ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2019, № 1, с. 44–57

УДК 532.62:532.546

АНАЛИЗ ГИСТЕРЕЗИСА ПЕРЕСТРОЙКИ КОНФИГУРАЦИИ МЫЛЬНОЙ ПЛЕНКИ НА ДВУХ КРУГЛЫХ РАМКАХ

© 2019 г. М. М. Алимов[a],*, К. Г. Корнев[b]

[a] *Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия*
[b] *Clemson University, Clemson, SC, USA*
** E-mail: Mars.Alimov@kpfu.ru*

Поступила в редакцию 12.03.2018 г.
После доработки 14.06.2018 г.
Принята к публикации 20.06.2018 г.

Представлены результаты анализа поведения минимальной поверхности на системе двух круглых соосных рамок разного радиуса в процессе увеличения – уменьшения расстояния между рамками. Подтверждено предположение о метастабильности некоторых конфигураций минимальной поверхности, позволяющее объяснить наблюдаемый в экспериментах гистерезис перестройки мыльной пленки из одной конфигурации в другую. Показана эффективность использования аналитических методов теории фильтрации аномальных жидкостей в задачах определения конфигурации минимальной поверхности на рамках.

Ключевые слова: минимальные поверхности, катеноид, устойчивость, комплексные переменные

DOI: 10.1134/S056852811901002X

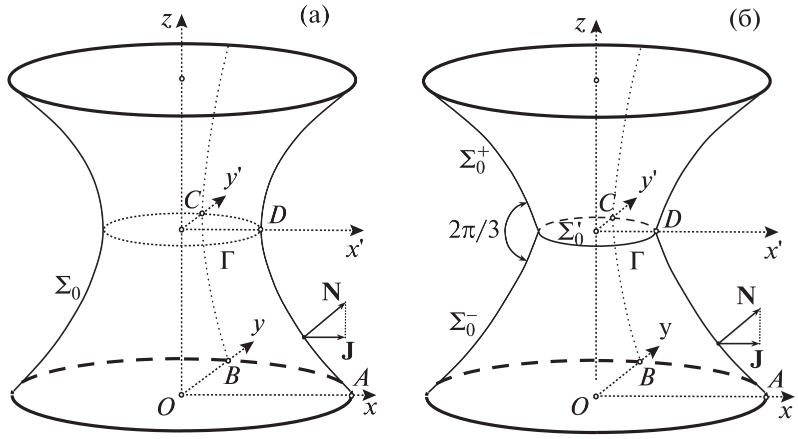
Пленки на различных рамках, извлеченных их мыльного раствора, представляют собой минимальные поверхности, конфигурация которых определяется условием минимума поверхностной энергии или, фактически, минимума площади поверхности [1]. Несмотря на прозрачный физический механизм, давнюю историю вопроса, начинающуюся с работы [2], и множества математических исследований по этому вопросу (см. [3–5] и библиографию в них), предсказать поведение пленок на рамках удается только в простейших случаях. В частности – это случай круглых, одинаковых и соосных рамок, когда минимальная поверхность представляет собой фигуру вращения, профиль которой – цепная линия. Такая минимальная поверхность называется катеноидом [4], ее полный анализ имеется, например, в [6].

Надо сказать, что даже в этом простейшем случае поведение минимальной поверхности нетривиально. Вместо регулярного катеноида, т.е. всюду гладкой поверхности с сужением – горловиной – в средней части, иногда наблюдаются катеноиды с плоской пленкой в его горловине. Такой катеноид будет уже сингулярным, поскольку представляет собой совокупность трех гладких сегментов, которые стыкуются по некоторой линии – сингулярному ребру минимальной поверхности [4].

Если же взять две круглые рамки разного радиуса, то пленка образует несимметричный катеноид – его горловина будет не в средней части. Как показали эксперименты, это приводит к неожиданным результатам в поведении пленки: при увеличении – уменьшении расстояния между рамками происходит перестройка регулярного несимметричного катеноида в сингулярный и обратно, и, более того, прямая и обратная перестройка происходят на различных расстояниях, т.е. имеет место гистерезис перестройки конфигурации [7].

Проводя аналогию между перестройкой минимальных поверхностей и фазовыми переходами, авторы [7] высказали предположение о метастабильности одной из возможных конфигураций пленки на такой системе рамок, что позволило им объяснить и сам гистерезис. Однако никаких оценок поверхностной энергии, отвечающей различным конфигурациям катеноида, в работе [7] проведено не было. Соответственно все объяснение носит гипотетический характер.

Настоящая работа преследует двоякую цель. Во-первых, объяснить экспериментальные результаты работы [7] путем проведения полного анализа поведения минимальной поверхности на системе двух круглых соосных рамок разного диаметра. Во-вторых, предложить новую схему



Фиг. 1. Симметричный регулярный катеноид Σ_0 (а) и симметричный сингулярный катеноид $\Sigma_0^+ \cup \Sigma_0^- \cup \Sigma_0'$, т.е. катеноид с плоской пленкой Σ_0' в его горловине (б)

анализа конфигураций минимальных поверхностей на рамках, использующую обнаруженную в работе [8] аналогию между теорией минимальных поверхностей и теории фильтрации аномальных жидкостей [9]. Примененная непосредственно к катеноиду такая схема анализа несколько сложнее классической [6], но обладает тем преимуществом, что легко может быть распространена на случай некруглых и негладких рамок.

Сначала разберем случай одинаковых круглых рамок и соответственно симметричного регулярного и сингулярного катеноида.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О СИММЕТРИЧНОМ КАТЕНОИДЕ

Радиус рамок выберем за характерную длину. Приняв обозначение R_{up} для радиуса верхней рамки и соответственно R_{dn} для радиуса нижней рамки, можно считать, что

$$R_{dn} = R_{up} = 1$$

Примем, что плоскости рамок горизонтальны, и плоскость нижней рамки — это плоскость x, y. Ось z, направленная по вертикали вверх, будет для рамок осью симметрии. На фиг. 1а, 1б схематически представлены регулярный катеноид — гладкая поверхность Σ_0, и соответственно сингулярный катеноид — совокупность гладких сегментов $\Sigma_0^+ \cup \Sigma_0^- \cup \Sigma_0'$, где Σ_0' — круглая плоская пленка в горловине катеноида.

Являясь фигурой вращения, симметричный катеноид обладает еще и симметрией относительно горизонтальной плоскости $x'y'$, проходящей через геометрический центр катеноида. Поэтому как для регулярного, так и для сингулярного катеноида достаточно восстановить конфигурацию элемента симметрии минимальной поверхности, например, ее сегмента $ABCDA$, см. фиг. 1а, 1б.

