

УДК 532.546

## ЗАДАЧА ФИЛЬТРАЦИИ СУСПЕНЗИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С ОСАДКОМ

© 2019 г. Ю. П. Галагуз<sup>a,\*</sup>, Л. И. Кузьмина<sup>b,\*\*</sup>, Ю. В. Осипов<sup>a,\*\*\*</sup>

<sup>a</sup>Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,  
Москва, Россия

<sup>b</sup>Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики,”  
Москва, Россия

\* e-mail: yuri.galaguz@gmail.com

\*\* e-mail: lkuzmina@hse.ru

\*\*\* e-mail: yuri-osipov@mail.ru

Поступила в редакцию 26.03.2018 г.

После доработки 14.06.2018 г.

Принята к публикации 20.06.2018 г.

Рассматривается макроскопическая модель долговременной глубинной фильтрации монодисперсной суспензии в пористой среде с механико-геометрическим механизмом захвата взвешенных частиц при отсутствии мобилизации осажденных частиц. Предполагается, что доступность пор и фракционный поток частиц зависят от концентрации осадка, и в начальный момент пористая среда содержит неравномерно распределенный осадок. Результатом работы является нахождение аналитического решения вблизи подвижной криволинейной границы – фронта концентрации взвешенных частиц суспензии. Доказана знакоопределенность решения. Точное решение задачи фильтрации на криволинейной границе найдено в явном виде. Получено достаточное условие существования решения на фронте концентрации. В окрестности границы построено асимптотическое решение. Временной интервал применимости асимптотики определяется на основе численного расчета задачи.

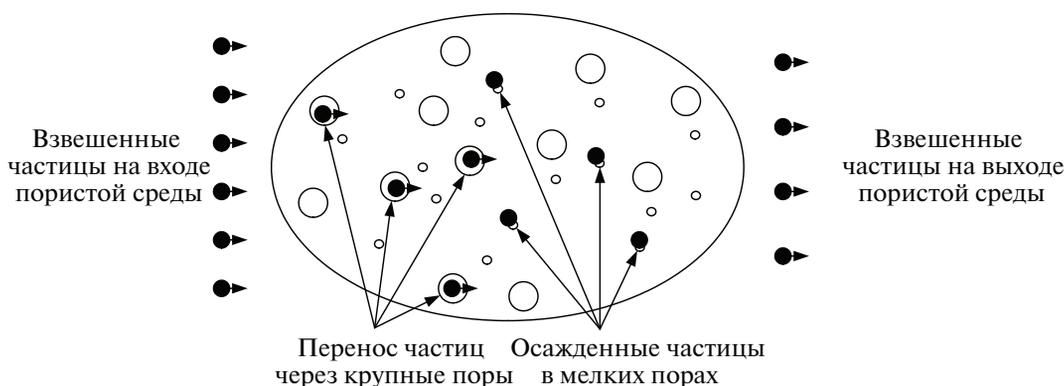
*Ключевые слова:* фильтрация, пористая среда, взвешенные и осажденные частицы, фронт концентрации, аналитическое решение

DOI: 10.1134/S0568528119010067

Исследование фильтрации суспензии в пористой среде является важной задачей для многих областей науки и техники. Процесс фильтрации сопровождается образованием осадка в порах, меняющим структуру и свойства пористой среды [1]. Это приводит к снижению производительности скважин при добыче нефти и газа, загрязнению промышленных фильтров, ухудшению качества очистки питьевой воды и сточных вод, переносу бактерий и вирусов в водоносных горизонтах, засолению почвенного слоя [2–7].

При переносе частиц потоком жидкости некоторые частицы осаждаются на каркасе пористой среды. В зависимости от свойств суспензии и пористой среды существенную роль в захвате частиц могут играть механическое взаимодействие, диффузия, вязкость, электростатические и гравитационные силы [8–11]. Если размеры частиц и пор одного порядка, то во многих случаях превалирует механико-геометрический механизм захвата частиц: твердые частицы свободно проходят через поры большого диаметра и застревают в порах, диаметр которых меньше размера частиц [12]. Сложная топология пористых каналов и переменные размеры отверстий пор приводят к тому, что частицы могут быть захвачены в местах сужения пор вдали от входа фильтра. При долговременной глубинной фильтрации осадок образуется во всей пористой среде, а не только в ее поверхностном слое [13–15]. При впрыске в пористую среду суспензии с взвешенными частицами постоянной концентрации некоторые частицы переносятся потоком жидкости и выходят из пористой среды, другие застревают в узких порах и образуют осадок (фиг. 1).

Традиционная математическая модель, описывающая одномерную фильтрацию несжимаемой монодисперсной суспензии в пористой среде с геометрическим механизмом захвата частиц, связывает концентрации взвешенных и осажденных частиц системой двух уравнений в частных



Фиг. 1. Сечение пористой среды с взвешенными и осажденными частицами

производных. Уравнение баланса масс взвешенных и осажденных частиц является аналогом уравнения непрерывности; кинетическое уравнение определяет рост концентрации осадка [16]. Более сложные модели фильтрации для частиц и пор различных размеров, построенные на основе баланса взвешенных и осажденных частиц, описаны в [17–22].

Точные решения задачи фильтрации с порами, полностью доступными для взвешенных частиц, получены в [23, 24]; в этом случае характеристики системы являются прямыми линиями.

Введение функции доступности пор и коэффициента уменьшения потока частиц (фракционный поток) приводит к криволинейным характеристикам. Точные решения становятся намного сложнее [25, 26]. Асимптотические решения, использующие в качестве малого параметра расстояние до фронта концентраций, охватывают временные диапазоны процессов фильтрации, встречающиеся в лабораторных и полевых исследованиях [18].

Модели фильтрации с чистым пористым каркасом предполагают, что в начальный момент в пористой среде отсутствуют взвешенные и осажденные частицы [23–26]. В настоящей работе рассматривается более общий случай: пористая среда содержит осадок и чистую воду перед началом фильтрации. Изучаемая модель описывает фильтрацию суспензии при смене потока суспензии и обратного потока чистой воды. Осадок накапливается в пористой среде при фильтрации прямого потока суспензии. При обратной прокачке воды происходят мобилизация и вымывание осажденных частиц. Такие задачи возникают в нефтедобывающей промышленности и при эксплуатации промышленных фильтров [4, 6, 27, 28].

Ниже предполагается, что при вытеснении суспензии чистой водой, движущейся в обратном направлении, происходит неполная мобилизация частиц, и осадок частично сохраняется в пористой среде. Неравномерно распределенный начальный осадок влияет на процесс фильтрации при впрыске суспензии в пористую среду. Численное решение задачи с осадком получено в [29]. Однако аналитические решения этой задачи отсутствуют.

