ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2019, № 1, с. 36–43

УДК 532.61.096

ДВУМЕРНОЕ ПЛОСКОЕ СТАЦИОНАРНОЕ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЕ ТЕЧЕНИЕ

© 2019 г. Е. Н. Лемешкова[a,b]

[a]Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

[b]Институт математики и фундаментальной информатики СФУ, Красноярск, Россия

E-mail: elena_cher@icm.krasn.ru

Поступила в редакцию 16.03.2018 г.
После доработки 10.05.2018 г.
Принята к публикации 20.06.2018 г.

Изучается задача о двумерном стационарном течении жидкости в плоском канале со свободной границей, вдоль которой поверхностное натяжение линейно зависит от температуры, а на дне поддерживается ее заданное распределение. Температура в жидкости распределена по квадратичному закону, что согласуется с полем скоростей типа Хименца. Возникающая краевая задача является сильно нелинейной и обратной относительно градиента давления вдоль канала. Применение к ней тау-метода показывает, что она имеет три различных решения, а в случае теплоизолированной свободной границы – одно. Для каждого из решений построены характерные структуры течения.

Ключевые слова: тау-метод, свободная граница, термокапиллярность, обратная задача

DOI: 10.1134/S0568528119010080

Интерес к исследованию влияния капиллярных сил на равновесие и движение жидкости в условиях пониженной гравитации связан с развитием космических технологий [1, 2]. Выращивание кристаллов и создание композитов с новыми свойствами в невесомости, получение в космосе особо чистых металлов и стекол в результате термокапиллярного осаждения капель и пузырей инородной фазы – вот далеко не полный перечень технологических применений капиллярных эффектов. Температурная зависимость коэффициента поверхностного натяжения – один из важных факторов, обусловливающих многообразие динамики межфазной поверхности при наличии в системе неоднородного поля температур.

В статьях [1, 3] изучена задача о термокапиллярной конвекции невесомой жидкости в плоском слое со свободной теплоизолированной поверхностью и подогреваемым дном в случае квадратичной зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры в рамках уравнений Навье–Стокса и теплопроводности. В случае полупространства подобная задача исследована в [4], только, в отличие от [1, 3], на свободной границе поддерживается линейное распределение температуры.

Данная работа посвящена исследованию решений стационарной задачи, которая возникает при описании двумерного течения вязкой теплопроводной жидкости, находящейся в открытом плоском канале. Течение возникает под действием термокапиллярных сил, приложенных вдоль свободной границы, которые вызывают конвекцию Марангони, причем, в отличие от [1, 3, 4], коэффициент поверхностного натяжения линейно зависит от температуры. Такая конвекция может преобладать в условиях микрогравитации или при движении тонких пленок жидкостей.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Двумерное стационарное движение вязкой теплопроводной жидкости в отсутствие внешних сил описывается уравнениями

$$\begin{gathered}
u_1 u_{1x} + u_2 u_{1y} + \frac{1}{\rho} p_x = \nu(u_{1xx} + u_{1yy}) \\
u_1 u_{2x} + u_2 u_{2y} + \frac{1}{\rho} p_y = \nu(u_{2xx} + u_{2yy}) \\
u_{1x} + u_{2y} = 0 \\
u_1 \theta_x + u_2 \theta_y = \chi(\theta_{xx} + \theta_{yy})
\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ – компоненты вектора скорости; $p(x,y)$ – давление; $\theta(x,y)$ – температура; $\rho > 0$, $\nu > 0$, $\chi > 0$ – постоянные плотность, кинематическая вязкость и температуропроводность жидкости соответственно.

Пусть $u_1 = w(y)x$, $u_2 = v(y)$, $p = p(x,y)$, $\theta = \theta(x,y)$ есть решение системы (1.1). Данное представление для скоростей имеет название поле скоростей типа Хименца [5]. Подстановка решения в первые три уравнения (1.1) приводит к соотношениям

$$\begin{gathered}
w + v_y = 0, \quad v w_y + w^2 = f + \nu w_{yy} \\
\frac{1}{\rho} p = d(y) - \frac{f x^2}{2}, \quad d_y = \nu v_{yy} - v v_y
\end{gathered} \tag{1.2}$$

где f – произвольная константа.