Конфигурация сегмента $ABCDA$ минимальной поверхности может быть задана функцией высоты точки (x, y, z) минимальной поверхности над уровнем плоскости xy

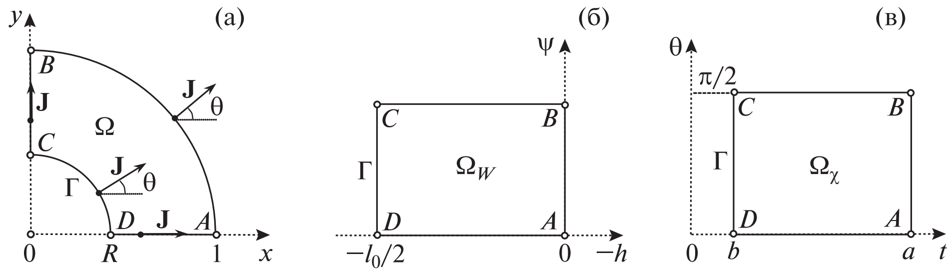
$$z = h(x, y)$$

Эта функция определена в области Ω, которая является проекцией элемента симметрии $ABCDA$ минимальной поверхности на плоскость xy, см. фиг. 2а.

Для нахождения функции $h(x, y)$ надо решить краевую задачу

$$\Omega: \ \nabla \cdot [(1 + |\nabla h|^2)^{-1/2} \nabla h] = 0, \tag{1.1}$$

$$AD: \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \tag{1.2}$$



Фиг. 2. Вид области течения в плоскости x, z (а), в плоскости комплексного потенциала W (б), и в плоскости годографа скорости χ (в) для симметричного катеноида

$$BC\colon\ \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \tag{1.3}$$

$$AB\colon\ h = 0 \tag{1.4}$$

$$\Gamma\colon\ h = \frac{l_0}{2}, \quad |\nabla h| \to \infty \tag{1.5}$$

или

$$\Gamma\colon\ h = \frac{l_0}{2}, \quad (1 + |\nabla h|^2)^{-1/2}\,|\nabla h| = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \tag{1.6}$$

Здесь (1.1) – дифференциальное уравнение минимальной поверхности [3], (1.2), (1.3) – условие гладкого симметричного продолжения функции $h(x, y)$, а значит и минимальной поверхности Σ_0, через границу AD и BC соответственно; (1.4) – граничное условие на нижней рамке.

Граница $\Gamma = CD$ в обоих случаях – это сечение горловины минимальной поверхности Σ_0 горизонтальной срединной плоскостью $x'y'$, см. фиг. 1а. В сингулярном случае – это еще и сингулярное ребро поверхности $\Sigma_0^+ \cup \Sigma_0^- \cup \Sigma_0'$, см. фиг. 1б. В обоих случаях граница Γ – окружность, однако ее радиус R неизвестен и формально она является свободной границей. Поэтому на ней задается два условия (1.5) в регулярном и соответственно два условия (1.6) – в сингулярном случаях. Первое условие и в (1.5), и в (1.6) – постоянство высоты $h(x, y)$. Второе условие в (1.5) для регулярного катеноида отражает факт ортогональности плоскости $x'y'$ и минимальной поверхности Σ_0.

Для сингулярного катеноида угол между каждой парой сегментов Σ_0^+, Σ_0^-, Σ_0' на линии их стыковки Γ должен быть равен $2\pi/3$ [4] и, следовательно, нормаль $\mathbf{N}$ к минимальной поверхности будет составлять с горизонтальной плоскостью $x'y'$ угол $\pi/6$. Именно этот факт отражает второе условие в (1.6) для сингулярного катеноида, поскольку величина $(1 + |\nabla h|^2)^{-1/2}\,|\nabla h|$ представляет собой проекцию $\mathbf{N}$ на плоскость $x'y'$ [10].

Таким образом, для определения конфигурации симметричного регулярного катеноида надо решить краевую задачу (1.1)–(1.5), а для определения конфигурации симметричного сингулярного катеноида – краевую задачу (1.1)–(1.4), (1.6). Расстояние между плоскостями рамок l_0 представляет собой единственный управляющий параметр задачи, от которого зависит конфигурация минимальной поверхности.

2. АНАЛОГИЯ С ФИЛЬТРАЦИЕЙ АНОМАЛЬНО ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ

В работе [8] установлено, что для анализа задач о минимальной поверхности можно эффективно использовать аналогию с задачами фильтрации аномально вязких жидкостей в пористой среде [9]. Определим фиктивный гидродинамический поток $\mathbf{J}$ жидкости следующим образом:

$$\mathbf{J} = -\frac{\nabla h}{|\nabla h|} J, \quad J = \frac{|\nabla h|}{\sqrt{1 + |\nabla h|^2}} \tag{2.1}$$

Вектор потока $\mathbf{J}$ характеризуется своей величиной $J = |\mathbf{J}|$ и углом наклона θ к оси x. Связь (2.1) между величинами J и $|\nabla h|$ можно записать в другой форме

$$|\nabla h| = \Phi(J), \quad \Phi(J) = J(1 - J^2)^{-1/2} \tag{2.2}$$

где $\Phi(J) \geq 0$, $\Phi'(J) \geq 0$. Соответственно дифференциальное уравнение (1.1) позволяет ввести фиктивную фильтрацию аномальной жидкости в пористой среде [9]

$$\Omega\colon\ \nabla h = -\frac{\mathbf{J}}{J}\Phi(J), \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \tag{2.3}$$

При этом $h(x, y)$ является аналогом напора, а $\mathbf{J}(x, y)$ — аналогом скорости фильтрации. Характер течения представлен на фиг. 2а. Закон фильтрации (2.2) был впервые рассмотрен В.В. Соколовским [11].

Второе дифференциальное уравнение (2.3) означает, что жидкость несжимаема и, следовательно, можно ввести функцию тока $\psi(x, y)$ [12]. Тогда

$$J_x = J\cos\theta = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad J_y = J\sin\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Как показано Христиановичем [13], для фильтрационных течений, удовлетворяющих закону (2.3), целесообразно использовать преобразование Чаплыгина [14] к переменным годографа скорости t, θ. Для закона Соколовского (2.2) переменная t будет связана с J выражением [11]

$$J = \operatorname{ch}^{-1} t, \quad t = \operatorname{arch} J^{-1}, \quad \Phi(J) = \operatorname{sh}^{-1} t \tag{2.4}$$

В результате такого преобразования придем к соотношениям Коши—Римана (подробности см. [11, 15])

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial\theta}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = -\frac{\partial h}{\partial t}$$

Следовательно, можно ввести комплексные переменные W и χ

$$W = -h + i\psi, \quad \chi = t + i\theta$$

и использовать функцию комплексного переменного $\chi(W)$ или $W(\chi)$ [16]. Условно W называется комплексным потенциалом течения, а χ — годографом скорости [9].

Когда функция $\chi(W)$ будет найдена, вернуться на физическую плоскость x, y можно, выписав формулы Христиановича полных дифференциалов от функций $x(h, \psi)$, $y(h, \psi)$ [9, 13]

$$dx = -\cos\theta \operatorname{sh} t\, dh - \sin\theta \operatorname{ch} t\, d\psi, \quad dy = -\sin\theta \operatorname{sh} t\, dh + \cos\theta \operatorname{ch} t\, d\psi \tag{2.5}$$

Как показано в [9], задача определения функции $\chi(W)$ может эффективно решаться методом годографа скорости [17] при условии, что плоскости χ и W имеют канонический вид.