В настоящей работе рассматривается фильтрация суспензии, вытесняющей чистую воду из пористой среды с первоначальным осадком. Подвижная граница является фронтом концентрации взвешенных частиц суспензии. Зависимость начального осадка от координаты в модели, учитывающей зависимость пористости и фракционного потока от накопленного осадка, влечет криволинейность границы. В статье получено точное решение задачи на фронте концентрации для начального осадка, неравномерно распределенного в пористой среде. Вблизи фронта концентраций строится асимптотическое решение, главный член которого совпадает с точным решением на фронте. Аналогичное решение задачи без начального осадка с прямолинейной границей получено в [18], асимптотика при малом осадке построена в [30].

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ. ОБЩИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ

Модель предполагает незначительную диффузию/дисперсию. Небольшие концентрации взвешенных и удерживаемых частиц не влияют на объемный баланс общего потока [16, 17, 28]. Большие концентрации частиц подчиняются закону Амагата аддитивности удельных объемов при перемешивании (см. [17, 28]):

$$\rho(c) = c\rho_r + (1 - c)\rho_w$$

где  $\rho$ ,  $\rho_w$ ,  $\rho_r$  – плотности рассола, воды и породы соответственно. Компоненты породы и растворителя несжимаемы, а значит  $\rho_w$  и  $\rho_r$  являются постоянными.

Уравнение фильтрации применимо к захвату частиц в горловинах малых пор и удержанию мелких частиц [3–5, 7–11, 13–16]. Модель использует только размерный механизм захвата отдельных частиц и исключает образование сводовых перемычек на входе больших пор. Скорость образования осадка пропорциональна адвективному потоку частиц. Предполагается, что осажденные частицы не отрываются от каркаса пористой среды. Другие допущения включают несжимаемость любого компонента суспензии – взвешенных и осажденных частиц, а также воды. Жидкость, переносящая частицы, является ньютоновской.

Предполагается, что поток однофазный, впрыскиваемая в пористую среду суспензия содержит ту же воду, что и пластовая вода, которая сначала насыщает породу. Рассматривается линейный одномерный поток суспензии, соответствующий лабораторным исследованиям или впрыскам рассола в разорванные скважины.

Из приведенных выше предположений следует система уравнений долговременной глубокой фильтрации, состоящая из уравнения баланса концентраций взвешенных частиц  $c$  и осажденных частиц  $\sigma$ , кинетического уравнения роста осадка и закона Дарси

$$\frac{\partial(\phi_a(\sigma)c)}{\partial T} + U \frac{\partial(f_a(\sigma)c)}{\partial X} + \frac{\partial\sigma}{\partial T} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial T} = \frac{1}{l} f_a(\sigma) f_n(\sigma) U c \quad (1.2)$$

$$U = -\frac{k(\sigma)}{\mu} \frac{\partial P}{\partial X} \quad (1.3)$$

Здесь  $\phi_a$  – допустимая пористость;  $f_a$  – фракционный поток через допустимые поры;  $f_n = 1 - f_a$  – фракционный поток жидкости через недопустимые поры;  $l$  – характерная микродлина пористой среды;  $U$  – скорость потока;  $k$  – коэффициент проницаемости;  $\mu$  – динамическая вязкость;  $P$  – давление; область интегрирования  $\{(X, T): 0 < X < L, T > 0\}$ ,  $L$  – протяженность пористой среды.

Подробный вывод макроскопической системы (1.1)–(1.3) из уравнений микроуровня приведен в [13–15 и 17]. В работах [1, 3–5, 7–9, 11, 16] представлен феноменологический вывод этой системы.

Ниже решается задача с заданной и постоянной скоростью впрыска  $U$ . Из-за несжимаемости общего потока  $U(X, T) = \text{const}$ . В этом случае уравнения (1.1), (1.2) образуют замкнутую систему.

Введем безразмерные переменные

$$x = \frac{X}{L}, \quad t = \frac{UT}{\phi L}, \quad C = \frac{c}{c^0}, \quad S = \frac{\sigma}{\phi c^0}, \quad g(S) = \frac{\phi_a(\phi c^0 S)}{\phi},$$

$$f(S) = f_a(\phi c^0 S), \quad \Lambda(S) = \frac{L}{l} f_a f_n(\phi c^0 S)$$

где  $\phi$  – пористость,  $c^0$  – концентрация взвешенных частиц впрыскиваемой суспензии.

Уравнения (1.1), (1.2) принимают вид

$$\frac{\partial(g(S)C)}{\partial t} + \frac{\partial(f(S)C)}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \Lambda(S)C \quad (1.5)$$

Здесь  $C(x, t)$ ,  $S(x, t)$  – безразмерные концентрации взвешенных и осажденных частиц; коэффициент допустимой пористости  $g(S)$ , допустимый фракционный поток  $f(S)$  и коэффициент фильтрации  $\Lambda(S)$  – заданные положительные непрерывные дифференцируемые функции.

Предполагается, что на вход фильтра  $x = 0$  поступает суспензия с постоянной концентрацией взвешенных частиц; в начальный момент  $t = 0$  в пористой среде отсутствуют взвешенные частицы и имеется осадок  $s_0(x)$ , неравномерно распределенный по фильтру. Соответствующие начальные и краевые условия имеют вид

$$C|_{x=0} = 1 \quad (1.6)$$

$$C|_{t=0} = 0 \tag{1.7}$$

$$S|_{t=0} = s_0(x) \tag{1.8}$$

где  $s_0(x)$  – неотрицательная непрерывная дифференцируемая функция.

Условия (1.6)–(1.8) определяют единственное решение задачи в области  $\Omega = \{(x, t): 0 < x < 1, t > 0\}$ . Решение имеет разрыв, поскольку условия (1.6) и (1.7) не согласованы в нуле. Ниже показано, что линия разрыва  $\Gamma$  задана уравнением

$$t_\Gamma(x) = \int_0^x \frac{g(s_0(x))}{f(s_0(x))} dx \tag{1.9}$$

Кривая  $\Gamma$  делит область  $\Omega$  на две подобласти

$$\Omega_0 = \{(x, t): 0 < x < 1, 0 < t < t_\Gamma(x)\}, \quad \Omega_S = \{(x, t): 0 < x < 1, t > t_\Gamma(x)\}$$

Фильтрация суспензии происходит в области  $\Omega_S$ ; в области  $\Omega_0$  взвешенные частицы отсутствуют, а концентрация осажденных частиц не зависит от времени. Фронт концентрации взвешенных частиц распространяется в пористой среде вдоль линии  $\Gamma$  со скоростью

$$v = \frac{f(s_0(x))}{g(s_0(x))} \tag{1.10}$$

**Теорема 1.** Решение задачи (1.4)–(1.8)

а) постоянно в области  $\Omega_0$ :  $C(x, t)|_{(x,t) \in \Omega_0} = 0$ ,  $S(x, t)|_{(x,t) \in \Omega_0} = s_0(x)$ ,

б) положительно в области  $\Omega_S$ :  $C(x, t)|_{(x,t) \in \Omega_S} > 0$ ,  $S(x, t)|_{(x,t) \in \Omega_S} > s_0(x)$ .

