

УДК 533.7

ТУРБУЛЕНТНАЯ ВЯЗКОСТЬ И ПРОФИЛИ СКОРОСТИ В РАЗВИТЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЯХ В КАНАЛАХ

© 2019 г. Р. Абси^{*,**}

Институт индустриальной биологии, Сержи, Франция

* E-mail: r.absi@hubebi.com

** E-mail: rafik.absi@yahoo.fr

Поступила в редакцию 28.01.2018 г.

После доработки 20.06.2018 г.

Принята к публикации 20.09.2018 г.

Представлены выражения для турбулентной (вихревой) вязкости на основе аналитических решений для турбулентной кинетической энергии в случае течений в каналах с развитой турбулентностью, полученных ранее автором. Средние продольные скорости найдены при решении уравнения количества движения с предложенными аналитическими выражениями для турбулентной вязкости. Правильность полученных результатов проверяется сопоставлением с данными прямого численного моделирования течений в каналах с развитой турбулентностью в диапазоне $300 < Re_\tau < 2000$, где Re_τ — число Рейнольдса, определенное по скорости трения u_τ , кинематической вязкости ν и полуширине канала δ . Предлагаемый метод позволяет дать точное описание профилей средней продольной скорости и турбулентного сдвигового напряжения вне логарифмического подслоя, в вязком и буферном слоях и внешней области. Настоящее исследование имеет цель обеспечить простые аналитические инструменты для изучения приложений турбулентных течений в каналах.

Ключевые слова: турбулентные течения в каналах, турбулентная кинетическая энергия, турбулентная (вихревая) вязкость, средняя скорость, данные прямого численного моделирования

DOI: 10.1134/S0568528119010018

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$D_1, C_{k1}, A_k^+, B, C, A_k^+, A_l^+, \alpha_1, C_1, C_v, A_{v_i}^+, a_{v_i}^+$	коэффициенты;
h	масштаб течения (глубина потока или толщина пограничного слоя);
$h_l = h/C_{k1}$	
k	турбулентная кинетическая энергия;
l_m	длина смешения;
Re_τ	число Рейнольдса, вычисленное по скорости трения;
x, y	координаты в продольном направлении и перпендикулярно стенке соответственно;
U	продольная компонента средней скорости (в направлении оси x);
u_τ	скорость трения (динамическая скорость);
δ	полуширина канала;
κ	постоянная Кармана;
ν	кинематическая вязкость;
ν_t	турбулентная (вихревая) вязкость;
ρ	плотность;
τ	сдвиговое напряжение;
$\xi = y/h$	

Π — параметр Коулса, выражающий интенсивность функции турбулентного следа.

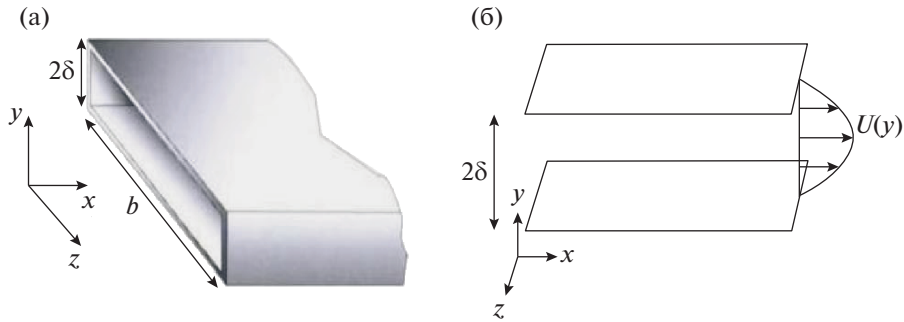
Все переменные с верхним индексом + обезразмерены с использованием u_τ и ν .

Развитие теоретических и полутеоретических аналитических методов для изучения турбулентных течений очень важно как для практических инженерных приложений, так и для фундаментальных исследований турбулентности. Наличие стенок существенно влияет на турбулентные течения. Успешные предсказания моделей турбулентности, используемые для описания турбулентных течений, ограниченных стенками, зависят от точности описания течения в пристеночной области [1]. Учитывая сложность многомасштабной нелинейной задачи, “красота” некоторых аналитических результатов, таких как логарифмический закон, состоит в их простоте [2].

Считается, что развитое плоское течение в канале (фиг. 1) представляет собой простейшее и наиболее идеализированное течение в пограничном слое. На фиг. 1а изображен канал (или труба), в котором течение вызвано градиентом давления в продольном направлении. Фигура 1а изображает диаграмму плоского канала, в котором течение происходит между двумя бесконечно длинными плоскостями, при этом полуширина канала (или полувысота) равна δ . То, что турбулентное течение развито, означает все средние величины, характеризующие течение и турбулентность, независимы от продольной координаты [2]. Развитые плоские течения в канале были изучены в многочисленных экспериментальных и вычислительных исследованиях. Эксперименты в диапазоне чисел Рейнольдса $190 < Re_\tau < 1900$ (здесь и в дальнейшем Re_τ обозначает число Рейнольдса, определенное по скорости трения u_τ , кинематической вязкости ν и полуширине канала δ) были выполнены с целью исследования влияния числа Рейнольдса в непосредственной близости стенки [3]. Перечислим некоторые исследования с помощью прямого численного моделирования плоских течений в канале, которые позволяют улучшить наши представления о динамике пограничного слоя. Прямое численное моделирование было проведено для чисел Рейнольдса, определенных по скорости трения, в диапазоне от $Re_\tau = 180$ [4] до $Re_\tau = 590$ [5], затем до $Re_\tau = 640$ [6] и $Re_\tau = 950$ [7], и, наконец, для $Re_\tau = 2003$ [8]. Пограничный слой состоит из двух основных областей, зависящих от рассматриваемых масштабов: внутренней и внешней. Наблюдения когерентных структур в турбулентных пограничных слоях указывают на наличие взаимодействия между турбулентными движениями во внутренней и внешней областях [2]. Внутреннюю или пристеночную область можно разделить на три подслоя. Это вязкий подслой (при расстояниях от стенки $y^+ < 5$), в котором средняя скорость U^+ может быть аппроксимирована зависимостью $U^+ = y^+$, и турбулентная кинетическая энергия k^+ аппроксимируется квадратичным законом $k^+ \approx y^{+2}$ [9–11] (переменные с верхним индексом “+” обезразмерены по скорости трения u_τ и кинематической вязкости ν). Кроме того, имеется полностью турбулентный подслой или подслей с логарифмическим законом скорости (при $30 < y^+ < 0.2 Re_\tau$), в котором U^+ аппроксимируется логарифмическим профилем [12] и k^+ некоторыми аналитическими или полуматематическими решениями в равновесной области (при $y^+ > 50$) [13–15]. Между этими слоями расположен буферный подслей, в котором турбулентная кинетическая энергия может быть описана некоторой функцией при $y^+ < 20$ [15].