3. АНАЛИЗ ВИДА ПЛОСКОСТЕЙ КОМПЛЕКСНОГО ПОТЕНЦИАЛА И ГОДОГРАФА СКОРОСТИ

Сначала проанализируем вид плоскости комплексного потенциала $W = -h + i\psi$. Границы AD и BC области Ω являются линиями тока, см. фиг. 2а, а границы AB и CD — линиями постоянства h, см. формулы (1.4)—(1.6). Поэтому в плоскости потенциала $W = -h + i\psi$ области течения Ω отвечает прямоугольник Ω_W, представленный на фиг. 2б.

Чтобы проанализировать вид плоскости годографа скорости $\chi = t + i\theta$, помимо представления $\mathbf{J}$, как вектора потока несжимаемой жидкости, удобно использовать и геометрическую его интерпретацию: в соответствии с [10] вектор потока $\mathbf{J}(x, y)$ вида (2.1) будет проекцией вектора нормали $\mathbf{N}(x, y)$ на плоскость x, y, см. фиг. 1.

С учетом картины течения, см. фиг. 2а, на линиях тока AD и BC имеем

$$AD\colon\ \theta = 0; \quad BC\colon\ \theta = \frac{\pi}{2} \tag{3.1}$$

На границах AB и CD используем тот факт, что вектор нормали $\mathbf{N}(x, y)$ будет ортогонален к самим границам. Тогда и вектор потока $\mathbf{J}$ будет ортогонален к ним, см. фиг. 2а. Далее, из соображений осевой симметрии течения следует, что величина потока J будет постоянной на каждой из границ AB и CD.

Величина потока J на границе $\Gamma = CD$ устанавливается в регулярном случае из второго граничного условия в (1.5): $J = 1$ и соответственно в сингулярном случае – из граничного условия (1.6): $J = \cos(\pi/6)$. Введем обозначения b_r, b_s для параметра b в регулярном и сингулярном случае соответственно:

$$b = \begin{cases} b_r = 0 \\ b_s = \operatorname{arch}\left[\cos^{-1}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right] \end{cases} \tag{3.2}$$

Тогда, с учетом связи (2.4) между J и t, условие на Γ в обоих случаях может быть выписано в общем виде

$$\Gamma: \quad t = b \Leftrightarrow J = \operatorname{ch}^{-1} b \tag{3.3}$$

Поток J на границе AB постоянен, но неизвестен по величине. Вследствие той же самой формулы (2.4) величина t на границе AB также будет постоянной, но неопределенной. Обозначим ее через a

$$AB: \ t = a \Leftrightarrow J = \operatorname{ch}^{-1} a \tag{3.4}$$

С учетом формул (3.1)–(3.4) приходим к выводу, что в плоскости годографа скорости χ области течения Ω отвечает прямоугольник Ω_χ, представленный на фиг. 2в. Определяющий отношение сторон прямоугольника параметр a будет основным вспомогательным параметром задачи. Очевидно, что $a > b$.

Учитывая вид комплексных плоскостей $W = -h + i\psi$ и $\chi = t + i\theta$, легко находим конформное отображение $W(\chi)$

$$W(\chi) = \frac{l_0}{2(a-b)}(\chi - a)$$

которое непосредственно определяет функции $h(t,\theta)$ и $\psi(t,\theta)$

$$h(t,\theta) = -\frac{l_0}{2(a-b)}t + \frac{al_0}{2(a-b)}, \quad \psi(t,\theta) = \frac{l_0}{2(a-b)}\theta \tag{3.5}$$

4. ВОССТАНОВЛЕНИЕ КОНФИГУРАЦИИ МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Радиус R окружности Γ можно определить из соображений материального баланса. Действительно, в силу несжимаемости жидкости ее суммарные потоки через границы AB и CD должны совпадать. Вектор $\mathbf{J}$ ортогонален к этим границам, а его величина J постоянна на каждой из границ. С учетом этого будем иметь

$$2\pi RJ|_\Gamma = 2\pi J|_{AB}$$

В результате, используя условия (3.3), (3.4), получим

$$R = \frac{\operatorname{ch} b}{\operatorname{ch} a} \tag{4.1}$$

Найти конфигурации всей минимальной поверхности можно, определив функцию $h(x,y)$. Поскольку задача была параметризована введением вспомогательной плоскости $\chi = t + i\theta$, функция $h(x,y)$ опосредованно определяется функциями $h(t,\theta)$, $x(t,\theta)$ и $y(t,\theta)$. Функция $h(t,\theta)$ нам уже известна, см. формулу (3.5). Чтобы найти функции $x(t,\theta)$ и $y(t,\theta)$, используем дифференциальные формулы Христиановича общего вида (2.5). Подставляя в них вытекающие из (3.5) выражения для частных производных функций $h(t,\theta)$ и $\psi(t,\theta)$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{l_0}{2(a-b)}, \quad \frac{\partial h}{\partial \theta} = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{l_0}{2(a-b)}$$

получим формулы

$$dx = \frac{l_0}{2(a-b)}[\cos\theta \operatorname{sh} t dt - \sin\theta \operatorname{ch} t d\theta],$$
$$dy = \frac{l_0}{2(a-b)}[\sin\theta \operatorname{sh} t dt + \cos\theta \operatorname{ch} t d\theta] \tag{4.2}$$

В частности, для границы Γ из формул (4.2) с учетом условия (3.3) следует

$$\Gamma\colon\ dx = -\frac{l_0 \operatorname{ch} b}{2(a-b)}\sin\theta d\theta, \quad dy = \frac{l_0 \operatorname{ch} b}{2(a-b)}\cos\theta d\theta$$

Соответственно можно связать приращения дуговой абсциссы s_Γ границы Γ и угла наклона θ к оси x нормали к этой границе

$$\Gamma\colon\ ds_\Gamma = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \frac{l_0 \operatorname{ch} b}{2(a-b)}d\theta$$

Поскольку Γ – окружность, из последнего выражения следует еще одна формула для величины радиуса R окружности Γ

$$R = \frac{l_0 \operatorname{ch} b}{2(a-b)}$$

Сравнивая ее с формулой (4.1), получим связь единственного управляющего параметра задачи l_0 с основным вспомогательным параметром задачи a

$$l_0(a) = 2\left(\frac{a-b}{\operatorname{ch} a}\right) \tag{4.3}$$

Далее, из формул (4.2) дифференциалов функций $x(t,\theta)$ и $y(t,\theta)$ можно восстановить и сами функции, но поскольку и регулярный, и сингулярный катеноиды являются фигурами вращения, достаточно установить их профиль AD в плоскости xz, как функции $x = x(z)$. Для границы AD из формул (4.2) при учете первого условия (3.1) и формулы (4.3) получим соотношение, связывающее дифференциалы t и x

$$AD\colon\ dx = \frac{l_0 \operatorname{sh} t}{2(a-b)}dt = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} a}dt$$

Проинтегрируем его от точки D, где $t = b$ и $x = R$. С учетом выражения (4.1) найдем функцию $x(t)$ на границе AD

$$AD\colon\ x(t) = \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} a} \tag{4.4}$$

