^3\mu_l}$$

$$X = \frac{1}{\rho_s}\left(\frac{4G_sV_sR_{e1}}{R_{10}^2R_{20}^3} - \frac{12G_sV_sR_{10}^2}{R_{20}^6}\left(1 - \frac{R_{e1}}{R_{10}}\right) - \frac{2\sigma_1}{R_{10}^2} - \frac{2\sigma_2R_{10}^2}{R_{20}^4}\right)$$

Если упругая оболочка пузырьков отсутствует и не учитывается поверхностное натяжение, т.е. $R_{20} = R_{10}$, $\rho_l = \rho_s$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, то уравнение Релея принимает стандартный вид.

Для исследования распространения акустических волн в пузырьковой смеси запишем линеаризованные уравнения сохранения массы, количества пузырьков, энергии, а также уравнение состояния согласно [10] в простейшем монодисперсном случае

$$\begin{gathered}\alpha_l\frac{\partial \rho_l'}{\partial t} + \rho_l\frac{\partial \alpha_l'}{\partial t} + \rho_l\frac{\partial v_l'}{\partial x} = 0, \quad \alpha_g\frac{\partial \rho_g'}{\partial t} + \rho_g\frac{\partial \alpha_g'}{\partial t} + \rho_g\frac{\partial v_L'}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial n'}{\partial t} + n_0\frac{\partial v_l'}{\partial x} = 0, \quad \alpha_g' = \frac{\alpha_g}{n_0}n' + \frac{3\alpha_g}{R_{10}}R_1', \quad \alpha_l' + \alpha_g' = 0 \\ \frac{\partial P_g'}{\partial t} = -3\gamma_g P_g\frac{\dot{R}_1'}{R_{10}} + 3(\gamma_g - 1)\frac{q}{R_{10}}\end{gathered} \tag{1.10}$$

$$q = i\omega R_{10} P'_g \frac{y \operatorname{cth} y - 1}{y^2}, \quad y = \sqrt{-\frac{i\omega R_{10}^2}{\kappa_g}}$$

$$\frac{\partial R'_1}{\partial t} = w'_R + w'_A, \quad w'_A = \frac{P'_g - P'_l}{\rho_l C_l \alpha_g^{1/6}}$$

$$P'_l = C_l^2 \rho'_l, \quad \frac{P'_g}{P_0} = \frac{\rho'_g}{\rho_g} + \frac{T'_g}{T_0}$$

Система уравнений (1.9), (1.10) замкнута. Подчеркнем, что упругая сферическая оболочка учитывается при радиальных пульсациях пузырьков лишь в уравнении Релея–Плессета (1.9).

Исследуем решения полученной системы уравнений, имеющие вид гармонических волн для возмущений φ', где $\varphi' = \rho'_l, \rho'_g, v'_l, R'_1 \ldots$

$$\varphi' = A_\varphi \exp[i(K_* x - \omega t)], \quad K_* = K + iK_{**}, \quad C_p = \omega/K, \quad i^2 = -1 \tag{1.11}$$

В результате подстановки (1.11) в систему (1.9), (1.10) имеем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд A_φ. Исключая неизвестные амплитуды и из условия существования у линейной системы уравнений нетривиального решения, получено следующее дисперсионное соотношение

$$\left(\frac{K_*}{\omega}\right)^2 = \frac{1}{C_f^2} + \frac{3\alpha_g \alpha_l \rho_l Q}{3\gamma_g P_0 - QS}, \quad C_f = \frac{C_l}{\alpha_l} \tag{1.12}$$

$$Q = 1 + 3(\gamma_g - 1)\frac{y \operatorname{cth} y - 1}{y^2}, \quad y = \sqrt{-\frac{i\omega R_{10}^2}{\kappa_g}}, \quad S = \frac{\rho_s \rho_l R_{10}^2 (i\omega R_* h - X)}{\rho_l R_{10} + \rho_s R_* h z}$$

$$h = -i\omega + \frac{1}{\tau}, \quad \tau = \frac{R_* R_{**}}{4}, \quad z = \frac{R_{10}}{C_l \alpha_g^{1/6}}$$