С учетом теоретического обоснования логарифмического закона, возможно точное описание средних продольных скоростей $U^+(y^+)$ при $30 < y^+ < 0.2 Re_\tau$. Однако этого недостаточно для предсказания распределений скорости в вязком и буферном подслоях и внешней области. Для того, чтобы сделать возможным более адекватное описание U^+ во внешней области, логарифмический закон был исправлен с помощью добавления функции следа Коулса [16, 17]. Функция следа не имеет реального физического смысла, по сути это эмпирический подбор измеренных распределений скорости [18].

Настоящее исследование направлено на улучшение описания профилей средних продольных скоростей за счет использования аналитических выражений для турбулентной (вихревой) вязкости, основанной на аналитических решениях для турбулентной кинетической энергии. Рассматривается стационарное однородное полностью развитое течение несжимаемой ньютоновской жидкости в плоском канале с гладкими стенками. В разд. 1 представлены аналитические решения модельного уравнения для турбулентной кинетической энергии. Во втором разделе даны аналитические модели для турбулентной вязкости. В разд. 3 распределения средних продольных скоростей получены путем решения уравнения движения совместно с предлагаемыми уравнениями для турбулентной вязкости и произведено сопоставление с данными прямого численного моделирования развитых турбулентных течений в каналах при $300 < Re_\tau < 2000$.



Фиг. 1. Геометрия течения: канал или труба (а); диаграмма плоского течения в канале (б)

1. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Большинство имеющихся аналитических решений для турбулентной кинетической энергии основываются на предположении о локальном равновесии (т.е. производство энергии G уравнивается диссипацией ϵ). В равновесной области ($y^+ > 50$) Нецу и Накагава предложили для стационарных течений в открытых каналах полуаналитическое решение для турбулентной кинетической энергии, задаваемое выражением

$$\frac{k}{u_\tau^2} = D_1 e^{(-2C_{k1}\xi)}, \quad (1.1)$$

где $\xi = y/h$, y — расстояние от дна, h — масштаб течения (либо глубина потока, или полуширина канала, либо толщина пограничного слоя), u_τ — скорость трения (динамическая скорость), а D_1 и C_{k1} — некоторые коэффициенты (по эмпирическим оценкам C_{k1} равен единице [13]). В единицах расстояния до стенки

$$k^+ = D_1 e^{(-y^+/A_1^+)}, \quad (1.2)$$

где $k^+ = k/u_\tau^2$, $y^+ = yu_\tau/\nu$, $A_1^+ = A_1 u_\tau/\nu$ и $A_1 = h/(2C_{k1})$.

Уравнение (1.1), которое справедливо начиная с некоторого расстояния (от стенки или дна), там, где течение находится в локальном равновесии [15], не годится в окрестности стенки. В этой области на основе разложения пульсационных компонент скорости в ряд Тейлора по расстоянию y вдоль нормали к стенке пристеночное асимптотическое поведение может быть описано формулой [9–11]

$$k^+ = ay^{+2} + by^{+3}, \quad (1.3)$$

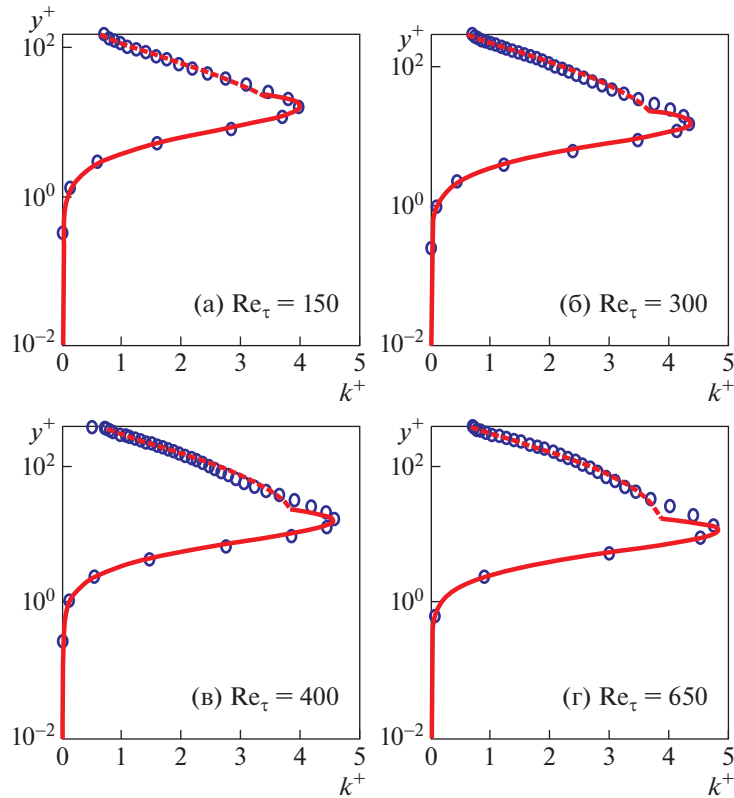
где a и b — заданные коэффициенты: $0.025 < a < 0.05$ [19] и $b = -a/8$ [20]. Часто это формула упрощается и сводится к первому члену в правой части: $k^+ \approx ay^{+2}$. Однако такая квадратическая зависимость для k справедлива только в вязком подслое ($y^+ < 5$). Для того, чтобы обеспечить единое решение для турбулентной кинетической энергии во всем пограничном слое, Львов с соавторами [14] предложили некоторое аналитическое решение, основывающееся на том же предположении о локальном равновесии. Однако это решение не может улучшить распределения турбулентной кинетической энергии в вязком и буферном подслоях.