Последнее уравнение в (1.1) для температуры примет вид

$$w x \theta_x + v \theta_y = \chi(\theta_{xx} + \theta_{yy})$$

Среди его решений имеет место квадратичное по переменной x

$$\theta = a(y)x^2 + m(y)x + b(y) \tag{1.3}$$

Далее, для простоты, предполагается, что $m(y) \equiv 0$. Это означает, что температурное поле имеет в точке $x = 0$ экстремум: максимум при $a(y) < 0$ и минимум при $a(y) > 0$ для всех $y \in [0,1]$, в частности, и на твердой стенке $y = 0$. Для описания течения вязкой теплопроводной жидкости в плоском канале с нижней твердой неподвижной стенкой $y = 0$ и верхней свободной границей $y = l = \text{const} > 0$ применяется решение вида (1.2), (1.3). Тогда при $0 < y < l$ неизвестные $w(y)$, $v(y)$, $a(y)$ и $b(y)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered}
v w_y + w^2 = \nu w_{yy} + f, \quad w + v_y = 0, \quad v v_y + d_y = \nu v_{yy} \\
2wa + v a_y = \chi a_{yy}, \quad v b_y = \chi b_{yy} + 2\chi a
\end{gathered} \tag{1.4}$$

Предполагается, что коэффициент поверхностного натяжения σ линейно зависит от температуры

$$\sigma(\theta) = \sigma^0 - æ(\theta - \theta^0)$$

$\sigma^0, æ, \theta^0 = \text{const} > 0$. На свободной границе $y = l$ выполнены условия [6]

$$v(l) = 0, \quad w_y = -2æ a(l) \tag{1.5}$$

$$k\theta_y + \gamma(\theta - \theta_{gas}) = Q \tag{1.6}$$

Условия (1.5) есть следствия кинематического и динамического условий соответственно. В условии теплового контакта (1.6) $k > 0$ – коэффициент теплопроводности, $Q(x)$ – заданный поток тепла, $\gamma \geq 0$ – коэффициент межфазного теплообмена, далее $\gamma = \text{const}$. Из условия для нормальных напряжений получается, что свободная поверхность остается плоской. Данное предположение может выполняться, например, при действии достаточно большого капиллярного давления (величина σ^0 достаточно велика) [7]. В соответствии с представлением температуры (1.3) в условии (1.6) необходимо считать в общем случае, что

$$\theta_{gas} = a_1 x^2 + a_2, \quad Q = b_1 x^2 + b_2$$

с заданными постоянными a_k, b_k, $k = 1, 2$. Следовательно, на свободной границе выполнены условия для $a(y)$, $b(y)$

$$ka_y(l) + \gamma a(l) = b_1 + \gamma a_1 \tag{1.7}$$

$$kb_y(l) + \gamma b(l) = b_2 + \gamma a_2 \tag{1.8}$$

Граничные условия на твердой стенке имеют вид

$$w(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad a(0) = a_{10}, \quad b(0) = b_{10} \tag{1.9}$$

с известными постоянными a_{10}, b_{10}.

Стоит отметить следующие особенности поставленной задачи. Она нелинейная и обратная, так как постоянная f является искомой. Действительно, если из уравнения сохранения массы исключить $v(y)$, то получается задача для функций $w(y)$, $a(y)$. Задача для функции $b(y)$ при известных $v(y)$ и $a(y)$ отделяется. Функция $d(y)$ восстанавливается квадратурой из третьего уравнения (1.4) с точностью до константы.

Замечание 1. Если решение задачи (1.4)–(1.6), (1.9) искать в виде

$$w = \varepsilon w^{(1)} + \varepsilon^2 w^{(2)} + \ldots, \quad v = \varepsilon v^{(1)} + \varepsilon^2 v^{(2)} + \ldots$$
$$a = a^{(1)} + \varepsilon a^{(2)} + \ldots, \quad b = b^{(1)} + \varepsilon b^{(2)} + \ldots, f = f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \ldots$$

где ε – малый параметр (число Марангони), то подставляя эти выражения в соответствующие уравнения и граничные условия и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим линейную задачу для $w^{(1)}, v^{(1)}, a^{(1)}, b^{(1)}, f^{(1)}$. Решение данной задачи (при малых числах Марангони) можно интерпретировать как ползущее двумерное движение вязкой теплопроводной жидкости, находящейся на подогреваемой подложке. Задача о двумерном ползущем движении двух вязких теплопроводных жидкостей с линейной зависимостью поверхностного натяжения от температуры исследована в [8].