*Доказательство.* Используя (1.5), запишем уравнение (1.4) в виде

$$g(S) \frac{\partial C}{\partial t} + f(S) \frac{\partial C}{\partial x} + g'(S) \frac{\partial S}{\partial t} C + f'(S) \frac{\partial S}{\partial x} C + \Lambda(S)C = 0 \tag{1.11}$$

Определим характеристическую систему, отвечающую уравнению (1.11)

$$\dot{t} = g(S), \quad \dot{x} = f(S) \tag{1.12}$$

$$\dot{C} + \left( g'(S) \frac{\partial S}{\partial t} + f'(S) \frac{\partial S}{\partial x} + \Lambda(S) \right) C = 0 \tag{1.13}$$

где точка означает дифференцирование по параметру  $\tau$  вдоль характеристики.

Рассмотрим два семейства характеристик  $t(\tau)$ ,  $x(\tau)$ ,  $C(\tau)$ . В области  $\Omega_0$  (перед фронтом концентрации) характеристики выходят из точек  $(x_0, 0)$  на оси координат  $OX$ . Зададим для системы (1.12), (1.13) начальные условия

$$t(0) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad C(0) = 0 \tag{1.14}$$

В области  $\Omega_S$  (за фронтом концентрации) характеристики выходят из точек  $(0, t_0)$  на оси времени. Зададим условия

$$t(0) = t_0, \quad x(0) = 0, \quad C(0) = 1 \tag{1.15}$$

а) В области  $\Omega_0$  уравнение (1.13) с условием (1.14) имеет решение  $C(\tau) = 0$ . Тогда из уравнения (1.5) следует  $\partial S / \partial t = 0$  и  $S(x, t) = s_0(x)$ . На плоскости  $(x, t)$  уравнения (1.12) с условиями (1.14) определяют характеристики

$$t = \int_0^\tau g(s_0(x)) d\tau = \int_{x_0}^x \frac{g(s_0(x))}{f(s_0(x))} dx \tag{1.16}$$

Границей области  $\Omega_0$  является характеристика (1.16) при  $x_0 = 0$ , совпадающая с линией  $\Gamma$ , заданной соотношением (1.9).

б) В области  $\Omega_S$  представим решение задачи (1.13), (1.15) в виде

$$C = e^{-\int_0^\tau (g'(S) \partial S / \partial t + f'(S) \partial S / \partial x + \Lambda(S)) d\tau} \tag{1.17}$$

Из (1.17) следует неравенство  $C(\tau) > 0$ . Тогда из уравнения (1.5) получаем

$$\frac{\partial S}{\partial t} > 0 \quad (1.18)$$

и  $S(x, t) > s_0(x)$ . Теорема 1 доказана.

Покажем, что система уравнений в частных производных (1.4), (1.5) сводится к квазилинейному дифференциальному уравнению первого порядка относительно концентрации осадка  $S(x, t)$ .

Выразим  $C(x, t)$  из уравнения (1.5)

$$C = \frac{\partial S / \partial t}{\Lambda(S)} \quad (1.19)$$

и подставим в уравнение (1.4)

$$\frac{\partial \left( \frac{g(S) \frac{\partial S / \partial t}{\Lambda(S)}}{\partial t} \right) + \frac{\partial \left( \frac{f(S) \frac{\partial S / \partial t}{\Lambda(S)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (1.20)$$

Обозначим

$$a(S) = \frac{g(S)}{\Lambda(S)}; \quad b(S) = \frac{f(S)}{\Lambda(S)}$$

Имеем

$$\frac{\partial (b(S) \partial S / \partial t)}{\partial x} = b'(S) \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial t} + b(S) \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial x} = \frac{\partial (b(S) \partial S / \partial x)}{\partial t} \quad (1.21)$$

Подставляем (1.21) в уравнение (1.20)

$$\frac{\partial (a(S) \partial S / \partial t)}{\partial t} + \frac{\partial (b(S) \partial S / \partial x)}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (1.22)$$

Интегрируем обе части уравнения (1.22) по переменной  $t$

$$a(S) \frac{\partial S}{\partial t} + b(S) \frac{\partial S}{\partial x} + S = K(x) \quad (1.23)$$

Определим константу интегрирования  $K(x)$  при  $t = 0$  из условий (1.7), (1.8). Находим

$$K(x) = b(s_0) s_0' + s_0 \quad (1.24)$$

Используя (1.24), запишем уравнение (1.23) в виде

$$a(S) \frac{\partial S}{\partial t} + b(S) \frac{\partial S}{\partial x} + (S - s_0 - b(s_0) s_0') = 0 \quad (1.25)$$

Для единственности решения уравнения (1.25) требуется задать условие при  $x = 0$ . Из условия (1.6) следует, что при  $x = 0$  уравнение (1.5) принимает вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \Lambda(S) \quad (1.26)$$

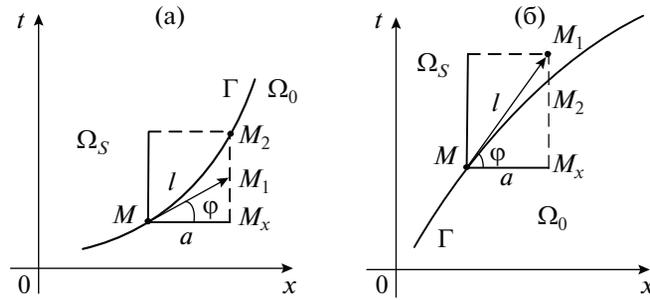
Делим обе части уравнения (1.26) на  $\Lambda(S)$  и интегрируем по переменной  $t$  на промежутке  $[0; t]$  с начальным условием (1.8). Получаем

$$\int_{s_0(0)}^{s^{(0)}(t)} \frac{dS}{\Lambda(S)} = t; \quad S^{(0)}(t) = S(x, t)|_{x=0} \quad (1.27)$$

Таким образом, концентрация осадка  $S(x, t)$  удовлетворяет уравнению (1.25) с условием (1.27).

**Следствие 1 из теоремы 1.** Пусть  $s_0'(x) \leq 0$ . Тогда в области  $\Omega_S$

$$\frac{\partial S}{\partial x} < 0 \quad (1.28)$$



Фиг. 2. Выпуклость границы  $\Gamma$  вниз (а) и вверх (б)

*Доказательство.* Рассмотрим слагаемые в левой части уравнения (1.25). Согласно теореме 1 и неравенству (1.18) в области  $\Omega_S$  выражения  $a(S) \frac{\partial S}{\partial t}$  и  $S - s_0$  положительны. Поскольку  $s'_0(x) \leq 0$ , то из уравнения (1.25) следует неравенство (1.28). Следствие 1 доказано.

Согласно *следствию 1* концентрация осадка убывает при увеличении координаты  $x$ , если начальный осадок  $s_0(x)$  не возрастает по  $x$ .