Для стационарных течений в каналах модельное уравнение для k задается следующим образом: $\partial_y(v\partial_y k) = -(G + \partial_y(v\partial_y k) - \epsilon)$. При аппроксимации правой части уравнения в виде $(G + \partial_y(v\partial_y k) - \epsilon) \approx 1/y^2$, после интегрирования было получено общее аналитическое решение [15]

$$k^+ = By^{+2C} e^{(-y^+/A_k^+)}, \quad (1.4)$$

где A_k^+ , B и C — некоторые коэффициенты.

В равновесной области (где $G = \epsilon$) коэффициент C равен нулю [15] и поэтому уравнение (1.4) превращается в уравнение (1.2). Исследование уравнения (1.4) с помощью результатов прямого



Фиг. 2. Распределения турбулентной кинетической энергии для различных чисел Рейнольдса Re_τ (пунктирные кривые): выражение (1.2); выражение (1.5) (сплошные кривые); результаты прямого численного моделирования [6] – символы

численного моделирования течений в каналах показывает, что при $y^+ \leq 20$ значения $C = 1$, $A_k^+ = 8$ и B зависит от Re_τ [15]. Следовательно, при $y^+ \leq 20$ распределение турбулентной кинетической энергии задается выражением

$$k^+ = By^{+2}e^{(-y^+/8)}, \quad (1.5)$$

а коэффициент B равен [21]

$$B(Re_\tau) = C_{B1} \ln(Re_\tau) + C_{B2}, \quad (1.6)$$

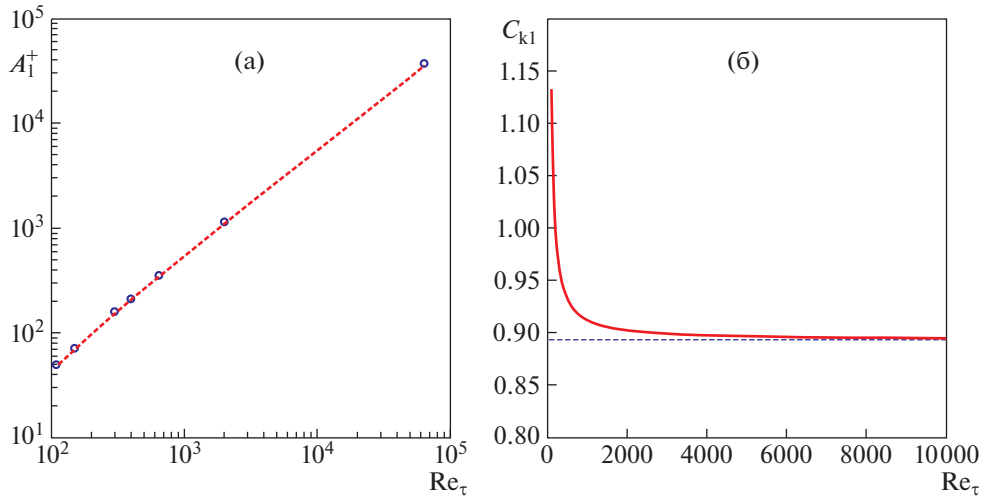
где $C_{B1} = 0.0164$ и $C_{B2} = 0.0334$.

Отметим, что линейная часть разложения в ряд показательной функции в (1.5) дает $k^+ = By^{+2} - (B/8)y^{+3}$ аналогично уравнению (1.3) [22]. Из этих уравнений можно заключить, что $a = B$, $b = -B/8$ и, следовательно, $b = -a/8$, что подтверждает значение, полученное в [20]. Соотношение (1.5) представляет собой более общее и более точное решение.

На фиг. 2 приведены результаты проверки выражений (1.2) и (1.5) с помощью результатов прямого численного моделирования при различных значениях Re_τ . Приведенные графики показывают, что соотношения (1.2) и (1.5) позволяют обеспечить точное описание турбулентной кинетической энергии в турбулентных плоских течениях в каналах.

Анализ коэффициента A_1^+ в выражении (1.2) с помощью данных прямого численного моделирования показывает, что A_1^+ зависит от Re_τ и задается линейным соотношением (фиг. 3а) вида

$$A_1^+(Re_\tau) = C_{A1} Re_\tau - C_{A2}, \quad (1.7)$$



Фиг. 3. Расчет A_1^+ по результатам прямого численного моделирования (а): кривая соответствует выражению (1.7), символы — результатам прямого численного моделирования; изменение коэффициента C_{k1} (выражение (1.8)) (б)

где C_{A1} и C_{A2} — постоянные. Применение результатов прямого численного моделирования дает $C_{A1} = 0.58$ и $C_{A2} = 17$ (фиг. 3а).