2. ВЫВОД СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Выпишем полностью полученную нелинейную задачу в безразмерном виде для функций $w(y)$, $a(y)$ и постоянной f, учитывая что из второго уравнения (1.4)

$$v(y) = \int_0^y w(y)dy. \tag{2.1}$$

Она имеет вид

$$L_1(W, F) \equiv \Pr W_{\xi\xi} + W_\xi \left(\int_0^\xi W(z)dz \right) - W^2 + F = 0, \quad 0 < \xi = y/l < 1 \tag{2.2}$$

$$L_2(W, A) \equiv A_{\xi\xi} + A_\xi \left(\int_0^\xi W(z)dz \right) - 2AW = 0, \quad 0 < \xi < 1 \tag{2.3}$$

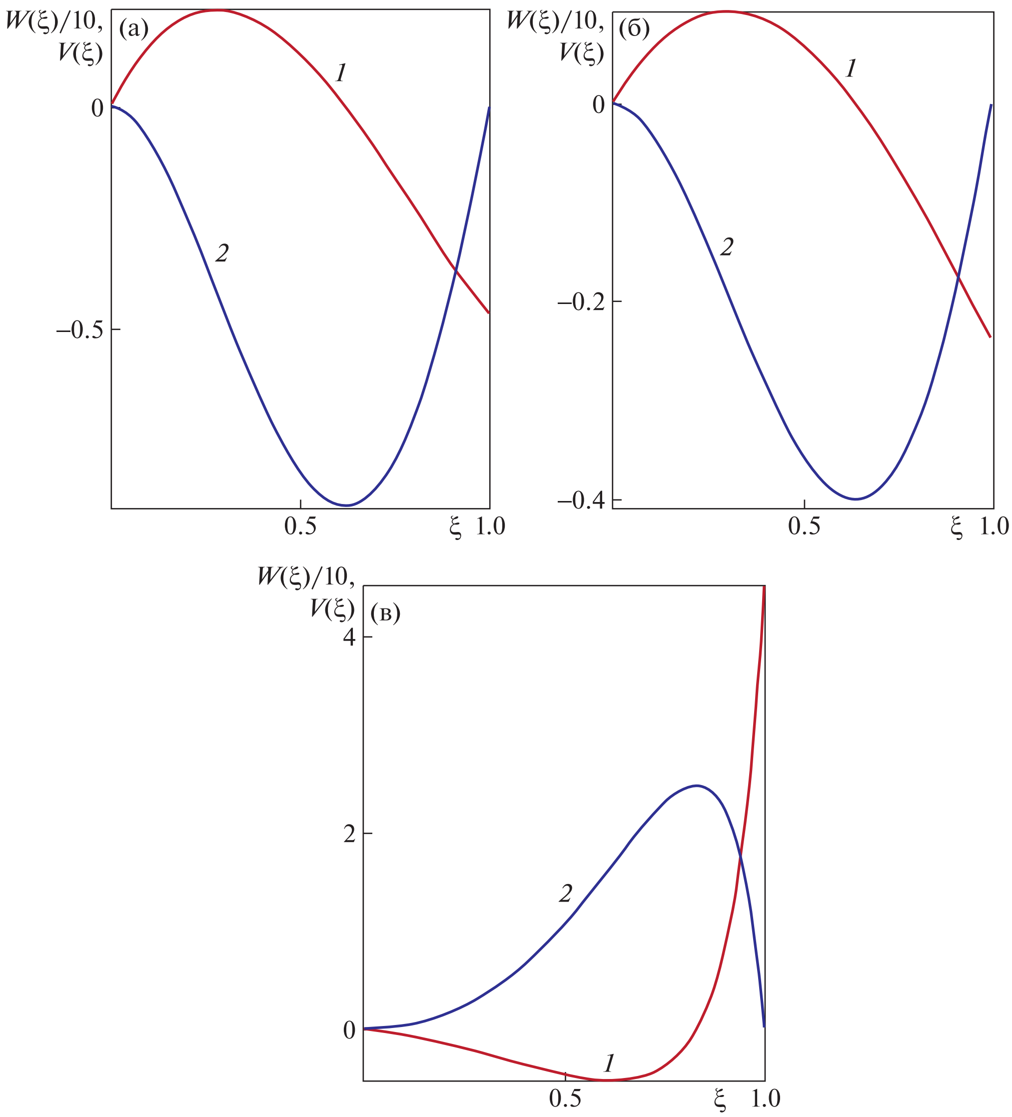
$$W(0) = 0, \quad A(0) = 1, \quad W_\xi(1) = -2\mathrm{M}A(1) \tag{2.4}$$