Ниже будем рассматривать задачу (1.4)–(1.8) на границе  $\Gamma$  и в ее окрестности в области  $\Omega_S$ .

## 2. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ НА ФРОНТЕ КОНЦЕНТРАЦИИ

Определим концентрацию взвешенных частиц на фронте  $\Gamma$ . С этой целью выразим значение частной производной  $\partial S / \partial x$  на  $\Gamma$ . Отметим, что предельное значение  $\partial S / \partial x|_{\Gamma}$  при  $(x, t) \in \Omega_S$  не равно  $s'_0(x)$ , поскольку производные функции  $S(x, t)$  имеют разрыв на границе.

**Утверждение 1.** В области  $\Omega_S$  решение  $S(x, t)$  задачи (1.4)–(1.8) удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial S}{\partial x}|_{\Gamma} = s'_0(x) - \frac{g(s_0(x))}{f(s_0(x))} \frac{\partial S}{\partial t} \quad (2.1)$$

*Доказательство.* Пусть  $l$  – касательный вектор к кривой  $\Gamma$  в некоторой точке  $M(x, t)$ . Частная производная функции  $S(x, t)$  по направлению  $l$  равна

$$\frac{\partial S}{\partial l} = \frac{\partial S}{\partial t} \sin \varphi + \frac{\partial S}{\partial x} \cos \varphi \quad (2.2)$$

где  $\varphi$  – угол между вектором  $l$  и осью  $Ox$  (фиг. 2).

С другой стороны, по определению

$$\frac{\partial S}{\partial l} = \lim_{\substack{M_1 \rightarrow M \\ MM_1 \in l}} \frac{S(M_1) - S(M)}{|M_1 M|} \quad (2.3)$$

Обозначим  $a = |MM_x| = |MM_1| \cos \varphi$ . Если на интервале  $(x, x + a)$  линия границы  $\Gamma$  выпукла вниз, то точка  $M_1(x + a, t + \Delta t) \in \Omega_0$  (фиг. 2,а). Поскольку в области  $\Omega_0$  концентрация  $S(x, t) = s_0(x)$ , то

$$S(M_1) = s_0(x + a) \quad (2.4)$$

Если на интервале  $(x, x + a)$  линия границы  $\Gamma$  выпукла вверх, то точка  $M_1 \in \Omega_S$  (фиг. 2,б) и по определению касательной  $|M_1 M_2| = o(a)$ . (Функция  $\beta = o(a)$ , если  $\lim_{a \rightarrow 0} \beta/a = 0$ ).

Из уравнения (1.5) следует, что производная  $\partial S / \partial t$  непрерывна, и справедлива оценка

$$S(M_1) = S(M_2) + o(a) = s_0(x + a) + o(a) \quad (2.5)$$

Подставляя (2.4) и (2.5) в предел (2.3), получаем в обоих случаях

$$\frac{\partial S}{\partial l} = s'_0(x) \cos \varphi \quad (2.6)$$

Приравниваем (2.2) и (2.6), и выражаем производную  $\partial S / \partial x$

$$\left. \frac{\partial S}{\partial x} \right|_{\Gamma} = s_0'(x) - \frac{\partial S}{\partial t} \operatorname{tg} \varphi \quad (2.7)$$

Из (1.9) имеем

$$\operatorname{tg} \varphi = \left. \frac{dt}{dx} \right|_{\Gamma} = \frac{g(s_0(x))}{f(s_0(x))} \quad (2.8)$$

Утверждение 1 следует из формул (2.7), (2.8).

**Теорема 2.** Концентрация взвешенных частиц на фронте концентраций  $\Gamma$  имеет вид

$$C(x, t) \Big|_{t=t_{\Gamma}(x)} = \frac{u(x)}{1 + v(x)} \quad (2.9)$$

где

$$u(x) = \frac{f(s_0(0))}{f(s_0(x))} e^{-\int_0^x \frac{\Lambda(s_0(z))}{f(s_0(z))} dz}; \quad v(x) = \int_0^x \left( \frac{g(s_0(y))}{f(s_0(y))} \right)' \Lambda(s_0(y)) u(y) dy \quad (2.10)$$

*Доказательство.* Используя (2.1), (1.5), представим уравнение (1.11) на границе  $\Gamma$  в виде

$$g(s_0) \frac{\partial C}{\partial t} + f(s_0) \frac{\partial C}{\partial x} + (f'(s_0) s_0'(x) + \Lambda(s_0)) C + \left( g'(s_0) - f'(s_0) \frac{g(s_0)}{f(s_0)} \right) \Lambda(s_0) C^2 = 0 \quad (2.11)$$

Замена  $\tau = t - t_{\Gamma}(x)$ ,  $x = x$  сводит (2.11) к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$f(s_0) \frac{\partial C}{\partial x} + (f'(s_0) s_0'(x) + \Lambda(s_0)) C + \left( g'(s_0) - f'(s_0) \frac{g(s_0)}{f(s_0)} \right) \Lambda(s_0) C^2 = 0 \quad (2.12)$$

Формулы (2.9), (2.10) задают решение уравнения Бернулли (2.12) с условием (1.6). Теорема 2 доказана.

**Следствие 2.** Достаточное условие существования решения на фронте концентрации

$$\left. \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{g(S)}{f(S)} \right) \right|_{S=s_0(x)} \geq 0 \quad (2.13)$$

или

$$\left. \frac{\partial v}{\partial S} \right|_{S=s_0(x)} \leq 0 \quad (2.14)$$

*Доказательство.* Знаменатель решения (2.9) не должен обращаться в ноль. Поскольку функции  $\Lambda(s_0(y))$  и  $u(y)$  положительны, условие (2.13) обеспечивает положительность знаменателя (2.9). Согласно (1.10) неравенство (2.14) следует из (2.13).

### 3. АСИМПТОТИКА ВБЛИЗИ ФРОНТА КОНЦЕНТРАЦИЙ

Пусть коэффициенты системы (1.4), (1.5) допускают разложения по формуле Тейлора с коэффициентами, зависящими от  $x$

$$\begin{aligned} g(S) &= g_0 + g_1(S - s_0) + \frac{g_2}{2}(S - s_0)^2 + \frac{g_3}{6}(S - s_0)^3 + O(S - s_0)^4 \\ f(S) &= f_0 + f_1(S - s_0) + \frac{f_2}{2}(S - s_0)^2 + \frac{f_3}{6}(S - s_0)^3 + O(S - s_0)^4 \\ \Lambda(S) &= \Lambda_0 + \Lambda_1(S - s_0) + \frac{\Lambda_2}{2}(S - s_0)^2 + O(S - s_0)^3 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь индекс 0 означает значение функции при  $S = s_0(x)$ , ненулевой индекс  $j$  — соответствующая производная порядка  $j$  при  $S = s_0(x)$ .