При предельном переходе $\omega \to 0$ из дисперсионного соотношения (1.12) получено выражение равновесной скорости звука

$$\frac{1}{C_e^2} = \frac{1}{C_f^2} + \frac{3\alpha_g \alpha_l \rho_l (\rho_l R_{10} R_{**} + 4z\rho_s)}{3P_0 \gamma_g (\rho_l R_{10} R_{**} + 4z\rho_s) + R_{10}^2 X \rho_l \rho_s R_{**}} \tag{1.13}$$

В случае отсутствия упругой оболочки пузырьков равновесная скорость звука принимает известное выражение [1]

$$\frac{1}{C_e^2} = \frac{1}{C_f^2} + \frac{\alpha_g \alpha_l \rho_l}{P_0 \gamma_g} \tag{1.14}$$

Сравнив выражения (1.13) и (1.14), делаем вывод о том, что для пузырьков без оболочки равновесная скорость звука не зависит от частоты возмущений и размера пузырьков, в то время как для покрытых пузырьков может наблюдаться обратная ситуация. Дело в том, что вязкость материала μ_s и модуль упругости G_s, вообще говоря, могут зависеть от частоты возмущений.

При предельном переходе $\omega \to \infty$ в соотношении (1.12) фазовая скорость стремится к скорости звука в несущей фазе.

Асимптотика коэффициента затухания, справедливая на низких частотах $\omega\tau \ll 1$, имеет вид

$$K_{**}^{(0)}(\omega) = \frac{C_e}{2} \frac{3R_{10}^2 R_* \alpha_g \alpha_l \rho_l^2 \rho_s \xi}{(3P_0 z \gamma_g \rho_s R_* + \phi)^2} \omega^2 \tag{1.15}$$

$$\xi = R_{10}\tau\rho_l + \rho_s z(R_* - X\tau^2), \quad \phi = R_{10}\tau\rho_l (3P_0\gamma_g + R_{10} X \rho_s)$$

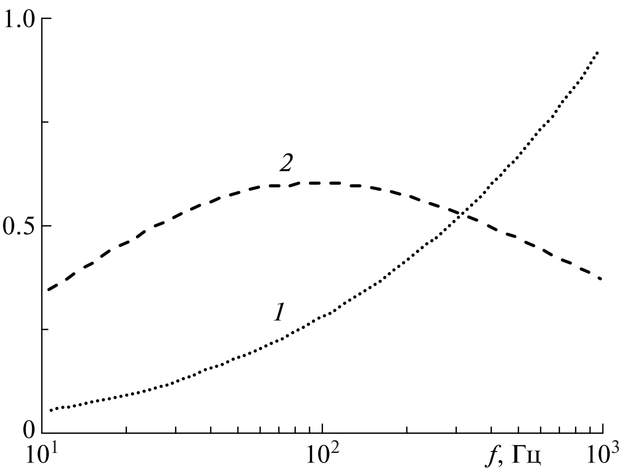

Рис. 2. Частотные зависимости модуля сдвига (*1*) и вязкости резины (*2*): *1* – $G_s/20$ МПа, *2* – $\mu_s/6$ кПа · с