$$A_\xi(1) + \mathrm{Bi}A(1) = 0, \quad \int_0^1 W(z)dz = 0 \tag{2.5}$$

где $W(\xi) = w(y)l^2/\chi$, $A(\xi) = a(y)/a_{10}$, $F = fl^4/\chi^2$, $\Pr = \nu/\chi$ – число Прандтля, $\mathrm{M} = æa_{10}l^3/\chi\mu$ – число Марангони (см. выше), $\mathrm{Bi} = \gamma l/k$ – число Био. Интегральное условие в (2.4) получено из первого условия (1.5) с учетом (2.1) и является дополнительным для определения постоянной F. Линейная задача, описывающая ползущее движение жидкости (см. замечание 1), имеет нетривиальное единственное решение

$$A_0(\xi) = -\frac{\mathrm{Bi}}{1+\mathrm{Bi}}\xi + 1, \quad W_0(\xi) = \frac{F_0}{6\Pr}(2\xi - 3\xi^2), \quad F_0 = \frac{3\mathrm{M}\Pr}{1+\mathrm{Bi}} \tag{2.6}$$

В статьях [1, 3] рассматривалась задача о течении жидкости в плоском канале, на дне которого поддерживается заданное распределение температуры, а свободная поверхность теплоизолиро-



Фиг. 1. Профили безразмерной функции $W(\xi)$ (*1*) и поперечной скорости $V(\xi)$ (*2*) для F_1 (а), F_2 (б) и F_3 (в)

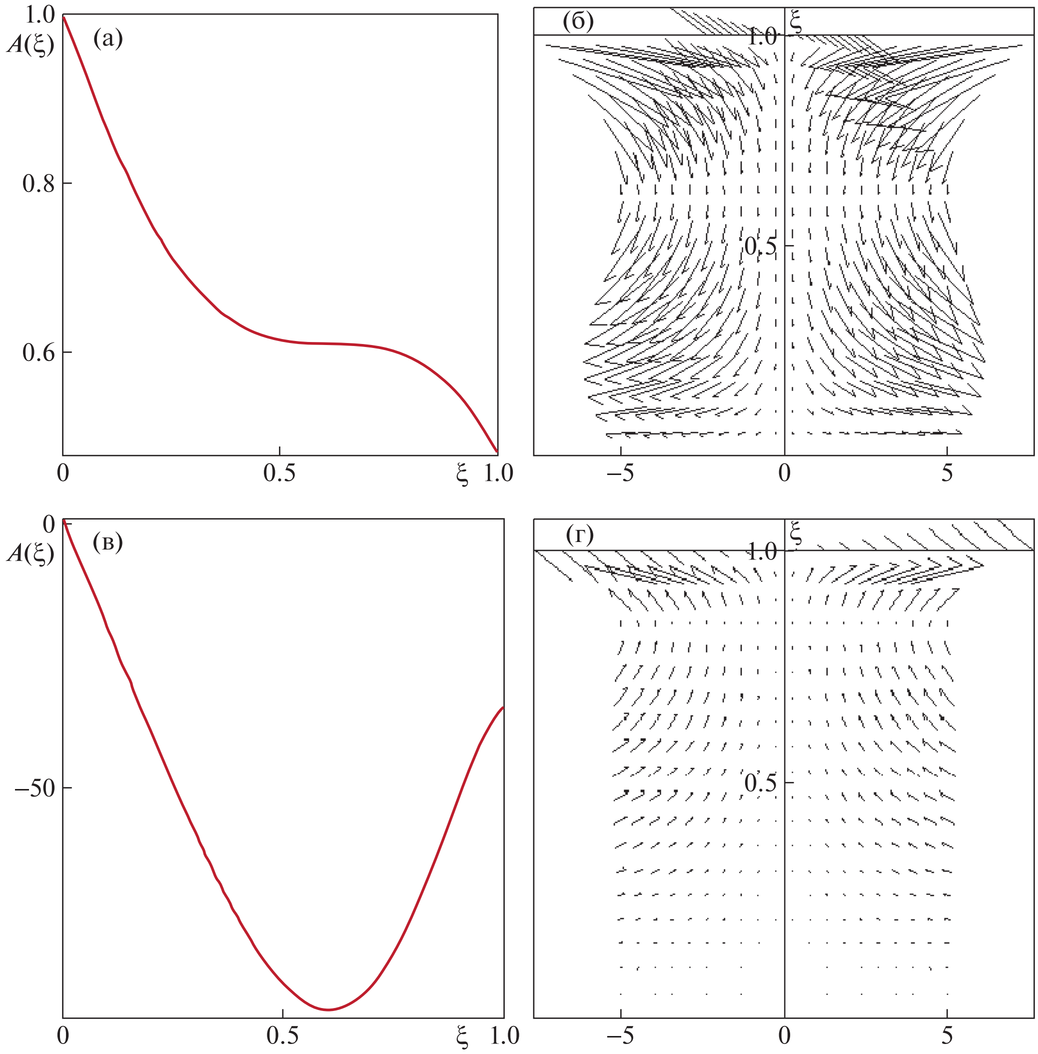
вана (Bi = 0). В результате разделения переменных была получена нелинейная двухточечная краевая задача, описывающая движение жидкости в слое, где постоянная F играет роль собственного значения, а числа Прандтля и Марангони – параметры. Установлена неединственность решения этой задачи (от одного до трех решений) в зависимости от параметра M (Pr = 0, т.е. рассмотрен предельный случай идеально теплопроводной жидкости). В данной работе для решения задачи (2.2)–(2.5) применяется тау-метод, представляющий модификацию метода Галеркина [9]. Приближенное решение ищется в виде сумм