Из выражений (1.1) и (1.2) имеем $2C_{k1}\xi = y^+/A_1^+$ и, поскольку $\xi = y/h = y^+/Re_\tau$, можно получить соотношение между C_{k1} и A_1^+ в виде $C_{k1} = 0.5 Re_\tau / A_1^+$. Следовательно, (1.7) дает следующее выражение для C_{k1} :

$$C_{k1}(Re_\tau) = \frac{0.5 Re_\tau}{C_{A1} Re_\tau - C_{A2}}. \quad (1.8)$$

Для больших значений числа Рейнольдса Re_τ (фиг. 3б) C_{k1} становится равным $C_{k1} \approx 0.5/C_{A1}$ (поскольку $C_{A1} Re_\tau \gg C_{A2}$). При $C_{A1} = 0.58$ имеем $C_{k1} \approx 0.86$, что близко к эмпирическому значению $C_{k1} = 1$, предложенному Нецу и Накагавой [13]. Вместо этого эмпирического значения, не зависящего от Re_τ , получено выражение (1.8), в котором C_{A1} зависит от Re_τ и которое дает более точную зависимость для распределений турбулентной кинетической энергии.

2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ (ВИХРЕВОЙ) ВЯЗКОСТИ

Хорошо известное выражение ван Драйста [23] для длины смешения задается как

$$l_m = \kappa y \left(1 - e^{-y^+/A_l^+} \right), \quad (2.1)$$

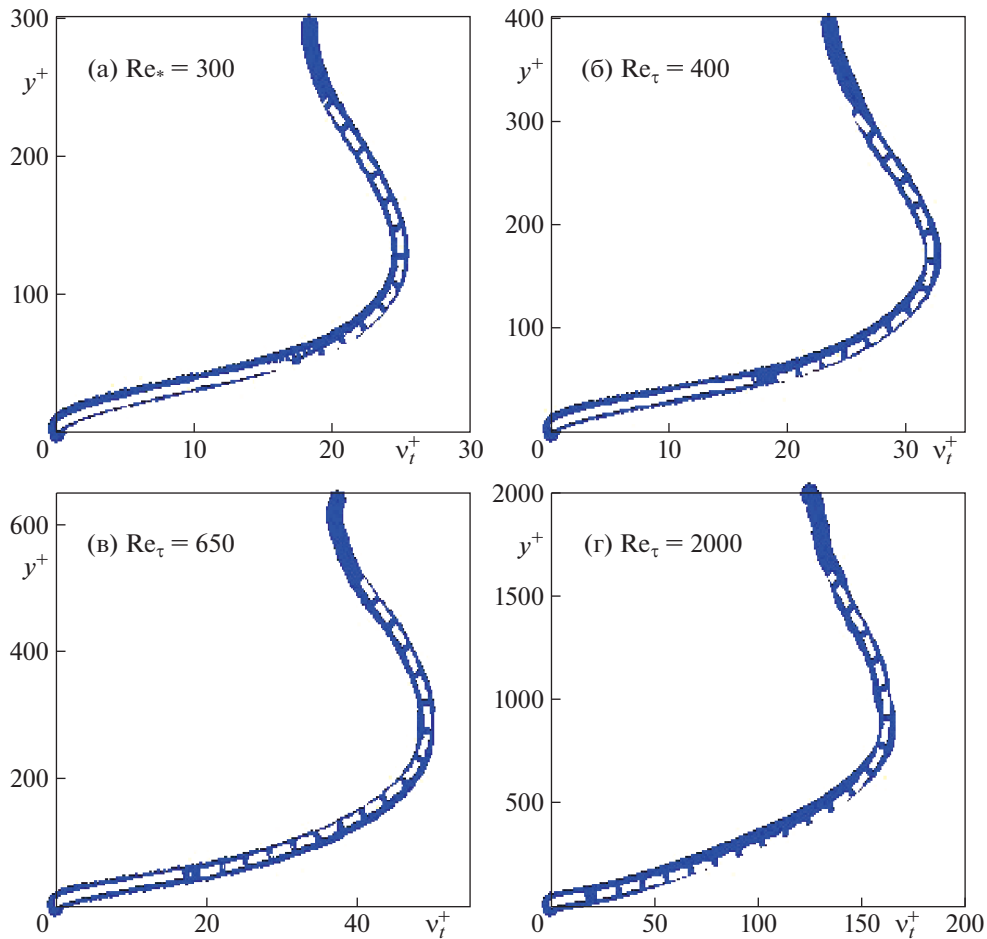
где κ — постоянная Кармана (≈ 0.41) и $A_l^+ = 26$. При $y^+ \gg A_l^+$ соотношение (2.1) превращается в классическое линейное уравнение для длины смешения

$$l_m = \kappa y. \quad (2.2)$$

Часто турбулентная вязкость, связанная с (2.1), выражается в виде

$$\nu_t = \kappa u_\tau \left(1 - e^{-y^+/A_l^+} \right). \quad (2.3)$$

Другое выражение для турбулентной вязкости (см. ниже (2.4)), основанное на экспериментальных данных, было предложено для планетарного пограничного слоя [24]. Интересно, что в этом случае вертикальный профиль турбулентной вязкости аналогичен усредненной по времени турбулентной вязкости из $k-\epsilon$ модели, состоящей из двух уравнений [25]



Фиг. 4. Распределения турбулентной вязкости для различных чисел Рейнольдса Re_τ : выражение (2.6) (белые пунктирные кривые); выражение (2.3) (белые сплошные кривые); результаты прямого численного моделирования (символы или полужирные голубые кривые)

$$v_t = \alpha_1 \kappa u_\tau y e^{-C_1 \frac{y}{h}}, \quad (2.4)$$

где α_1 и C_1 – некоторые параметры.