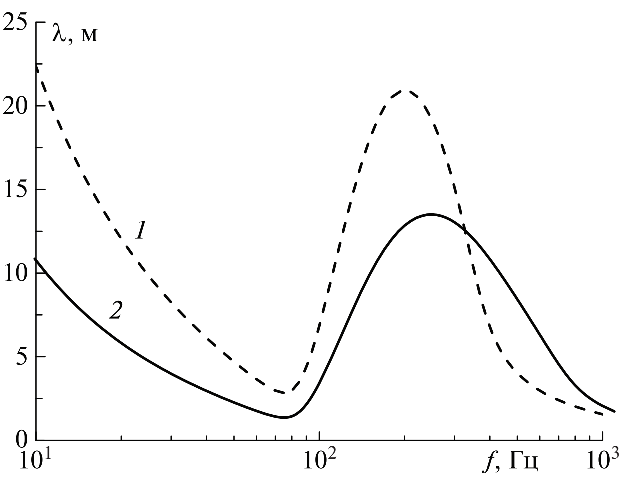

Рис. 3. Зависимости длины волны от частоты возмущений при $R_{10} = 0.0796$ м, $R_s = R_{20} - R_{10} = 0.0016$ м: *1, 2* – $\alpha_g = 0.0047, 0.021$

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В работе [23] приведены экспериментальные данные для зависимости коэффициента затухания от частоты возмущений в смеси воды с воздушными шариками, покрытые резиновой оболочкой. Температура воды $T_0 = 303$ K, давление $P_0 = 1.21\times10^5$ Па. Радиусы шаров составляли примерно 6 и 8 см, толщина резиновой оболочки – 1.6 мм, плотность $\rho_s = 1476$ кг/м^3, а объемное содержание газа менялось от 0.005 до 0.02. Частотные зависимости модуля сдвига и вязкости резины приведены в [23] и представлены на рис. 2.

Для применения континуальной модели необходимо выполнение следующих условий: 1) длина волны должна быть намного больше размеров включений; 2) объемное содержание включений мало, $\alpha_g \ll 1$. Второе условие в эксперименте очевидно выполняется. Чтобы проверить выполнение первого условия, на рис. 3 представлены зависимости длины волны $\lambda = C_p/f$ от частоты возмущений при минимальном и максимальном объемном газосодержании в эксперименте. Видно, что при наименьшем значении объемного содержания включений длина волны изменяется от 2.8 до 22 м, а при наибольшем значении – от 1.3 до 13.5 м.

В целом условие $\lambda \gg R_{10}$ выполняется, поэтому можно применить полученную теорию к результатам эксперимента [23], рис. 4. Здесь *1* – экспериментальные данные, теоретическая кривая *2*