Функцию $z(t)$ на границе AD по сути дает первое выражение в формуле (3.5). Перепишем его с учетом выражения (4.3)

$$AD\colon\ z = \frac{a-t}{\operatorname{ch} a}$$

Обращая функцию $z(t)$, найдем функцию $t(z)$ на на границе AD

$$AD\colon\ t(z) = a - z\operatorname{ch} a \tag{4.5}$$

Подставляя формулу (4.5) в формулу (4.4), получим искомый профиль $x(z)$ границы AD

$$AD\colon\ x(z) = \frac{\operatorname{ch}(a - z\operatorname{ch} a)}{\operatorname{ch} a} \tag{4.6}$$

Этот профиль является цепной линией и отличается от известных формул [6] только выбором начала координат и масштаба.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Часть катеноида, заключенная между плоскостями $z = 0$ и $z = z'$, представляет собой фигуру вращения с заданным профилем $x(z)$ и осью вращения z. Поэтому для вычисления ее площади $S(z')$ можно использовать формулу [18]

$$S(z') = 2\pi\int_0^{z'} x(z)\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}dz \tag{5.1}$$

Профиль $x(z)$ представлен выражением (4.6). Его непосредственное дифференцирование дает выражение для dx/dz

$$AD: \quad \frac{dx}{dz} = -\operatorname{sh}(a - z\operatorname{ch}a)$$

Подставляя его формулу (5.1) и проводя интегрирование, получим

$$S(z') = \pi\frac{2z'\operatorname{ch}a - \operatorname{sh}(2a - 2z'\operatorname{ch}a) + \operatorname{sh}(2a)}{2\operatorname{ch}^2 a} \tag{5.2}$$

Тогда площадь всего катеноида в регулярном и в сингулярном случаях можно выразить единой формулой

$$S_0 = 2S(z')\Big|_{z'=l_0/2} + (bb_s^{-1})\pi R^2 \tag{5.3}$$

Второе слагаемое здесь подчеркивает, что площадь сингулярного катеноида отличается от площади регулярного катеноида не только другим значением b в формуле (4.3) для l_0, но и добавлением площади пленки Σ_0' в горловине катеноида. Проводя вычисления по формуле (5.3) с учетом выражений (4.3), (5.2), найдем площадь симметричного катеноида S_0 в зависимости от параметра a

$$S_0(a) = \pi\frac{2(a-b) + \operatorname{sh}(2a) - \operatorname{sh}(2b) + (bb_s^{-1})\operatorname{ch}^2 b}{\operatorname{ch}^2 a} \tag{5.4}$$

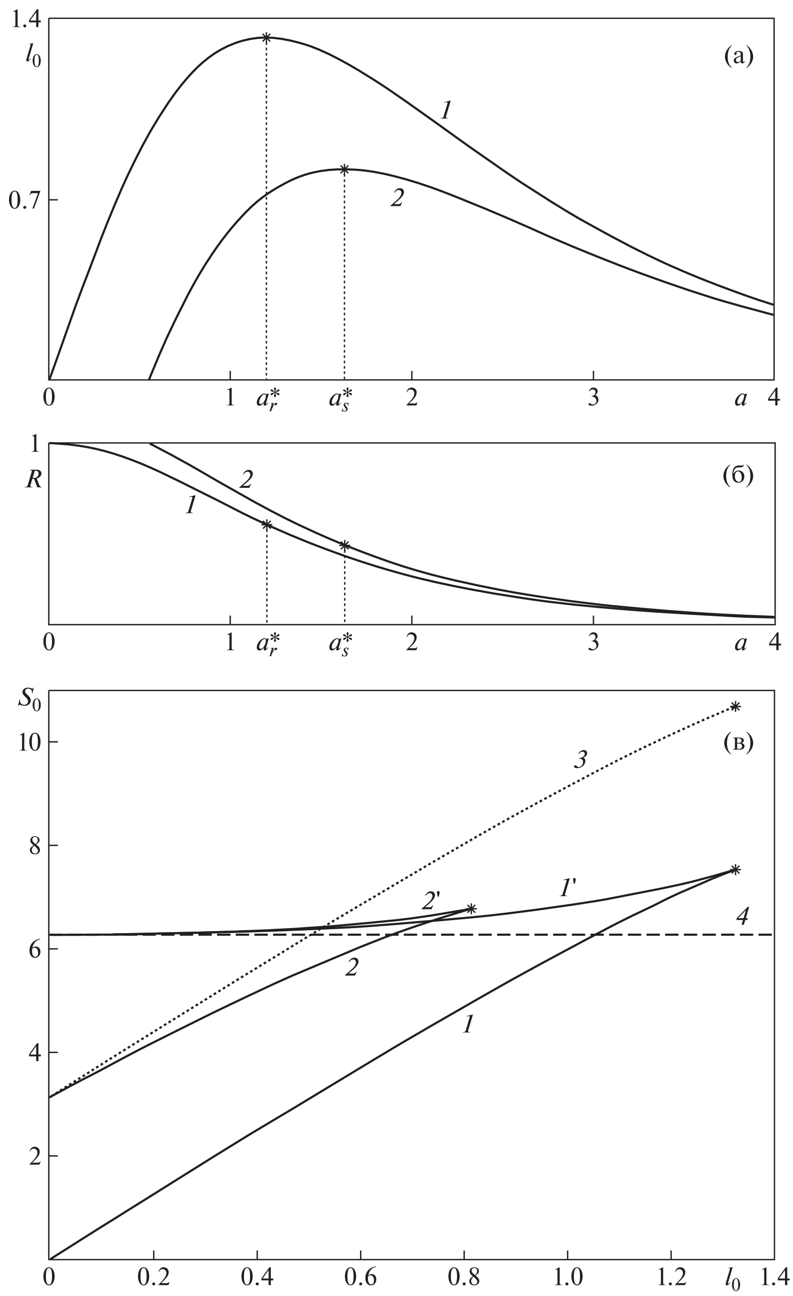
Здесь в регулярном и сингулярном случаях надо выбирать свое значение b в соответствии с формулой (3.2).

6. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ СИММЕТРИЧНОГО КАТЕНОИДА

На фиг. 3а представлена рассчитанная по формуле (4.3) зависимость $l_0(a)$: кривая *1* – для регулярного катеноида, кривая *2* – для сингулярного катеноида. Обе кривые немонотонны и имеют максимумы, отмеченные звездочкой: у кривой *1* это критическое значение $l_{0,r}^* = 1.3255$, которое достигается при a, равном $a_r^* = 1.1997$; у кривой *2* это критическое значение $l_{0,s}^* = 0.8156$, которое достигается при a, равном $a_s^* = 1.6293$. Следовательно, и в регулярном, и в сингулярном случаях при l_0, больше критического значения, связной конфигурации минимальной поверхности не существует, а при l_0, меньше критического значения, возможны две конфигурации катеноида.