В области  $\Omega_S$  в окрестности фронта концентраций  $\Gamma$  будем искать асимптотическое решение в виде

$$S(x, t) = s_0(x) + \sum_{i=1}^n \frac{(t - t_\Gamma(x))^i}{i!} s_i(x) + O(t - t_\Gamma(x))^{n+1} \quad (3.2)$$

$$C(x, t) = c_0(x) + \sum_{i=1}^n \frac{(t - t_\Gamma(x))^i}{i!} c_i(x) + O(t - t_\Gamma(x))^{n+1} \quad (3.3)$$

Разложения (3.2), (3.3) позволяют представить решение системы двух уравнений в частных производных, зависящее от двух переменных, в виде рядов Тейлора по степеням малого параметра  $t - t_\Gamma(x)$ . Коэффициенты рядов  $c_i(x)$  зависят от одной переменной  $x$  и удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Асимптотика позволяет получить локальное решение в явном виде с требуемой точностью.

Подставим разложения (3.1)–(3.3) в уравнения (1.4), (1.5) и приравняем слагаемые при одинаковых степенях  $(t - t_\Gamma(x))$ . Для первых членов асимптотики получаем алгебраические соотношения

$$s_1 = \Lambda_0 c_0 \quad (3.4)$$

$$s_2 = \Lambda_0 c_1 + \Lambda_0 \Lambda_1 c_0^2 \quad (3.5)$$

$$s_3 = \Lambda_0 c_2 + 3\Lambda_0 \Lambda_1 c_0 c_1 + (\Lambda_2 \Lambda_0 + \Lambda_1^2) \Lambda_0 c_0^3$$

и рекуррентную систему дифференциальных уравнений

$$(f_0 c_0)' + \Lambda_0 c_0 + \beta \Lambda_0 c_0^2 = 0 \quad (3.6)$$

$$(f_0 c_1)' + \Lambda_0 (3\beta c_0 + 1) c_1 + (\beta \Lambda_1 + \gamma \Lambda_0) \Lambda_0 c_0^3 + (f_1 \Lambda_0 c_0^2)' + \Lambda_0 \Lambda_1 c_0^2 = 0 \quad (3.7)$$

$$(f_0 c_2)' + \Lambda_0 (4\beta c_0 + 1) c_2 + (f_2 \Lambda_0^2 c_0^3)' + (f_1 \Lambda_0 \Lambda_1 c_0^3)' + 3(f_1 \Lambda_0 c_0 c_1)' + (\Lambda_0 \Lambda_1^2 + \Lambda_0^2 \Lambda_2) c_0^3 + (\beta \Lambda_0^2 \Lambda_2 + \beta \Lambda_0 \Lambda_1^2 + 3\gamma \Lambda_0^2 \Lambda_1 + \delta \Lambda_0^3) c_0^4 + (3\Lambda_0 \Lambda_1 + 6\gamma \Lambda_0^2 c_0 + 6\beta \Lambda_0 \Lambda_1 c_0) c_0 c_1 + 3\beta \Lambda_0 c_1^2 = 0 \quad (3.8)$$

Здесь  $\alpha = g_0/f_0$ ,  $\beta = g_1 - \alpha f_1$ ,  $\gamma = g_2 - \alpha f_2$ ,  $\delta = g_3 - \alpha f_3$ .

Из (1.6) получаем условия для нахождения единственных решений обыкновенных дифференциальных уравнений (3.6)–(3.8)

$$\begin{aligned} c_0|_{x=0} &= 1 \\ c_1|_{x=0} &= 0; \quad c_2|_{x=0} = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Уравнения и начальные условия для следующих членов асимптотики строятся аналогично.

Уравнение (3.6) для главного члена асимптотики совпадает с уравнением (2.12) на фронте концентрации; решение задано формулами (2.9), (2.10).

*Пример 1.* Пусть  $g(S) = g_0 = 1, f(S) = f_0 = 1$ . Уравнение (3.6) принимает вид

$$f_0 c_0' + \Lambda_0 c_0 = 0 \quad (3.10)$$

Решение уравнения (3.10) при условии (3.9)

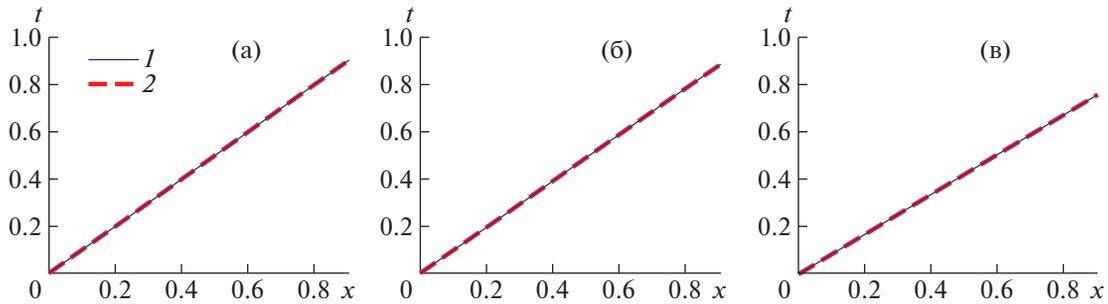
$$c_0 = \exp\left(-\int_0^x \Lambda(s_0(z)) dz\right)$$

При постоянном коэффициенте фильтрации  $\Lambda(S) = \Lambda_0 = \text{const}$  в области  $\Omega_S$  точное решение задачи (1.4)–(1.8) совпадает с главными членами асимптотики (3.2), (3.3)

$$C(x, t) = c_0 = e^{-\Lambda_0 x}; \quad S(x, t) = s_1(t - x) = \Lambda_0 e^{-\Lambda_0 x} (t - x)$$

2.  $s_0 = k = \text{const}$ . В этом случае коэффициенты разложений (3.1) не зависят от  $x$ . Решение уравнений (3.6), (3.7) имеет вид

$$c_0 = \frac{1}{(1 + \beta) e^{\Lambda_0/f_0 x} - \beta} \quad (3.11)$$



Фиг. 3. Фронты концентраций: а –  $r_1 = 1.5675$ ; б –  $r_2 = 2.179$ ; в –  $r_3 = 3.168$ ; 1 – численное решение; 2 – асимптотика

$$c_1 = \frac{(0.5\gamma\Lambda_0(1 + e^{\Lambda_0/f_0x}) + (1 + \beta)\sigma e^{\Lambda_0/f_0x})(1 - e^{\Lambda_0/f_0x})}{((1 + \beta)e^{\Lambda_0/f_0x} - \beta)^3} \quad (3.12)$$

Здесь  $\sigma = \Lambda_1 - 2f_1/f_0$ .