$$W_n(\xi) = \sum_{k=0}^{n+1} W^k R_k(\xi), \quad A_n(\xi) = \sum_{k=0}^{n+1} A^k R_k(\xi) \tag{2.7}$$

где $R_k(\xi)$ – смещенные полиномы Лежандра. Неизвестные коэффициенты W^k, A^k и постоянная F находятся из системы галеркинских приближений

$$\int_0^1 L_1(W_n, F) R_m(\xi) d\xi = 0, \quad \int_0^1 L_2(W_n, A_n) R_m(\xi) d\xi = 0, \quad m = 0, \ldots, n-1 \tag{2.8}$$

и преобразованных граничных условий (2.4), (2.5)



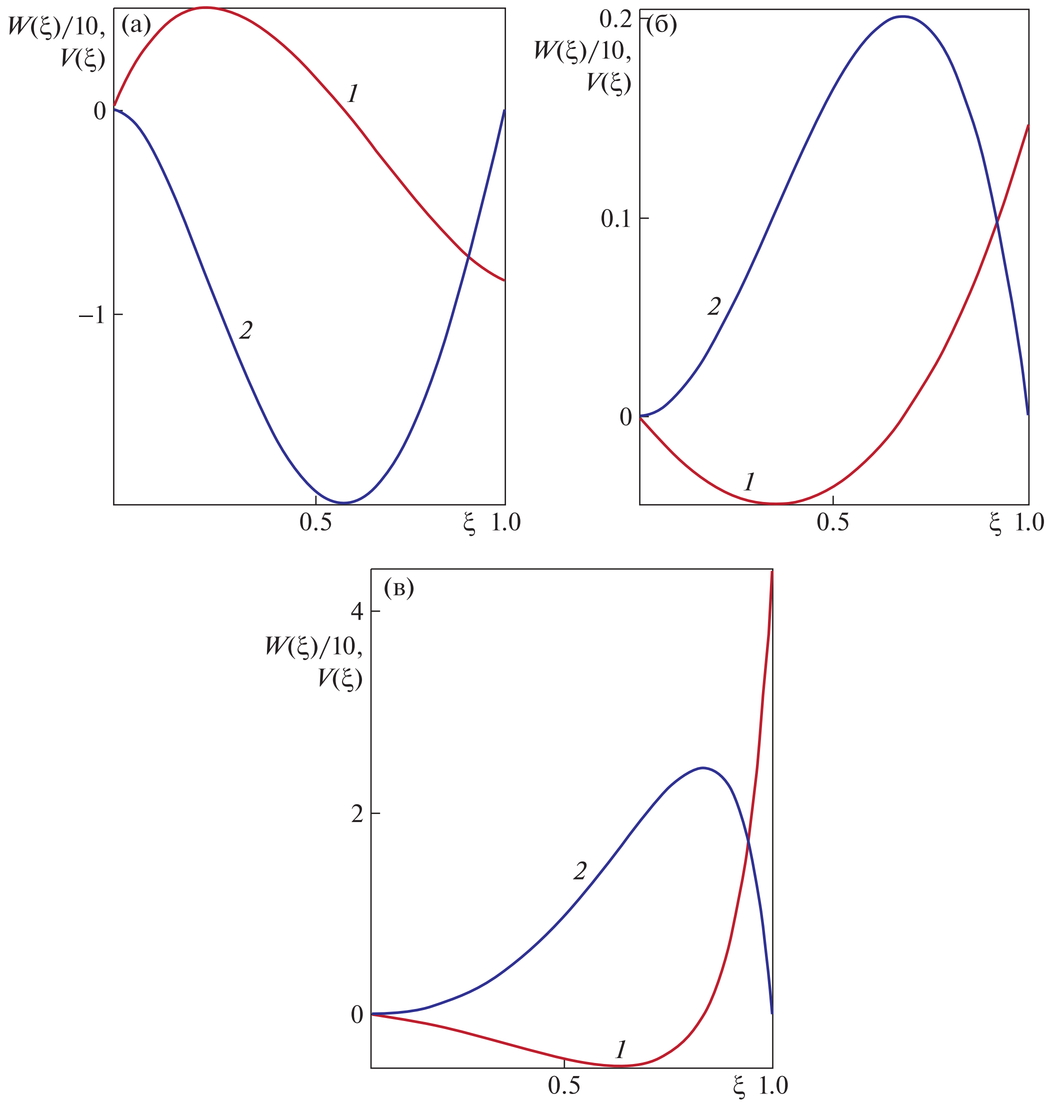
Фиг. 2. Профиль безразмерной функции $A(\xi)$ и линии тока в слое для F_1 (а, б) и F_3 (в, г)