2.1. Зависимость для турбулентной вязкости при $y^+ < 20$

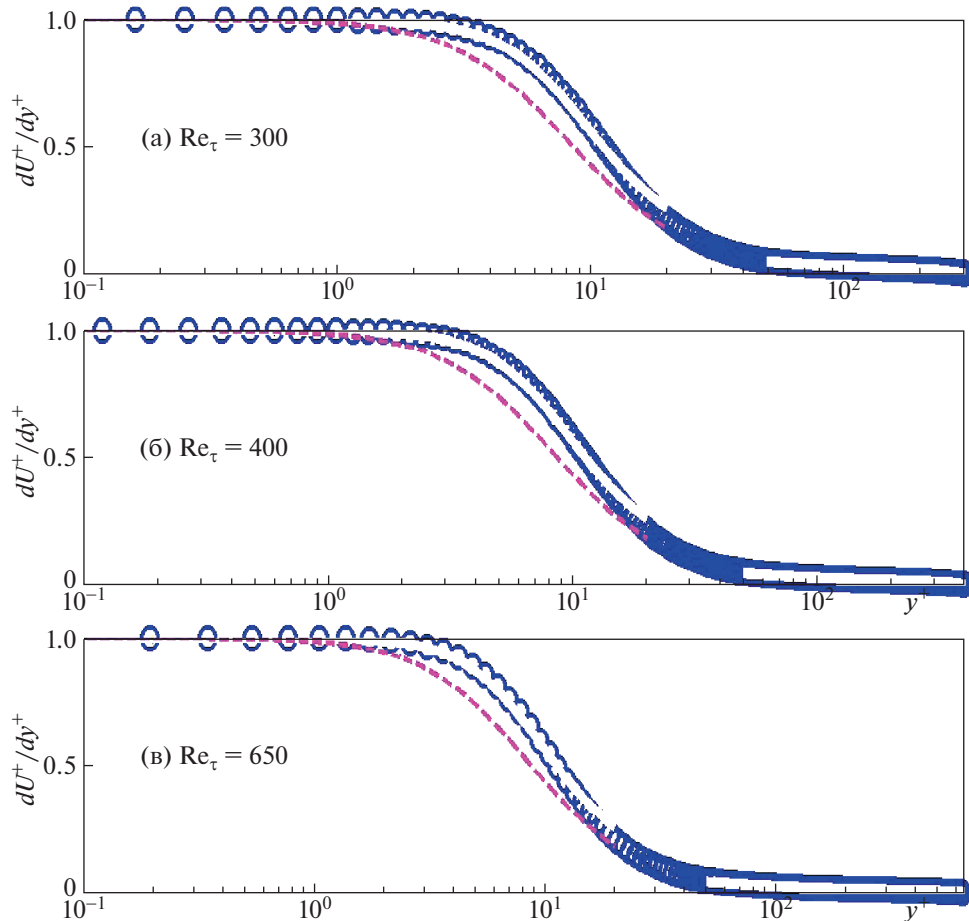
Выражение (2.3) не может дать точный профиль скорости в вязком и буферном подслоях. При $y^+ < 20$ более точная зависимость для турбулентной вязкости, основанная на распределении турбулентной кинетической энергии, заданном формулой (1.5), и выражение ван Драйста для длины смешения (2.1), может быть задана соотношением [21]

$$v_t^+ = C_v \kappa \sqrt{B} y^{+2} e^{-y^+/16} \left(1 - e^{-y^+/A_t^+} \right), \quad (2.5)$$

где $v_t^+ = v_t / \nu$, $C_v = 0.3$ (при $Re_\tau > 390$) и B задается соотношением (1.6).

2.2. Зависимость для турбулентной вязкости при $y^+ > 50$

Из рассмотрения турбулентной кинетической энергии и длины смешения следует, что турбулентная вязкость может быть записана в виде $v_t = C_p I_m \sqrt{k}$ [26], где C_p – некоторый коэффициент. В равновесной области распределение турбулентной кинетической энергии (1.1) согласует-