На фиг. 3б представлена рассчитанная по формуле (4.1) зависимость $R(a)$: кривая *1* – для регулярного катеноида, кривая *2* – для сингулярного катеноида. Звездочками отмечены критические значения R: для кривой *1* – это значение, равное $R_r^* = 0.5524$ при $a = a_r^*$; для кривой *2* – это значение, равное $R_s^* = 0.4360$ при $a = a_s^*$. Видим, что в обоих случаях зависимость $R(a)$ монотонно убывает и соответственно упомянутые выше две конфигурации катеноида можно различать по величине R окружности Γ: когда значения параметра a меньше критического, это будет внешний катеноид с величиной R, больше критической; когда значения параметра a больше критического, это будет внутренний катеноид с величиной R, меньше критической.

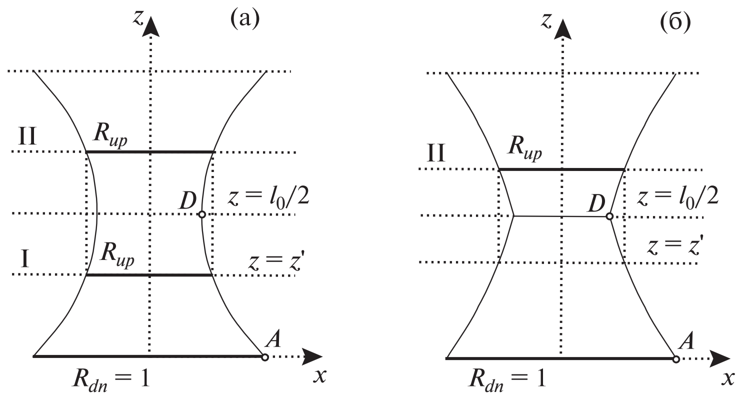
Известно, что и регулярном, и в сингулярном случае только внешний катеноид устойчив, поскольку отвечает минимуму свободной энергии [6]. Чтобы убедиться в этом, приведем рассчитанную по формуле (5.4) зависимость площади поверхности катеноида S_0 от расстояния между рамками l_0, см. фиг. 3в. Сплошные линии *1* и *2* отвечают устойчивым, а *1'* и *2'* – неустойчивым



Фиг. 3. Зависимости от параметра a величин l_0 (а) и R (б) для симметричного катеноида в регулярном (кривые *1*) и в сингулярном (кривые *2*) случаях. Зависимости площади симметричного катеноида S_0 от величины l_0 (в): *1*, *2* – внешняя (устойчивая), и *1'*, *2'* – внутренняя (неустойчивая) конфигурация катеноида в регулярном и сингулярном случае соответственно; 3 – устойчивое состояние системы “регулярный катеноид с пленкой на одной из рамок”; 4 – две отдельные пленки на рамках

ветвям регулярного и сингулярного катеноида соответственно. Звездочками отмечены критические значения, в которых зависимости $S_0(l_0)$ имеют точки возврата. Им отвечают значения $l_0 = l_{0,r}^*$, $S_0 = S_{0,r}^* = 7.5378$ – в регулярном случае, и значения $l_0 = l_{0,s}^*$, $S_0 = S_{0,s}^* = 6.7856$ – в сингулярном случае. Штриховой линией *4* отмечено решение $S_0 = 2\pi$, отвечающее случаю разрывного решения задачи – две отдельные пленки на рамках.

В этой связи также возникает вопрос о возможности перестройки регулярного катеноида в сингулярный и обратно. Ограничиваясь рассмотрением только устойчивых конфигураций



Фиг. 4. Схема определения несимметричного катеноида по заданной величине $R_{up} < 1$ с помощью сечения симметричного катеноида Σ_0 – в регулярном (а) и $\Sigma_0^+ \cup \Sigma_0^- \cup \Sigma_0'$ – в сингулярном случае (б): решение I – катеноид без горловины, решение II – катеноид с горловиной

внешнего катеноида, см. линии *1* и *2* на фиг. 3в, можно заключить, что при фиксированном l_0 площадь сингулярного катеноида всегда больше площади регулярного катеноида. Поэтому регулярный катеноид не может самопроизвольно перестроиться в сингулярный. Остается вопрос – возможна ли обратная перестройка?

Если расстояние между рамками l_0 будет больше $l_{0,s}^*$, очевидно, что катеноид не сможет оставаться сингулярным и, в частности, может стать регулярным, если срединная пленка Σ_0' хлопнется. Однако это лишь один из вероятных исходов, возможны и другие: например, переход системы к разрывному решению – двум отдельным пленкам на каждой рамке, или к схлопыванию всех пленок.

В то же время, если расстояние между рамками l_0 будет меньше $l_{0,s}^*$, то на первый взгляд представляется, что системе энергетически более выгодно перейти от сингулярного катеноида к регулярному. Однако это не так, поскольку на сингулярном катеноиде есть срединная пленка Σ_0'. Если отбросить возможность ее устранения путем внешнего вмешательства, то для такого перехода необходимо, чтобы пленка Σ_0' перешла на одну из рамок. Очевидно, свободная энергия такой системы – “регулярный катеноид плюс пленка на рамке”, будет характеризоваться уже не просто площадью $S_{0,r}$ регулярного катеноида в устойчивой внешней конфигурации (линия *1*), а суммой $(S_{0,r} + \pi)$, см. линию *3* на фиг. 3в. Эта линия проходит уже выше сингулярного катеноида в устойчивой внешней конфигурации (линии *2*) и переход от сингулярного катеноида к системе “регулярный катеноид плюс пленка на рамке” невозможен.

Рассмотрим также обратную ситуацию, когда к регулярному катеноиду дополнительно на одну из рамок подсаживается пленка. Если расстояние между рамками l_0 будет больше $l_{0,s}^*$, то система будет оставаться в этом состоянии, поскольку альтернативы – сингулярного катеноида – при таком l_0 нет. Однако, если в момент подсадки расстояние между рамками l_0 будет меньше $l_{0,s}^*$, подсаженная пленка соскользнет в горловину регулярного катеноида, и состоится переход системы из состояния “регулярный катеноид с пленкой на одной из рамок” к сингулярному катеноиду.

Как замечено в [7], такая перестройка катеноида происходит в два этапа: сначала пленка соскальзывает с рамки в горловину катеноида, а затем катеноид, ставший уже сингулярным, приходит к равновесному состоянию. Соответственно необходимым условием этой перестройки является не только более выгодное конечное состояние (с меньшей свободной энергией), но и более выгодное промежуточное состояние, после соскальзывания пленки в горловину катеноида. Здесь оба эти условия соблюдаются, поскольку площадь пленки при переходе с рамки в горловину уменьшается. Поэтому целый отрезок $l_0 \in (0, l_{0,s}^*]$ линии *3* фиг. 3в отвечает неустойчивому состоянию системы “регулярный катеноид с пленкой на одной из рамок” – последняя сразу переходит в состояние сингулярного катеноида (линия *2*).

Еще более неожиданные особенности таких перестроек катеноидов проявляются в случае несимметричных рамок [7]. Перейдем к его анализу.

7. СЛУЧАЙ НЕСИММЕТРИЧНЫХ РАМОК

В этом случае можно принять, что

$$R_{dn} = 1, \quad R_{up} < 1$$

Конфигурацию регулярного и сингулярного несимметричного катеноиды можно найти простым отсечением плоскостью $z = z'$ нужной части от рассмотренного выше симметричного катеноида: регулярного Σ_0 (фиг. 4а) или сингулярного $\Sigma_0^+ \cup \Sigma_0^- \cup \Sigma_0'$ (фиг. 4б).