Члены асимптотики концентрации осадка  $s_1, s_2$  определяются из алгебраических уравнений (3.4), (3.5)

$$s_1 = \frac{\Lambda_0}{(1 + \beta)e^{\Lambda_0/f_0x} - \beta} \quad (3.13)$$

$$s_2 = \frac{\Lambda_0 \left( \frac{1}{2} \gamma \Lambda_0 (1 + e^{\Lambda_0/f_0x}) + (1 + \beta) \sigma e^{\Lambda_0/f_0x} \right) (1 - e^{\Lambda_0/f_0x})}{((1 + \beta)e^{\Lambda_0/f_0x} - \beta)^3} + \frac{\Lambda_0 \Lambda_1}{((1 + \beta)e^{\Lambda_0/f_0x} - \beta)^2} \quad (3.14)$$

Подставляя (3.11)–(3.14) в разложения (3.2), (3.3), находим асимптотическое решение вблизи фронта концентраций  $t = t_\Gamma(x)$

$$C(x, t) = \frac{1}{(1 + \beta)e^{\Lambda_0/f_0x} - \beta} + \frac{\left( \frac{1}{2} \gamma \Lambda_0 (1 + e^{\Lambda_0/f_0x}) + (1 + \beta) \sigma e^{\Lambda_0/f_0x} \right) (1 - e^{\Lambda_0/f_0x})}{((1 + \beta)e^{\Lambda_0/f_0x} - \beta)^3} (t - t_\Gamma(x)) + O(t - t_\Gamma(x))^2$$

$$S(x, t) = s_0(x) + \frac{\Lambda_0}{(1 + \beta)e^{\Lambda_0/f_0x} - \beta} (t - t_\Gamma(x)) +$$

$$+ \Lambda_0 \frac{\left( \frac{1}{2} \gamma \Lambda_0 (1 + e^{\Lambda_0/f_0x}) + (1 + \beta) \sigma e^{\Lambda_0/f_0x} \right) (1 - e^{\Lambda_0/f_0x}) + \Lambda_1 ((1 + \beta)e^{\Lambda_0/f_0x} - \beta)}{((1 + \beta)e^{\Lambda_0/f_0x} - \beta)^3} (t - t_\Gamma(x))^2 + O(t - t_\Gamma(x))^3$$

#### 4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Для расчетов использовались значения коэффициентов уравнений (1.4), (1.5) для частиц трех размеров, рассчитанные З. Ю на основе экспериментальных данных [18] – см. таблицу.

Численный расчет задачи выполнен методом конечных разностей по явной TVD-схеме с функцией-ограничителем *SUPERBEE* [31] для линейного распределения первоначального осадка

$$s_0(x) = (1 - 0.1x) \quad (4.1)$$

Соотношение между шагами по времени и координате для задачи с осадком выбирается из условия сходимости Куранта [29].

Графики фронтов концентраций частиц трех типов представлены на фиг. 3.

Вследствие малости коэффициентов при степенях  $S$  (см. табл. 1) все три рассчитанные линии (1) практически не отличаются от прямых (2), заданных формулой  $t = g(0)x/f(0)$ .

Таблица 1.

Радиус частицы, мк	Коэффициенты уравнений
$r_1 = 1.5675$	$g(S) = 0.9987 + 9.1 \times 10^{-13} S - 3.73 \times 10^{-8} S^2 + 6.1 \times 10^{-5} S^3$ $f(S) = 0.9999 + 1.8 \times 10^{-5} S - 2.05 \times 10^{-7} S^2 + 2.848 \times 10^{-4} S^3$ $\Lambda(S) = 0.11 - 0.01351 \cdot S + 4.49 \times 10^{-5} S^2 + 1.163 \times 10^{-3} S^3$
$r_2 = 2.179$	$g(S) = 0.9743 - 8.88 \times 10^{-14} S + 1.27 \times 10^{-11} S^2 - 1.24 \times 10^{-9} S^3$ $f(S) = 0.9947 + 6.27 \times 10^{-5} S - 2.9 \times 10^{-8} S^2 + 6.21 \times 10^{-10} S^3$ $\Lambda(S) = 0.51 - 5.956 \times 10^{-3} S + 2.29 \times 10^{-6} S^2 + 1.35 \times 10^{-8} S^3$
$r_3 = 3.168$	$g(S) = 0.7635 + 2.44 \times 10^{-15} S + 3.2 \times 10^{-14} S^2 + 3.6 \times 10^{-13} S^3$ $f(S) = 0.9075 + 2.315 \times 10^{-4} S + 2.27 \times 10^{-8} S^2 - 3.42 \times 10^{-8} S^3$ $\Lambda(S) = 1.551 - 3.467 \times 10^{-3} S - 1.16 \times 10^{-6} S^2 - 1.16 \times 10^{-7} S^3$

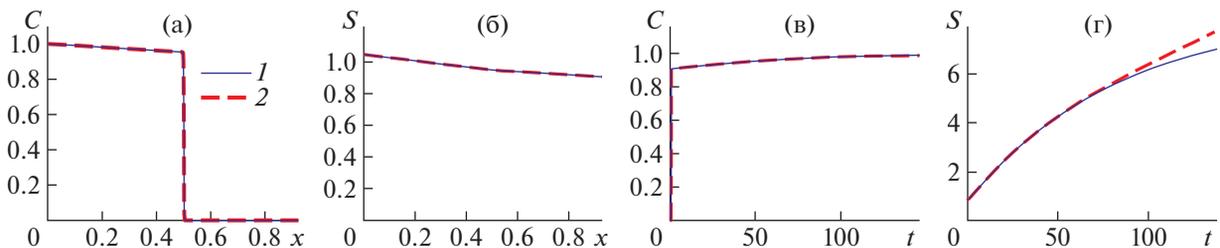
На фиг. 4–6 изображены графики зависимости концентраций взвешенных и осажденных частиц трех типов от координаты в момент времени  $t = 0.5$  и от времени на выходе из пористой среды при  $x = 1$ .

При  $t = 0.5$  графики асимптотики и численного решения практически совпадают.

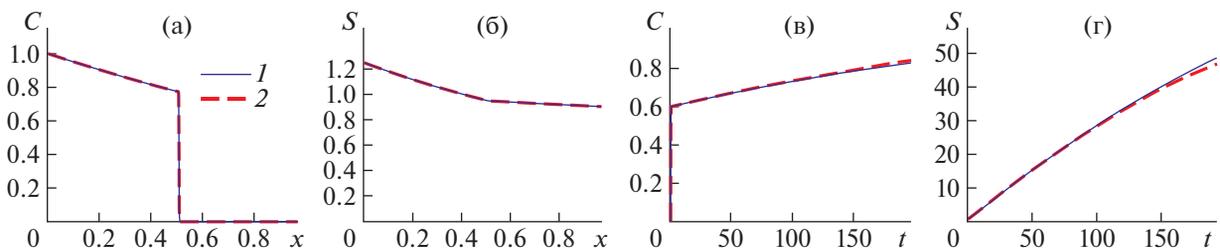
В момент времени  $t = 0.5$  на фронте концентраций  $\Gamma$  графики концентраций взвешенных частиц разрывны (фиг. 4–6,а), а графики концентраций осажденных частиц имеют излом (фиг. 4–6,б). Точки разрыва и излома определяются из соотношения (1.6) при  $t_1(x) = 0.5$  для начального осадка (4.1):  $x_1 = 0.50$ ,  $x_2 = 0.51$ ,  $x_3 = 0.59$  (см. также фиг. 3).