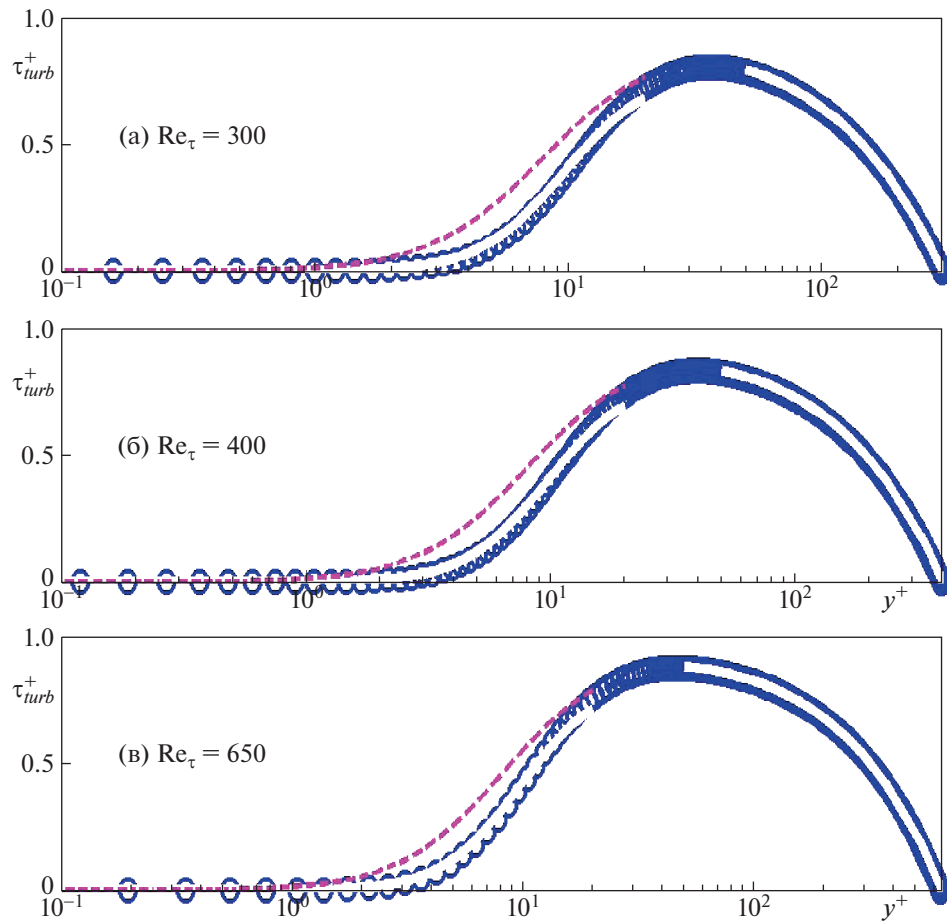


Фиг. 5. Распределения градиента скорости для турбулентных течений в каналах (уравнение (3.2)); предлагаемые выражения (2.5) и (2.6) (белые сплошные линии); выражение ван Драйста (2.3) (пунктирные кривые); результаты прямого численного моделирования (символы или полужирные голубые кривые)

ся с турбулентной вязкостью в выражении (2.4) и логарифмическим законом. Поскольку при локальном равновесии $dU/dy = C_p(\sqrt{k}/l_m)$, в случае турбулентной кинетической энергии, заданной соотношением $\sqrt{k} = (1/C_p)u_\tau f(y)$, длина смешения, таким образом, должна быть записана в виде $l_m = \kappa u_\tau f(y)$ в подслое с логарифмическим законом распределения ($dU/dy = u_\tau/(\kappa y)$).

В равновесной области $y^+ > 50$ распределение турбулентной кинетической энергии задается выражением $\sqrt{k} \approx u_\tau \exp(-y/h_1)$ (уравнение (1.1)), где $h_1 = h/C_{k1}$. Поскольку для $30 < y^+ < 0.2 \text{Re}_\tau$ распределение продольной скорости задается логарифмическим законом, можно записать длину смешения в виде $l_m = \kappa u_\tau \exp(-y/h_1)$ и поэтому справедливо выражение (2.4) для турбулентной вязкости. Действительно, предположение о локальном равновесии в подслое с логарифмическим законом распределения, которое позволяет записать $dU/dy \approx \sqrt{k}/l_m = u_\tau/(\kappa y)$, дает для длины смешения выражение $l_m = \kappa u_\tau \exp(-y/h_1)$. Поэтому турбулентная вязкость может быть задана выражением $\nu_t \approx \kappa u_\tau \exp(-2y/h_1)$, что подтверждает формулу (2.4). Таким образом, в равновесной области $y^+ > 50$ распределение турбулентной кинетической энергии, заданное выражением (1.1), согласуется с турбулентной вязкостью, описываемой формулой (2.4) и логарифмическим профилем.

Учитывая этот особый интерес, проанализируем формулу (2.4) с помощью результатов прямого численного моделирования (фиг. 4). Чтобы сделать возможным сопоставление, запишем выражение (2.4) для $y^+ > 50$ в следующем виде:



Фиг. 6. Распределения турбулентного сдвигового напряжения для турбулентных течений в каналах (выражение (3.3)); предлагаемые выражения (2.5) и (2.6) (белые сплошные кривые); выражение ван Драйста (2.3) (пунктирные кривые); результаты прямого численного моделирования (символы или полужирные голубые кривые)

$$v_i^+ = y^+ e^{\frac{y^+ - a_{v_i}^+}{A_{v_i}^+}}, \quad (2.6)$$

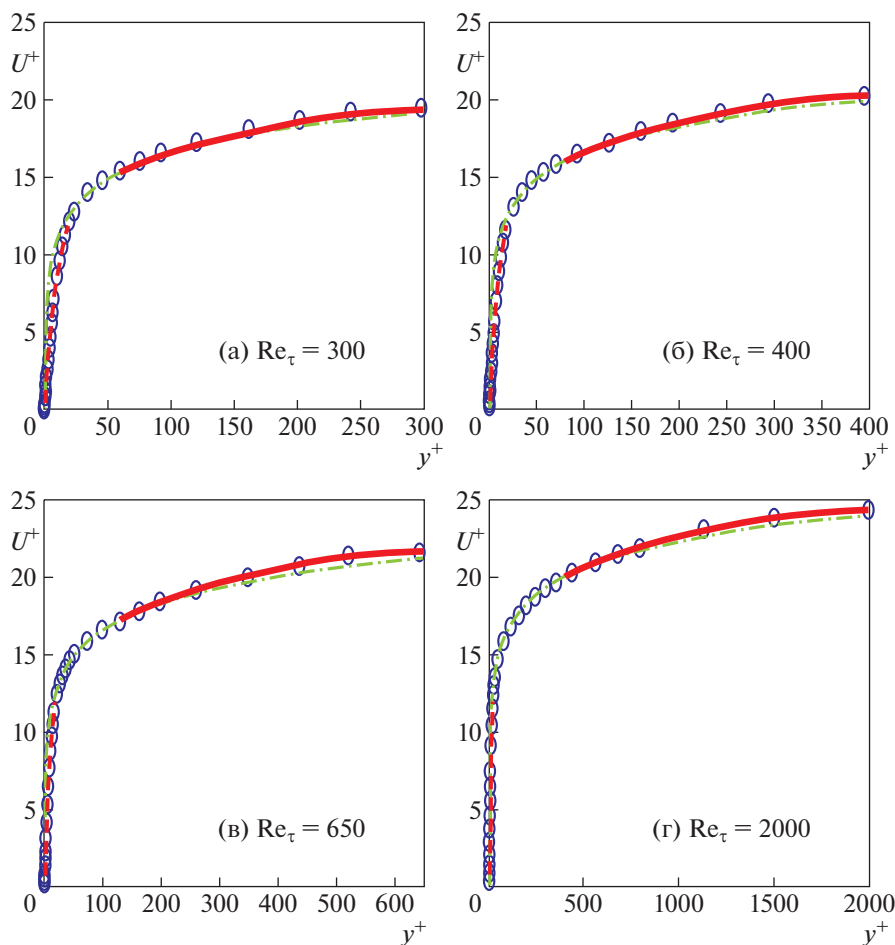
где $A_{v_i}^+ = \delta u_\tau / (C_1 v)$ и $a_{v_i}^+ = -A_{v_i}^+ \ln(\kappa \alpha_1)$ — два коэффициента, зависящие от Re_τ . Сопоставление с результатами прямого численного моделирования позволяет найти линейные уравнения в виде $A_{v_i}^+ = 0.46 Re_\tau - 5.98$ и $a_{v_i}^+ = 0.34 Re_\tau - 11.5$. Распределения турбулентной вязкости (фиг. 4), полученные из (2.6), показывают, что для имеющихся результатов прямого численного моделирования при $Re_\tau \leq 2000$, формула (2.4) обеспечивает точное описание (белые штрихованные линии) данных прямого численного моделирования (символы, задающие голубые полужирные кривые) при $50 < y^+ < 0.8 Re_\tau$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Для турбулентных течений в каналах общее сдвиговое напряжение задается соотношением [11, 26, 27]