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k W^k = 0, \quad \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k A^k = 1, \quad \sum_{k=0}^{n+1} W^k R_k'(1) = -2\mathrm{M}\sum_{k=0}^{n+1} A^k$$
$$\sum_{k=0}^{n+1} A^k R_k'(1) + Bi\sum_{k=0}^{n+1} A^k = 0, \quad W^0 = 0 \tag{2.9}$$

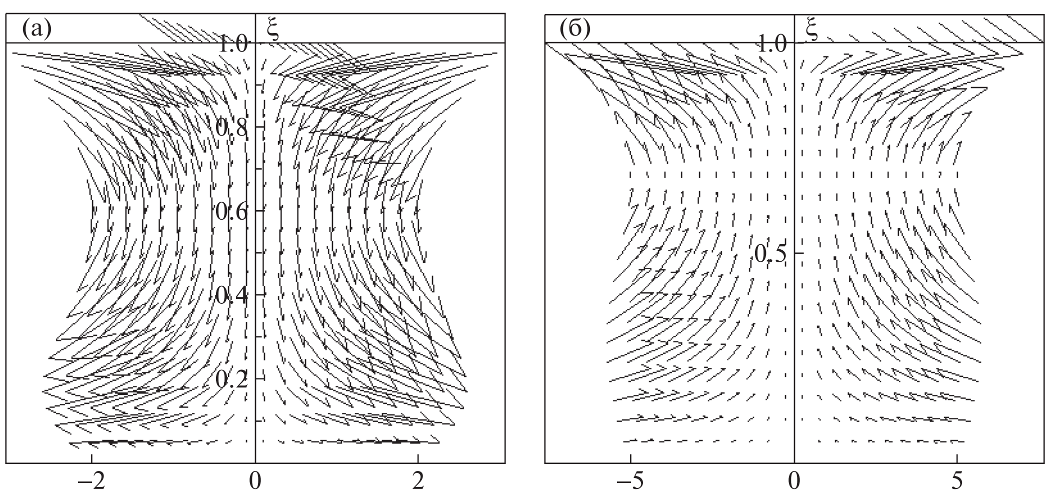
Последнее уравнение в (2.9) получается из интегрального условия (2.5), учитывая ортогональность полиномов Лежандра на отрезке [0, 1] с весом 1 [10]. Таким образом уравнения (2.8) и (2.9) образуют замкнутую систему алгебраических нелинейных уравнений на коэффициенты W^k, A^k и постоянную F.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