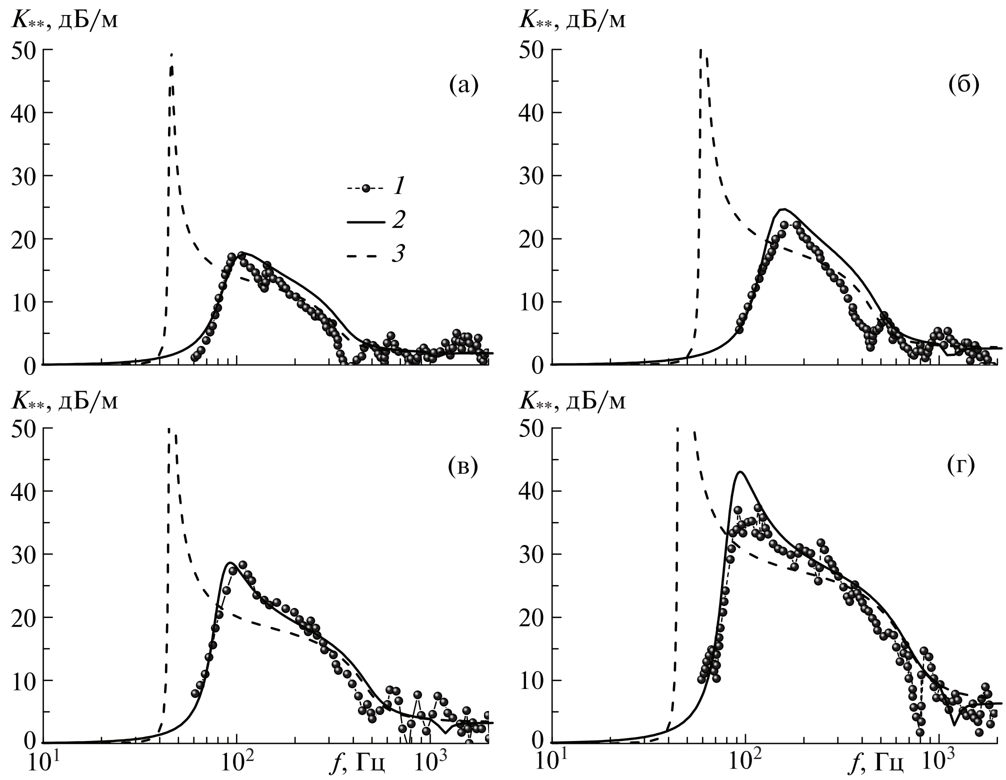

Рис. 4. Сравнение зависимостей коэффициента затухания от частоты возмущений с экспериментальными данными [23]: (а) $\alpha_g = 0.0047$, $R_{10} = 0.0796$ м; (б) $\alpha_g = 0.0053$, $R_{10} = 0.0608$ м; (в) $\alpha_g = 0.0094$, $R_{10} = 0.0796$ м; (г) $\alpha_g = 0.021$, $R_{10} = 0.0796$ м; *1* – данные эксперимента [23]; *2, 3* – расчет по (1.12) с учетом и без учета упругой оболочки пузырьков

рассчитана по формуле (1.12) с учетом упругой оболочки пузырьков, теоретическая кривая *3* без учета упругой оболочки пузырьков. Напомним, что в окрестности резонансной частоты пузырьков, которая может быть определена по формуле Миннаэрта

$$f_0 = \frac{1}{2\pi R_{10}}\sqrt{\frac{3\gamma_g P_0}{\rho_L}} \tag{2.1}$$

наблюдается максимум коэффициента затухания (кривая *3*). Наличие упругой оболочки пузырьков приводит к смещению данного максимума в сторону увеличения частоты возмущений (кривая *2*), что хорошо подтверждается экспериментальными данными. Взяв производную от правой части выражения (1.12) и решив задачу на экстремум, находим критическое значение частоты

$$f_0^2 = \frac{1}{R_*}\left(\frac{3\gamma_g P_0}{\rho_s R_{10}} + X\right)$$

Далее подставив выражения для R_* и X, получим

$$f_0^2 = \frac{1}{\rho_s R_{10}^2 \eta}\left(3\gamma_g P_0 - \frac{2\sigma_1}{R_{10}} - \frac{2\sigma_2 R_{10}^3}{R_{20}^4} + \frac{4V_s G_s}{R_{20}^3}\left(1 + Z\left(1 + \frac{3R_{10}^3}{R_{20}^3}\right)\right)\right) \tag{2.2}$$

$$\eta = 1 + \frac{\rho_l - \rho_s}{\rho_s}\frac{R_{10}}{R_{20}}$$

При отсутствии упругой оболочки пузырьков формула (2.2) переходит в (2.1). Еще один важный вывод, который можно сделать из рис. 4, состоит в том, что наличие упругой оболочки приводит к уменьшению максимума коэффициента затухания. Очевидно, резиновая оболочка замедляет радиальные колебания пузырьков и происходит меньшее рассеяние акустической вол-

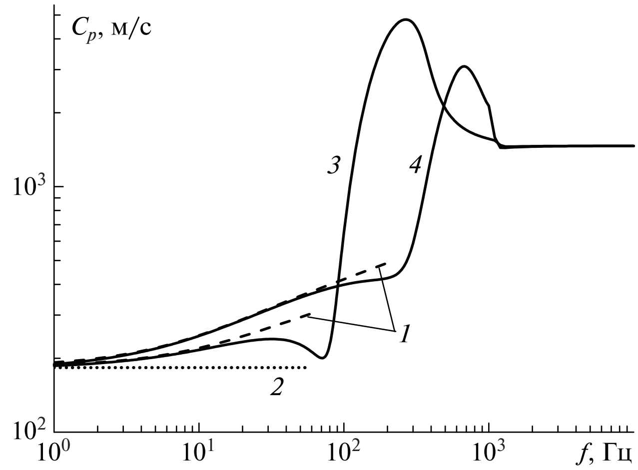

Рис. 5. Частотные зависимости фазовой скорости и ее низкочастотные асимптотики с учетом (*1*) и без учета (*2*) упругой оболочки; *3* – $R_{10} = 0.0796$ м; *4* – $R_{10} = 0.0396$ м, $\alpha_g = 0.005$