Найдем сечение катеноида $z = z'$ из интервала $0 < z' < l_0/2$, радиус которого равен $R_{up} < 1$. Для этого разрешим уравнение профиля AD катеноида (4.6) относительно z

$$AD\!: \; z = F(x,a) \tag{7.1}$$

где через $F(x,a)$ обозначена функция

$$F(x,a) = \frac{a - \operatorname{arch}\left(x \operatorname{ch} a\right)}{\operatorname{ch} a} \tag{7.2}$$

Полагая $x = R_{up}$ в выражении (7.1) найдем искомое сечение катеноида $z = z'$

$$z' = F(R_{up}, a) \tag{7.3}$$

При этом надо ограничиться только теми z', которые удовлетворяют условию

$$z' < 0.5 l_0(a)$$

Очевидно, что это условие накладывает дополнительное ограничение на диапазон изменения параметра a

$$a > \operatorname{arch}(R_{up}^{-1} \operatorname{ch} b) \tag{7.4}$$

Это сужает ранее указанный диапазон изменения параметра a: $a > b$, поскольку ввиду условия $R_{up} < 1$ выполняется неравенство $\operatorname{arch}(R_{up}^{-1} \operatorname{ch} b) > b$.

Таким образом, искомое сечение катеноида $z = z'$ из интервала $0 < z' < l_0/2$, радиус которого равен R_{up}, определяется формулой (7.3) при условии (7.4). Площадь сегмента катеноида, лежащего между плоскостями $z = 0$ и $z = z' < l_0/2$, по сути уже найдена: $S_1 = S(z')$, см. выражение (5.2).

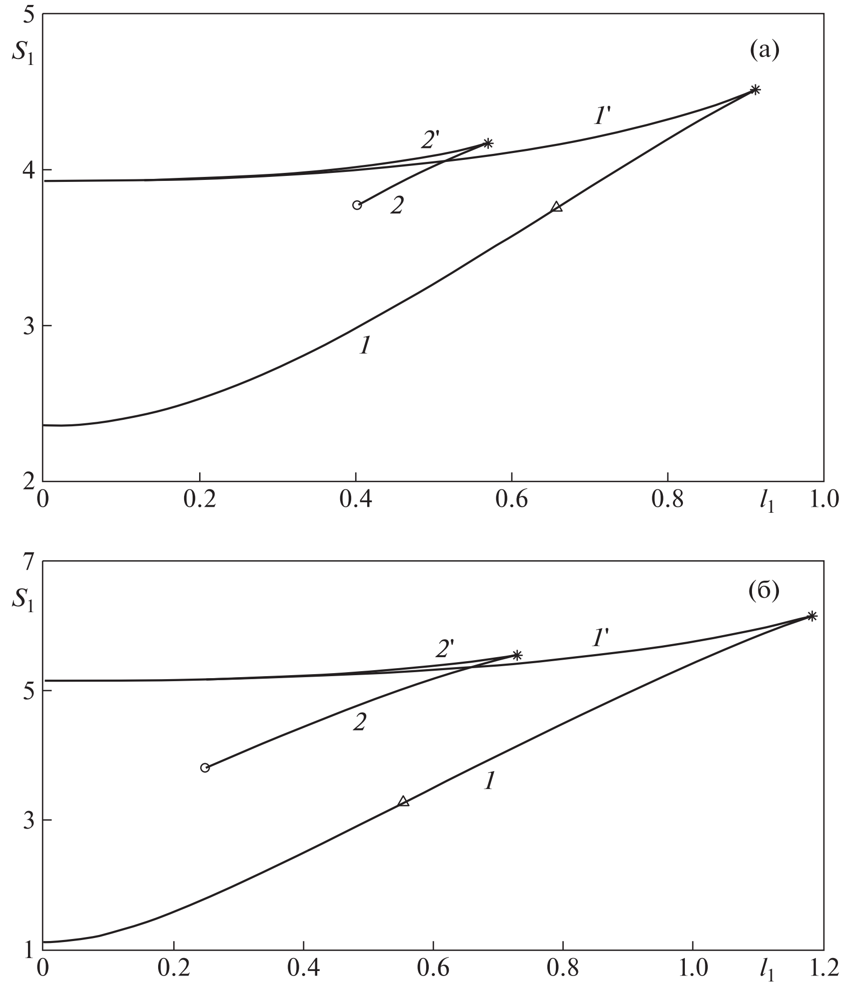
Поскольку найденные ранее катеноиды Σ_0 и $\Sigma_0^+ \cup \Sigma_0^- \cup \Sigma_0'$ симметричны относительно плоскости $z = l_0/2$, помимо найденного в интервале $0 < z' < l_0/2$ сечения $z = z'$, радиус которого равен R_{up}, в интервале $l_0/2 < z' < l_0$ будет еще одно сечение такого же радиуса. Таким образом, задача определения в симметричном регулярном катеноиде Σ_0 расстояния l_1 между круглыми рамками радиуса $R_{dn} = 1$ и $R_{up} < 1$ имеет два решения, которые назовем решением I (без горловины) и решением II (с горловиной), см. фиг. 4а

$$\text{I}: \quad \begin{cases} l_1 = F(R_{up}, a) \\ S_1 = S(z')\big|_{z'=l_1} \end{cases} \tag{7.5}$$

$$\text{II}: \quad \begin{cases} l_1 = l_0(a)\big|_{b=b_r} - F(R_{up}, a) \\ S_1 = S_0(a)\big|_{b=b_r} - S(z')\big|_{z'=l_1} \end{cases} \tag{7.6}$$

В то же время аналогичная задача в симметричном сингулярном катеноиде $\Sigma_0^+ \cup \Sigma_0^- \cup \Sigma_0'$ имеет только решение II, см. фиг. 4б

$$\text{II}: \quad \begin{cases} l_1 = l_0(a)\big|_{b=b_s} - F(R_{up}, a) \\ S_1 = S_0(a)\big|_{b=b_s} - S(z')\big|_{z'=l_1} \end{cases} \tag{7.7}$$



Фиг. 5. Зависимости площади несимметричного катеноида S_1 от величины l_1 в регулярном и сингулярном случае при $R_{up} = 0.5$ (а) и $R_{up} = 0.8$ (б). Кривые *1* и *2* отвечают устойчивым, а *1'* и *2'* – неустойчивым ветвям в регулярном и сингулярном случае соответственно