Графики концентраций при  $x = 1$  (фиг. 4–6,в–г) показывают временной интервал применимости асимптотики на выходе пористой среды. В зависимости от типа частиц асимптотика близка к численному решению на промежутках времени от 0 до 50–200.

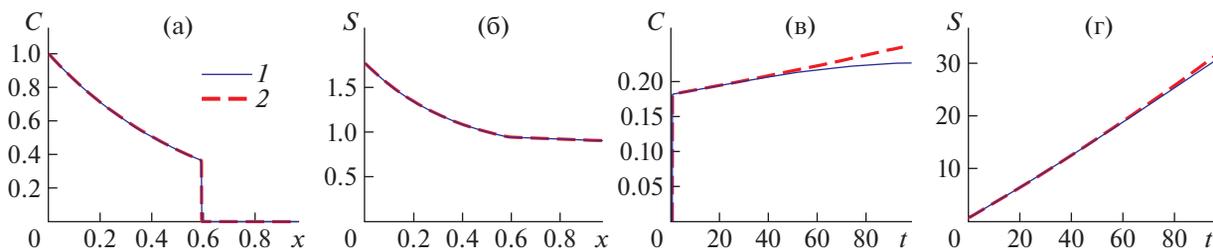
На фиг. 7 представлены трехмерные графики концентраций взвешенных и осажденных частиц (численное решение).



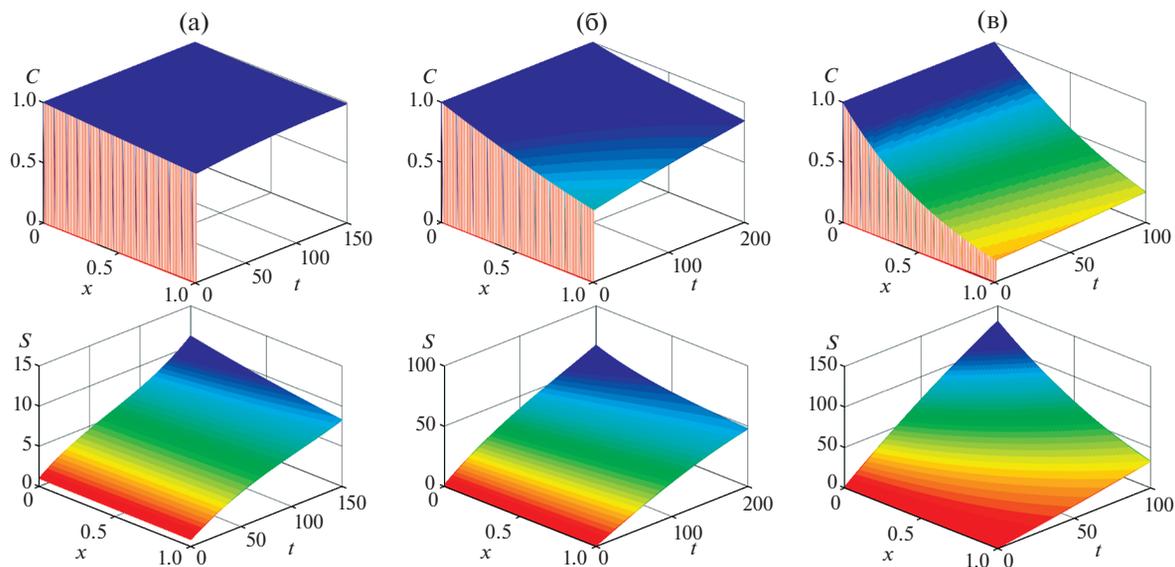
Фиг. 4. Частицы  $r_1 = 1.5675$ : (а)  $C(x,t)|_{t=0.5}$ ; (б)  $S(x,t)|_{t=0.5}$ ; в –  $C(x,t)|_{x=1}$ ; (г)  $S(x,t)|_{x=1}$ ; 1 – численное решение; 2 – асимптотика



Фиг. 5. Частицы  $r_2 = 2.179$ : (а)  $C(x,t)|_{t=0.5}$ ; (б)  $S(x,t)|_{t=0.5}$ ; (в)  $C(x,t)|_{x=1}$ ; (г)  $S(x,t)|_{x=1}$ ; 1 – численное решение; 2 – асимптотика



**Фиг. 6.** Частицы  $r_3 = 3.186$ : (а)  $C(x,t)|_{t=0.5}$ ; (б)  $S(x,t)|_{t=0.5}$ ; (в)  $C(x,t)|_{x=1}$ ; (г)  $S(x,t)|_{x=1}$ ; 1 – численное решение; 2 – асимптотика



**Фиг. 7.** Трехмерные графики  $C(x, t), S(x, t)$ : (а)  $r_1 = 1.5675$ ; (б)  $r_2 = 2.179$ ; (в)  $r_3 = 3.168$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена одномерная задача фильтрации монодисперсной суспензии в пористой среде. Несжимаемый ньютонов однофазный поток – вода с твердыми частицами, неподверженными молекулярной диффузии и физико-химическим силам взаимодействия с каркасом пористой среды, вытесняет чистую воду из пористой среды с неравномерно распределенным осадком. Рассматривается механико-геометрический механизм захвата взвешенных частиц при отсутствии мобилизации осажденных частиц. В отличие от стандартной модели предполагается, что доступность пор и фракционный поток твердых частиц изменяются при накоплении осадка. В этом случае граница  $\Gamma$  фронта концентрации взвешенных частиц является криволинейной.

Доказано, что решение задачи фильтрации удовлетворяет естественным физическим условиям: концентрация осажденных частиц постоянна по времени перед фронтом концентраций  $\Gamma$  и растет по времени за фронтом; концентрация взвешенных частиц равна нулю перед фронтом и положительна за фронтом концентрации.

Найдено точное решение задачи на криволинейной границе  $\Gamma$  двух фаз, задающее концентрацию взвешенных частиц суспензии на фронте концентрации. Получено достаточное условие существования решения на фронте концентрации.

Показано, что процесс фильтрации суспензии в пористой среде без начального осадка происходит более интенсивно вблизи входа; осадок распределяется неравномерно и является убывающей функцией координаты. Если предположить, что при обратной прокачке чистой воды неполная мобилизация осажденных частиц пропорциональна концентрации осадка, то сохранившийся осадок также убывает с ростом  $x$ . Задача описания периодической смены закачки суспензии и

обратного потока воды с учетом мобилизации частиц более сложна и должна быть изучена отдельно.