$$\tau_{tot}^+ = \frac{dU^+}{dy^+} + \tau_{tur}^+ = \left(1 - \frac{y^+}{Re_\tau}\right), \quad (3.1)$$

где $\tau_{tur}^+ = -\overline{uv}^+$ — турбулентное сдвиговое напряжение.



Фиг. 7. Распределения средней продольной скорости в линейном масштабе: зеленые штрих-пунктирные кривые — логарифмический закон; красные полужирные сплошные и пунктирные кривые — настоящее исследование; символы — результаты прямого численного моделирования

Обыкновенное дифференциальное уравнение для распределения скорости может быть получено из соотношения (3.1) в виде [21]

$$\frac{dU^+}{dy^+} = \frac{1}{1 + \nu_t^+} \left(1 - \frac{y^+}{\text{Re}_\tau} \right). \quad (3.2)$$

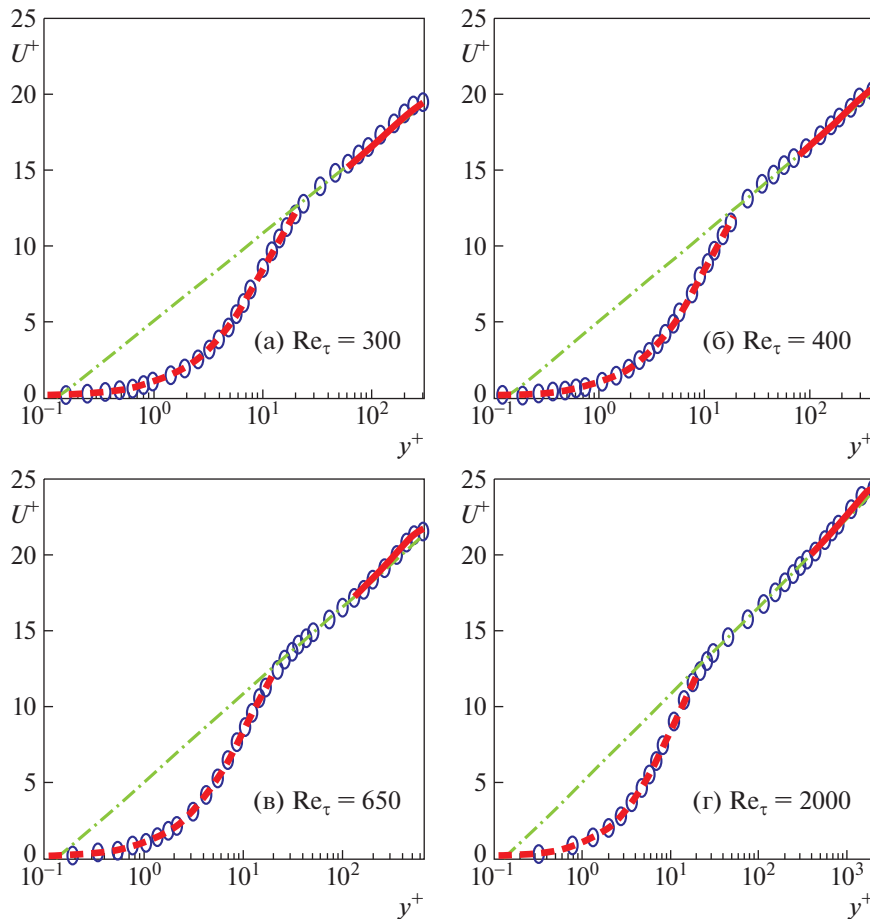
В уравнении (3.2) необходимо задать безразмерную турбулентную вязкость ν_t^+ .

3.1. Градиент скорости

На фиг. 5 изображено распределение градиента скорости, полученное из уравнения (3.2). Белые сплошные линии построены на основании выражений (2.5) и (2.6), предложенных выше, тогда как тонкие штрихованные кривые построены на основании (2.3). Сопоставление распределений градиента скорости с результатами прямого численного моделирования (фиг. 5) показывает, что предложенные выражения (формулы (2.5) и (2.6)) дают более точные результаты. С одной стороны, выражение (2.5) существенно улучшает профиль, определенный по формуле (2.3) при $y^+ < 20$. С другой стороны, формула (2.6) дает точные результаты во внешней области.