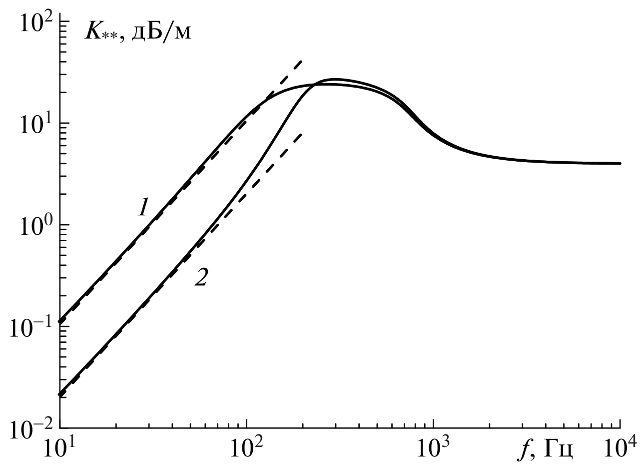

Рис. 6. Зависимости коэффициента затухания от частоты возмущений и ее низкочастотные асимптотики при $\mu_s = 3.5\times10^3$ Па · с, $R_{10} = 0.0396$ м: *1, 2* – $G_s = 10^6$, 5×10^6

ны. Несмотря на некоторый разброс экспериментальных данных, теоретические результаты удовлетворительно описывают эксперимент.

На рис. 5 даны зависимости фазовой скорости от частоты возмущений при разных значениях радиуса пузырьков и представлены низкочастотные асимптотики по формулам (1.13) и (1.14). Как следует из фигуры и сравнения (1.13) и (1.14), делаем вывод о том, что для пузырьков без оболочки равновесная скорость звука не зависит от частоты возмущений и размера пузырьков (линия *2*), а для покрытых пузырьков может наблюдаться обратная ситуация (монотонно возрастающая кривая *1*). Здесь равновесная скорость заметно зависит от размера пузырьков, а также вязкости оболочки и модуля сдвига, которые в свою очередь зависят от частоты возмущений (рис. 2). Таким образом, акустика жидкости с покрытыми пузырьками существенно различна при низких и умеренных частотах.

На рис. 6 представлены зависимости коэффициента затухания от частоты возмущений при разных значениях модуля сдвига материала и проиллюстрированы низкочастотные асимптотики по формуле (1.15). Приняв во внимание формулу (2.2), из рис. 6 следует, что увеличение модуля сдвига приводит к смещению резонансной частоты в сторону увеличения частоты возмущений. Исходя из асимптотики (1.15) коэффициент затухания при низких частотах пропорционален квадрату частоты возмущений, а также равновесной скорости звука, и существенно зависит от параметров материала оболочки пузырьков.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено, что для пузырьков без оболочки равновесная скорость звука не зависит от частоты возмущений и размера пузырьков, в то время для покрытых пузырьков установлена зависимость равновесной скорости звука от частоты возмущений, размера пузырьков и параметров оболочки.

Установлено, что учет вязкоупругой оболочки пузырьков приводит к увеличению резонансной частоты возмущений, что хорошо подтверждается экспериментальными данными.