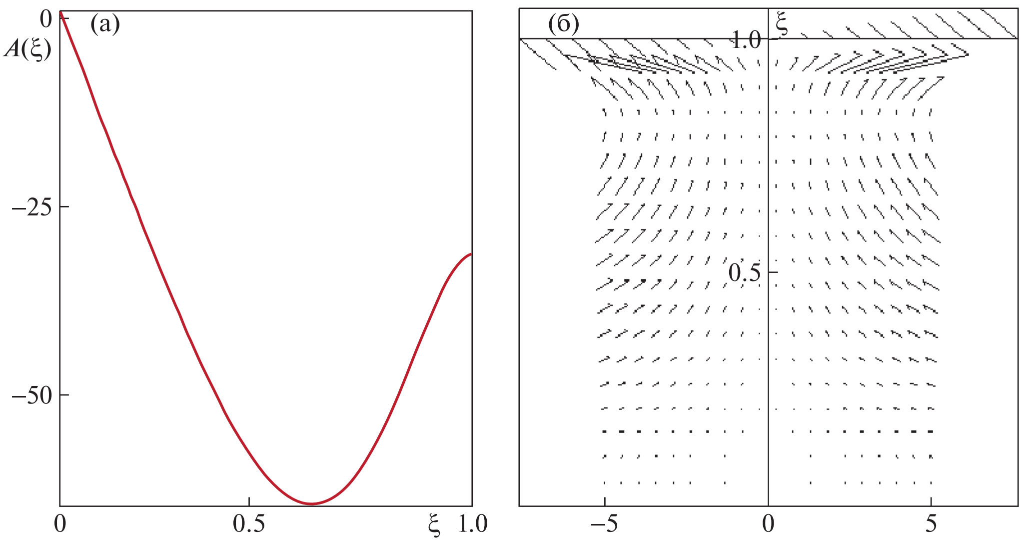
Расчеты проводились для Pr = 0.2, Bi = 2, M = 10 ($a_{10} > 0$, то есть температура в точке $x = 0$, $y = 0$ минимальна) и $n = 17$. Было установлено три различных значения безразмерной постоянной F: $F_1 = 14.1397$, $F_2 = 4.5359$ и $F_3 = 4.4877$. При этом разность значений полученных при $n = 16$ и 17 составляет порядка 10^{-11}, 10^{-14} и 10^{-6} для F_1, F_2 и F_3 соответственно, что говорит о хорошей сходимости τ – метода при решении данной краевой задачи. Стоит также отметить,что при $\mathrm{M} \ll 1$ решения стремятся к единственному решению линейной задачи (2.6), описывающей



Фиг. 3. Профили безразмерной функции $W(\xi)$ (*1*) и поперечной скорости $V(\xi)$ (*2*) для F_1 (а), F_2 (б) и F_3 (в), M = −10



Фиг. 4. Линии тока в слое для F_1 (а) и F_2 (б), M = −10



Фиг. 5. Профиль безразмерной функции $A(\xi)$ и линии тока в слое $F = 3.97$, $\mathrm{M} = -10$

ползущее движение в слое. Например, при $\mathrm{M} = 0.01$ найдено $|F_0 - F_{1,2,3}| \approx 10^{-6}$. На фиг. 1 приведены профили безразмерной функции $W(\xi)$ и поперечной скорости $V(\xi)$ (2.1) для значений F_1, F_2 и F_3 соответственно. Профили для F_1 и F_2 схожи, но стоит отметить, что течение, отвечающее параметру F_1, является более интенсивным, так $\max\limits_{\xi\in[0,1]}|W(\xi, F_1)| = 4.65$, $\max\limits_{\xi\in[0,1]}|V(\xi, F_1)| = 0.9$, а $\max\limits_{\xi\in[0,1]}|W(\xi, F_2)| = 2.37$, $\max\limits_{\xi\in[0,1]}|V(\xi, F_2)| = 0.4$. На фиг. 2 изображены профиль функции $A(\xi)$ и поле скоростей для F_1 и F_3. В первом случае функция $A(\xi)$ на свободной границе $\xi = 1$ положительна, следовательно температура при $x = 0$ минимальная и возрастает в направлении оси x. Поскольку жидкость течет в сторону большего поверхностного натяжения, то вблизи поверхности раздела возникает возвратное течение, что и изображено на фиг. 2,а. Во втором случае $A(1) < 0$ и температура при $x = 0$ максимальна, следовательно, жидкость вблизи свободной границы течет в направлении оси x (фиг. 2,б). Видно, что в обоих случаях более интенсивное движение формируется вблизи свободной границы $\xi = 1$.

В случае, когда $\mathrm{M} = -10$ ($a_{10} < 0$ и температура в точке $x = 0$, $y = 0$ максимальна) для параметра F получим значения $F_1 = 50.08$, $F_2 = -1.3368$ и $F_3 = 4.271$. На фиг. 3 изображены профили безразмерной функции $W(\xi)$ и поперечной скорости $V(\xi)$ для значений F_1, F_2 и F_3 соответственно. Профили для $F = 4.271$ аналогичны профилям как при $\mathrm{M} = 10$, $F = 4.4877$ (см. фиг. 1в), причем $\max\limits_{\xi\in[0,1]}|W(\xi, F = 4.4877)| = 43.962$, $\max\limits_{\xi\in[0,1]}|V(\xi, F = 4.4877)| = 2.44$, а $\max\limits_{\xi\in[0,1]}|W(\xi, F = 4.271)| = 45.174$, $\max\limits_{\xi\in[0,1]}|V(\xi, F = 4.271)| = 2.476$. На фиг. 4 изображены линии тока в слое для F_1 и F_2. Видно, что течение, отвечающее параметру Z_1, наиболее интенсивно. В обоих случаях более интенсивное движение формируется вблизи свободной границы $\xi = 1$.