В окрестности границы  $\Gamma$  за фронтом концентрации построено асимптотическое решение, главный член которого совпадает с точным решением на границе. Численный расчет задачи показал близость асимптотики к численному решению. В зависимости от типа взвешенных частиц суспензии, на выходе пористой среды приемлемая точность асимптотического решения сохраняется до времени 50–200.

Точные и асимптотические решения задачи фильтрации задают в явном виде зависимость концентраций взвешенных и осажденных частиц от внешних параметров. Это позволяет предсказать результаты экспериментов и сократить объем лабораторных исследований, предназначенных для оптимизации процесса фильтрации [32].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Khilar K.C., Fogler H.S.* Migrations of fines in porous media. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998.
2. *Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M.* Theory of fluid flows through natural rocks. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1990.
3. *Mays D., Hunt J.* Hydrodynamic aspects of particle clogging in porous media // *Environ. Sci. Technol.* 2005. № 39. P. 577–584.
4. *Civan F.* Reservoir Formation Damage: Fundamentals, Modeling, Assessment, and Mitigation / 2nd Ed. Amsterdam.: Gulf Professional Publ., 2007.
5. *Gitis V., Rubinstein I., Livshits M., Ziskind G.* Deep-Bed Filtration Model with Multistage Deposition Kinetics // *Chem. Engineering J.* 2010. V. 163. № 1–2. P. 78–85.
6. *Noubactep C., Care S.* Dimensioning Metallic Iron Beds for Efficient Contaminant Removal // *Chem. Engineering J.* 2010. V. 163. № 3. P. 454–460.
7. *Gitis V., Dlugy C., Ziskind G., Sladkevich S., Lev O.* Fluorescent clays – similar transfer with sensitive detection // *Chem. Engineering J.* 2011. № 174. P. 482–488.
8. *Bradford S., Kim H., Haznedaroglu B., Torkzaban S., Walker S.* Coupled factors influencing concentration-dependent colloid transport and retention in saturated porous media // *Environ. Sci. Technol.* 2009. V. 43. P. 6996–7002.
9. *Mays D.C., Hunt J.R.* Hydrodynamic and chemical factors in clogging by montmorillonite in porous media // *Environmental Science and Technology.* 2007. V. 41. P. 5666–5671.
10. *Tien C., Ramarao B.V.* Granular Filtration of Aerosols and Hydrosols/2nd Ed. Amsterdam: Elsevier, 2007.
11. *Chrysikopoulos C.V., Syngouna V.I.* Effect of gravity on colloid transport through water-saturated columns packed with glass beads: Modeling and experiments // *Environmental Science and Technology.* 2014. V. 48. P. 6805–6813.
12. *Santos A., Bedrikovetsky P.* Size exclusion during particle suspension transport in porous media: stochastic and averaged equations // *Computational and Applied Mathematics.* Petrópolis May/Dec. 2004. V. 23. № 2–3. P. 259–284.
13. *Sharma M.M., Yortsos Y.C.* Transport of particulate suspensions in porous media: model formulation // *AIChE.* 1987. V. 33. P. 1636–1643.
14. *Sharma M.M., Yortsos Y.C.* Network model for deep bed filtration processes // *AIChE.* 1987. V. 33. P. 1644–1653.
15. *Sharma M.M., Yortsos Y.C.* Fines migration in porous media // *AIChE.* 1987. V. 33. P. 1654–1662.
16. *Herzig J.P., Leclerc D.M., Legoff P.* Flow of suspensions through porous media – application to deep filtration // *Industrial and Engineering Chemistry.* 1970. V. 62. P. 8–35.
17. *Bedrikovetsky P.* Upscaling of stochastic micro model for suspension transport in porous media // *Transp. Porous Media.* 2008. № 75. P. 335–369.
18. *You Z., Osipov Y., Bedrikovetsky P., Kuzmina L.* Asymptotic model for deep bed filtration // *Chem. Engineering J.* 2014. V. 258. P. 374–385.
19. *Леонтьев Н.Е.* Об описании течений слабосжимаемой жидкости в пористых средах при нелинейном законе фильтрации // *Изв. РАН. МЖГ.* 2013. № 3. С. 132–137.
20. *Kuzmina L.I., Osipov Yu.V., Galaguz Y.P.* A model of two-velocity particles transport in a porous medium // *Int. J. Non-linear Mechanics.* 2017. № 93. P. 1–6.
21. *Боронин С.А., Осипов А.А., Толмачева К.И.* Многоконтинуальная модель фильтрации суспензии в пористой среде // *Изв. РАН. МЖГ.* 2015. № 6. С. 50–62.
22. *Guedes R.G., Abduvani F.A.H., Bedrikovetsky P., Currie P.K.* Deep bed filtration under multiple particle-capture mechanisms, *SPE J.* 14 (3) (2009) ID: SPE-98623 PA.

23. *Vyazmina E.A., Bedrikovetskii P.G., Polyinin A.D.* New Classes of Exact Solutions to Nonlinear Sets of Equations in the Theory of Filtration and Convective Mass Transfer // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 2007. V. 41. № 5. P. 556–564.
24. *You Z., Badalyan A., Bedrikovetsky P.* Size-exclusion colloidal transport in porous media - stochastic modeling and experimental study // *SPE J.* 2013. № 18. P. 620–633.
25. *You Z., Bedrikovetsky P., Kuzmina L.* Exact Solution for Long-Term Size Exclusion Suspension-Colloidal Transport in Porous Media // *Abstract and Applied Analysis*, 2013, article ID 680693.
26. *Bedrikovetsky P., You Z., Badalyan A., Osipov Y., Kuzmina L.* Analytical model for straining-dominant large-retention depth filtration // *Chemical Engineering Journal*. 2017. V. 330. P. 1148–1159.
27. *Boronin S.A. et al.* Damage to formation surrounding flooding wells: modelling of suspension filtration with account of particle trapping and mobilization // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2017. V. 925. № 012009.
28. *Bedrikovetsky P.* Mathematical theory of oil and gas recovery (with applications to ex-USSR oil and gas fields) (V. 4). Springer Science & Business Media, 2013, 600 p.
29. *Галагуз Ю.П.* Реализация TVD-схемы численного решения задачи фильтрации // *Int. J. Computational Civil and Structural Engineering*, 2017. Т. 13(2). С. 93–102.
30. *Kuzmina L.I., Osipov Yu.V., Galaguz Y.P.* Numerical and asymptotic modeling of a filtration problem with the initial deposit // *Int. J. Comput. Civil and Structural Engineering*. 2017. Т. 13(3). С. 70–76.
31. *Toro E.F.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Dordrecht: Springer, 2009.
32. *Bedrikovetsky P.G., Marchesin D., Checaira F., Serra A.L., Resende E.* Characterization of deep bed filtration system from laboratory pressure drop measurements // *J. Petroleum Science and Engineering*. 2001. V. 32. № 3. P. 167–177.