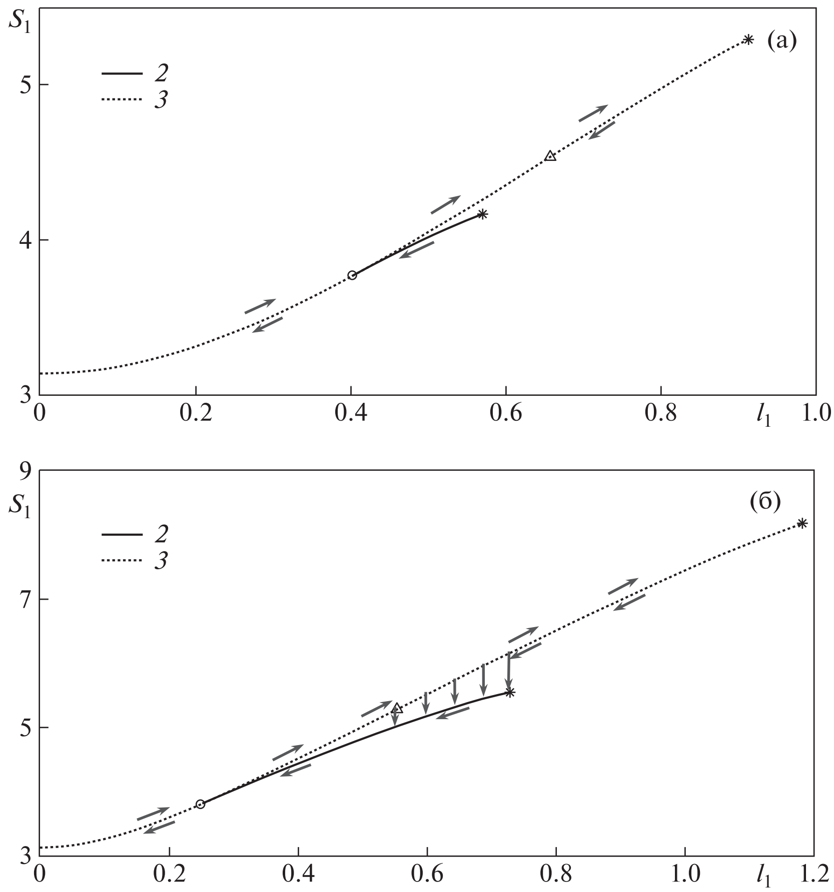
поскольку решение I по сути перестает быть сингулярным решением, а становится регулярным решением.

В выражениях (7.5)–(7.7) необходимо учесть формулы (3.2), (5.2), (7.2) при условии (7.4).

Ниже приведены рассчитанные по формулам (7.5)–(7.7) графики зависимостей $S_1(l_1)$ для несимметричных регулярного и сингулярного катеноидов при $R_{up} = 0.5$ (фиг. 5а) и $R_{up} = 0.8$ (фиг. 5б). Линии *1* и *2* отвечают устойчивым, а *1'* и *2'* – неустойчивым ветвям регулярного и соответственно сингулярного катеноида.

Как и ранее, символами “*” обозначим правые концы устойчивых веток регулярного и сингулярного катеноида, а отвечающие им значения максимально возможных $l_{1,r}$ и $l_{1,s}$ обозначим соответственно через $l_{1,r}^{*}$ и $l_{1,s}^{*}$. Символом “о” обозначим левый конец устойчивой ветви сингулярного катеноида, который определяется ограничением (7.4), а соответствующее ему значение минимально возможного $l_{1,s}$ обозначим через $l_{1,s}^{\mathrm{o}}$.

Значение $l_{1,r}$, при котором у регулярного катеноида появляется (или исчезает) горловина, обозначим через $l_{1,r}^{\triangle}$. Соответствующую ему точку на устойчивой ветви $S_1(l_1)$ регулярного катеноида



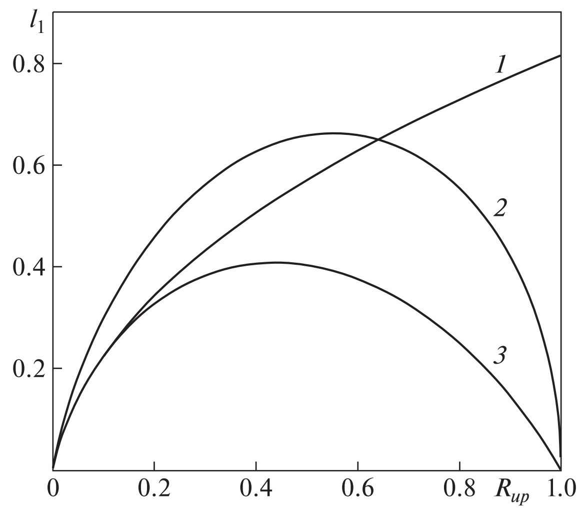
Фиг. 6. Устойчивые ветви зависимости S_1 от l_1 для несимметричного сингулярного катеноида (кривые *2*) и зависимости $(S_1 + \pi R_{up}^2)$ от l_1 для системы "регулярный несимметричный катеноид с пленкой на меньшей рамке" (*3*) при: $R_{up} = 0.5$ (а) и $R_{up} = 0.8$ (б); стрелки вдоль кривых обозначают квазистационарное изменение состояния системы с изменением расстояния l_1, вертикальные стрелки обозначают переход системы из неустойчивого положения в устойчивое

обозначим символом "$\triangle$", так что при $l_1 < l_{1,r}^{\triangle}$ катеноид будет без горловины (решение *I*), а при $l_1 < l_{1,r}^{\triangle}$ – будет с горловиной (решение II), см. фиг. 4а.

Видно, что для любых $R_{up} < 1$ графики $S_1(l_1)$ качественно схожи между собой и также схожи с первоначальным графиком $S_0(l_0)$ для симметричного регулярного и сингулярного катеноида, см. фиг. 3в. Также, аналогично симметричному случаю, регулярный катеноид не может самопроизвольно перейти в сингулярный катеноид, поскольку зависимость $S_1(l_1)$ для последнего всегда ниже. В то же время здесь, в отличие от случая симметричных рамок, возможен непрерывный обратный переход – при уменьшении расстояния l_1 между рамками плоскость срединной пленки сингулярного катеноида приближается к плоскости меньшей рамки и при $l_1 = l_{1,s}^{\circ}$ эти плоскости просто совмещаются. Соответственно пленка Σ_0' в горловине становится пленкой на верхней (меньшей) рамке, а сам катеноид становится регулярным. Однако обсуждать это надо в рамках анализа системы "регулярный несимметричный катеноид с пленкой на меньшей рамке".

8. СЛУЧАЙ, КОГДА К РЕГУЛЯРНОМУ НЕСИММЕТРИЧНОМУ КАТЕНОИДУ ПОДСАЖИВАЕТСЯ ПЛЕНКА НА МЕНЬШЕЙ РАМКЕ

Свободная энергия системы "регулярный катеноид плюс пленка на меньшей рамке" пропорциональна ее суммарной площади $S_{1,r}(l_1) + \pi R_{up}^2$. Зависимость этой площади от расстояния l_1 между рамками представлена пунктирными линиями *3* на фиг. 6а при $R_{up} = 0.5$ и на фиг. 6б при



Фиг. 7. Зависимости от R_{up} величин $l^*_{1,s}$ – линия *1*, $l^{\triangle}_{1,r}$ – линия *2*, и $l^{o}_{1,s}$ – линия *3*

$R_{up} = 0.8$. Символом "△", как и ранее, отмечена точка возникновения (исчезновения) горловины на регулярном катеноиде. Линии *2* представляют устойчивые ветви для сингулярного катеноида – те же самые, что и на фиг. 5а, 5б. Левые и правые концы этих линий, как и ранее, обозначены символами "o" и "*".