Показано, что коэффициент затухания на низких частотах для рассматриваемой смеси пропорционален квадрату частоты возмущений, равновесной скорости звука, и во многом зависит от размера и параметров оболочки пузырьков.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 15-11-10016).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987.
2. *Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р.* Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990.
3. *Leighton T.G.* The Acoustic Bubble. London: Acad. London, 1994.
4. *Temkin S.* Suspension Acoustics: An Introduction to the Physics of Suspensions. Cambridge: Univ. Press, 2005.
5. *Wilson P.S., Roy R.A., Carey W.M.* Phase speed and attenuation in bubbly liquids inferred from impedance measurements near the individual bubble resonance frequency // J. Acoust. Soc. Amer. 2005. V. 117. № 4. P. 1895–1910.
6. *Duro V., Rajaona D.R., Decultot D., Maze G.* Experimental study of sound propagation through bubbly water: comparison with optical measurements // IEEE J. Oceanic Engineering. 2011. V. 36. № 1. P. 114–125.
7. *Leroy V., Strybulevych A., Page J.H., Scanlon M.G.* Sound velocity and attenuation in bubbly gels measured by transmission experiments // J. Acoust. Soc. Amer. 2008. V. 123. № 4. P. 1931–1940.
8. *Commander K.W., Prosperetti A.* Linear pressure waves in bubbly liquids: Comparison between theory and experiments // J. Acoust. Soc. Amer. 1989. V. 85. № 2. P. 732–746.
9. *Chung N.M., Lin W.K.* Sound velocity and its relationship with interfacial area density in a steam/water, two-phase bubbly flow // Flow Measurements and Instrumentation. 1992. V. 3. № 2. P. 65–71.
10. *Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В.* Звуковые волны в двухфракционных полидисперсных пузырьковых средах // ПММ. 2013. Т. 77. № 5. С. 743–753.
11. *Вараксин А.Ю.* Гидрогазодинамика и теплофизика двухфазных потоков: проблемы и достижения // ТВТ. 2013. Т. 51. № 3. С. 421–455.
12. *Prosperetti A.* Vapor bubbles // Annu. Rev. Fluid Mech. 2017. V. 49. P. 221–248.
13. *Goldberg B.B., Raichlen J.S., Editors F.F.* Ultrasound contrast agents. Basic principles and clinical applications. Martin Dunitz, 2001.
14. *Sboros V.* Response of contrast agents to ultrasound // Advanced Drug Delivery Reviews. 2008. V. 60. P. 1117–1136.
15. *Ma X., Wang X., Hahn K., Sanchez S.* Motion control of urea-powered biocompatible hollow microcapsules // ACS Nano. 2016. V. 10. P. 3597–3605.
16. *Church C.C.* The effects of an elastic solid surface layer on the radial pulsations of gas bubbles // J. Acoust. Soc. Amer. 1995. V. 97. № 3. P. 1510–1521.
17. *Hoff L., Sontum P.C., Hovem J.M.* Oscillations of polymeric microbubbles: Effects of the encapsulating shell // J. Acoust. Soc. Amer. 2000. V. 107. № 4. P. 2272–2280.
18. *Алексеев В.Н., Рыбак С.А.* Колебания газовых пузырьков в упругих средах // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 5. С. 603–609.
19. *Khismatullin D.B., Nadim A.* Radial oscillations of encapsulated microbubbles in viscoelastic liquids // Phys. Fluids. 2002. V. 14. № 10. P. 3534–3557.
20. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика, М.: Наука, 1988.
21. *Петров А.Г.* Аналитическая гидродинамика. М.: Физматлит, 2010. 520 с.
22. *Coulouvrat F., Thomas J.L., Astafyeva K., Taulier N., Conoir J.M., Urbach W.* A model for ultrasound absorption and dispersion in dilute suspensions of nanometric contrast agents // J. Acoust. Soc. Amer. 2012. V. 136. № 6. P. 3748–3759.
23. *Lee K.M., Wilson P.S., Wochner M.S.* Attenuation of low-frequency underwater sound using an array of air-filled balloons and comparison to effective medium theory // J. Acoust. Soc. Amer. 2017. V. 142. № 6. P. 3443–3449.