В случае теплоизолированной свободной границы ($\mathrm{Bi} = 0$) получено одно значение безразмерной постоянной $F = 3.97$. Это решение при малых числах Марангони также стремится к единственному решению линейной задачи (2.6). На фиг. 5 изображены профиль функции $A(\xi)$ и линии тока в слое. Поскольку $A(1) < 0$, то жидкость вблизи свободной границы течет в направлении оси x. Видно, что наиболее интенсивное течение формируется вблизи $\xi = 1$, т.е. свободной границы.

Стоит также сказать о влиянии безразмерных параметров на интенсивность возникающих течений: с ростом числа Марангони M скорость движения увеличивается, а с увеличением числа Прандтля Pr – уменьшается.

Замечание 2. Для оценки точности полученных решений можно использовать следующие равенства:

$$
\begin{gathered}
W(1)W'(1) - \int_0^1 (W')^2 d\xi - \frac{3}{2\mathrm{Pr}} \int_0^1 W^3 d\xi = 0 \\
\mathrm{Pr}\left[W'(0) - W'(1)\right] + 2\int_0^1 W^2 d\xi - F = 0
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

Первое равенство в (3.1) следует из умножения уравнения (2.2) на $W(\xi)$ и интегрирования по $\xi \in [0,1]$, с учетом первого условия (2.4) и интегрального условия (2.5), а второе – интегрирования уравнения (2.2) по области определения. Так, подставляя решения, полученные для всех рассмотренных выше случаев в равенства (3.1), устанавливается их выполнение с точностью до порядка 10^{-10} и 10^{-50} соответственно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучена задача о двумерном стационарном течении жидкости в плоском канале со свободной границей, вдоль которой поверхностное натяжение линейно зависит от температуры, а на дне поддерживается заданное распределение температуры. Установлена неединственность решения этой задачи: для $\mathrm{Bi} \neq 0$ найдено три различных решения, а для $\mathrm{Bi} = 0$ – одно. Все найденные решения при малых числах Марангони стремятся к единственному нетривиальному решению линейной задачи, описывающей ползущее движение жидкости в открытом канале. Для каждого из решения построены характерные структуры течения.

Автор благодарит В.К. Андреева за обсуждение результатов работы.

Работа выполнена при поддержке проекта РФФИ № 17-01-00229.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гупало Ю.П., Рязанцев Ю.С.* О термокапиллярном движении жидкости со свободной поверхностью при нелинейной зависимости поверхностного натяжения от температуры // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 5. С. 132–137.

2. *Legros J.C., Limbourg-Foutaine M.C., Petre G.* Influence of a surface tension minimum as a function of temperature on the Marangoni convection // Acta Astrounat. 1984. V. 11. № 2. P. 143–147.

3. *Бобков Н.Н., Гупало Ю.П.* Структура течения в жидком слое и спектр краевой задачи при нелинейной зависимости поверхностного натяжения от температуры // Прикладная математика и механика. Т. 60. Вып. 6. 1996. С. 1021–1028.

4. *Гупало Ю.П., Рязанцев Ю.С., Скворцова А.В.* Влияние термокапиллярных сил на движение жидкости со свободной поверхностью // Механика жидкости и газа. 1989. № 5. С. 3–7.

5. *Hiemenz K.* Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder. Dinglers Poliytech. J. 1911. V. 326. P. 321–440.

6. *Андреев В.К., Захватаев В.Е., Рябицкий Е.А.* Термокапиллярная неустойчивость. Новосибирск: Наука, 2000. 279 с.

7. *Зейтунян Р.Х.* Проблема термокапиллярной неустойчивости Бенара–Марангони // УФН. 1998. Т. 168. № 3. С. 259–286.

8. *Andreev V.K.* Influence of the Interfacial Internal Energy on the Thermocapillary Steady Flow // J. Siberian Federal Univ. Mathematics & Physics. 2017. V. 10. № 4. P. 537–547.

9. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988. 352 с.

10. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 1962. 500 с.