Как видно из фиг. 6а, 6б, при уменьшении расстояния l_1 между рамками и достижении l_1 величины $l^{o}_{1,s}$ действительно происходит непрерывный и даже гладкий (в смысле значений свободной энергии) переход от сингулярного несимметричного катеноида к системе "регулярный несимметричный катеноид с пленкой на меньшей рамке". Понятно, что расстояние l_1 можно уменьшать и далее, система будет оставаться в этом устойчивом состоянии. Но, что случится, если начать увеличивать расстояние l_1 до величины $l^{o}_{1,s}$ и далее?

На первый взгляд, при достижении l_1 величины $l^{o}_{1,s}$ система должна выбрать наиболее выгодный путь с меньшей свободной энергией, т.е. перейти к сингулярному несимметричному катеноиду, но это не так [7]. В отличие от случая симметричных рамок, когда у регулярного катеноида всегда была горловина, здесь участки $l_1 \in (0, l^{\triangle}_{1,r}]$ пунктирных линий *3* фиг. 6а, 6б отвечают решению *I* для регулярного несимметричного катеноида (без горловины), фиг. 4а. Чтобы в таком катеноиде заставить пленку сойти с меньшей рамки, ее площадь необходимо увеличить. В соответствии с описанной в [7] двухэтапной схемой перестройка катеноида, первый этап перестройки – сход пленки с меньшей рамки – оказывается невыгоден системе, поскольку сопряжен с затратами энергии. В результате участкам $l_1 \in (0, l^{\triangle}_{1,r}]$ пунктирных линий *3* фиг. 6а, 6б будет отвечать метастабильное состояние системы, и без дополнительных затрат энергии находиться в нем система может неограниченно долго.

Сценарий развития событий при дальнейшем увеличении l_1 зависит от величины радиуса R_{up} меньшей рамки. Для $R_{up} = 0.5$, см. фиг. 6а, система так и останется в состоянии "регулярный несимметричный катеноид с пленкой на меньшей рамке" вплоть до достижения l_1 величины $l^*_{1,r}$. Для $R_{up} = 0.8$ картина совсем другая. Здесь значение $l_1 = l^{\triangle}_{1,r}$ достигается раньше, чем $l_1 = l^*_{1,s}$, см. фиг. 6б. Это значит, что целый отрезок $l_1 \in [l^{\triangle}_{1,r}, l^*_{1,s}]$ пунктирной линии *3* отвечает уже решению II для несимметричного регулярного катеноида (с горловиной), см. фиг. 4а. Поэтому первый этап перестройки регулярного катеноида в сингулярный – сход пленки с меньшей рамки в горловину – становится выгоден системе и такая перестройка имеет место. Следовательно, весь отрезок $l_1 \in [l^{\triangle}_{1,r}, l^*_{1,s}]$ пунктирной линии *3* отвечает неустойчивой конфигурации.

В результате, если менять расстояние между рамками l_1, то увеличивая, то уменьшая его, можно добиться перестройки катеноида, причем перестройка регулярного в сингулярный будет происходить при значении $l_1 = l_{1,r}^{\triangle}$, а обратная перестройка сингулярного катеноида в регулярный – при значении $l_1 = l_{1,s}^{\text{o}}$, т.е. в перестройке катеноидов наблюдается гистерезис [7]. Очевидно, что такой гистерезис возможен не всегда, а только при условии $l_{1,s}^{\text{o}} < l_{1,r}^{\triangle} < l_{1,s}^{*}$.

На фиг. 7 приведены найденные в результате анализа системы (7.5)–(7.7) зависимости $l_{1,s}^{*}(R_{up})$ – линия *1*, $l_{1,r}^{\triangle}(R_{up})$ – линия *2*, и $l_{1,s}^{\text{o}}(R_{up})$ – линия *3*. В частности, найдено критическое значение $R_{up} \approx 0.641$, для которого $l_{1,r}^{\triangle} = l_{1,s}^{*}$. Соответственно гистерезис перестройки регулярного катеноида в сингулярный и обратно возможен только, если радиус меньшей рамки удовлетворяет условию $R_{up} > 0.641$. С точностью до обозначений это согласуется с результатами работы [7].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен полный анализ возможных перестроек конфигурации минимальной поверхности, образующейся на системе двух круглых соосных рамок разного радиуса. В частности, для разных конфигураций построены графики зависимости ее площади (поверхностной энергии) от расстояния между рамками. Только с привязкой к этим графикам выдвинутое в [7] предположение об метастабильности одной из конфигураций получает обоснование, а предложенное в [7] объяснение гистерезиса перестройки конфигураций катеноида приобретает ясный физический смысл. Использованная схема анализа на основе методов теории фильтрации аномальных жидкостей может быть распространена на случай некруглых и негладких рамок.

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров (М.М.А.) и National Science Foundation IOS-1354956 (К.Г.К).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
2. *Plateau J.* Statique experimentale et theorique des liquides soumis aux seules forees moleculaires. Paris: Gauthier-Villars, 1873.
3. *Courant R.* Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces. New York: Dover Publications, 2005 = *Курант Р.* Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. М.: Изд. иностр. лит-ры, 1953. 313 с.
4. *Дао Чонг Тхи, Фоменко А.Т.* Минимальные поверхности и проблема Плато. М.: Наука, 1987. 312 с.
5. *Hoffman D., Meeks W.H.* Minimal Surfaces Based on the Catenoid // The American Mathematical Monthly. Special Geometry Issue (Oct., 1990). V. 97. № 8. P. 702–730.
6. *Arfken G.B., Weber H.J., Harris F.E.* Mathematical Methods for Physicists. Amsterdam: r Elsevier Acad. Press, 2013.
7. *Salkin L., Schmit A., Panizza P., Courbin L.* Influence of boundary conditions on the existence and stability of minimal surfaces of revolution made of soap films // American J. Phys. 2014. V. 82. № 9. P. 839–849.
8. *Alimov M.M., Kornev K.G.* Meniscus on a shaped fibre: singularities and hodograph formulation // Proc. R. Soc. A. 2014. V. 470. P. 20140113.
9. *Бернадинер М.Г., Ентов В.М.* Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М.: Наука, 1975. 199 с.
10. *Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Элементы дифференциальной геометрии и топологии. М.: Наука, 1987. 432 с.
11. *Соколовский В.В.* О нелинейной фильтрации грунтовых вод // ПММ. 1949. Т. 13. Вып. 5. С. 525–536.
12. *Lamb H.* Hydrodynamics. Cambridge: Univ. Press, 1932 = *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
13. *Христианович С.А.* Движение подземных вод, не следующее закону Дарси // ПММ. 1940. Т. 4. Вып. 1. С. 33–52.
14. *Чаплыгин С.А.* О газовых струях. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 160 с.
15. *Алимов М.М., Корнев К.Г.* Внешний мениск на тонком волокне с овоидальным профилем (случай полного смачивания) // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 4. С. 97–112.
16. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
17. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
18. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 1. М.: Наука, 1974. 479 с.