3.2. Турбулентное сдвиговое напряжение

Турбулентное сдвиговое напряжение получается из соотношения (3.1) и уравнения (3.2) в виде



Фиг. 8. Распределения средней продольной скорости в логарифмическом масштабе: зеленые штрихпунктирные кривые — логарифмический закон; красные полужирные сплошные и пунктирные кривые — настоящее исследование; символы — результаты прямого численного моделирования

$$\tau_{tur}^+ = \frac{v_t^+}{1 + v_t^+} \left(1 - \frac{y^+}{Re_\tau} \right). \quad (3.3)$$

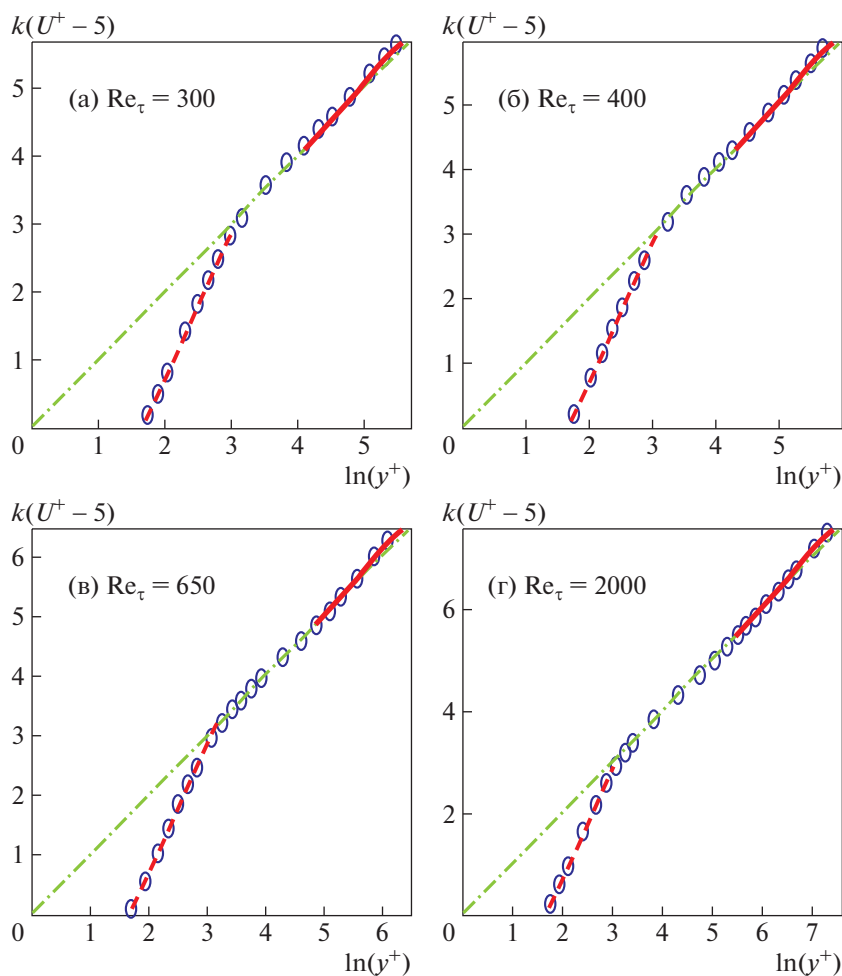
На фиг. 6 изображено распределение турбулентного сдвигового напряжения. Сопоставление с результатами прямого численного моделирования показывает, что предлагаемая формула дает хорошее описание турбулентного сдвигового напряжения (белые сплошные кривые). В частности, это справедливо при $y^+ < 20$, когда выражение (2.5) дает более точные профили по сравнению с соотношением (2.3).

3.3. Распределения средней продольной скорости

Фигуры 7–9 изображают распределения скорости $U^+(y^+)$, рассчитанные по предложенным выражениям, для различных Re_τ в сравнении с результатами прямого численного моделирования [8, 6].

Эти рисунки демонстрируют, что логарифмический профиль (штрихпунктирные кривые) дает точное описание $U^+(y^+)$ в логарифмическом подслое ($30 < y^+ < 0.2 Re_\tau$). Однако он приводит к неверным результатам в вязком и буферном подслоях и во внешней области.

Полученные распределения средней продольной скорости $U^+(y^+)$ описываются следующим образом:



Фиг. 9. Распределения средней продольной скорости в логарифмическом масштабе, построенные как графики величины $\kappa(U^+ - 5)$ в зависимости от $\ln(y^+)$; зеленые штрихпунктирные кривые — логарифмический закон; красные полужирные сплошные и пунктирные кривые — настоящее исследование; символы — результаты прямого численного моделирования

- При $y^+ > 0.2 \text{Re}_\tau$ (сплошные кривые) выражением (2.6) и уравнением (3.2) с граничным условием для U^+ , взятым как значение на логарифмическом профиле при $y^+ = 0.2 \text{Re}_\tau$.

- В вязком и буферном подслоях (штриховые кривые) выражением (2.5) и уравнением (3.2).

Распределения $U^+(y^+)$, полученные по предлагаемому методу (красные сплошные и штриховые кривые) дают хорошее согласие с результатами прямого численного моделирования. Полулогарифмические графики U^+ как функции y^+ больше подходят во внутренней области (фиг. 8). На фиг. 9 изображены графики распределений, построенные как зависимость величины $\kappa(U^+ - 5)$ от $\ln(y^+)$ в соответствии с формулой $\kappa(U^+ - 5) = \ln(y^+)$. Теоретическое логарифмическое распределение средней продольной скорости есть прямая линия, проходящая через начало координат и имеющая наклон 45° .

ВЫВОДЫ

В настоящем исследовании представлено общее аналитическое решение для турбулентной кинетической энергии. В равновесной области ($y^+ > 50$) оно превращается в полуаналитическое решение, полученное Нецу и Накагавой, тогда как при $y^+ < 20$ выведена универсальная функ-

ция для турбулентной кинетической энергии. Сопоставление равновесного решения и результатов прямого численного моделирования показывает, что коэффициент C_{kl} зависит от Re_τ . Для больших значений числа Re_τ этот коэффициент становится равным 0.86, что близко к эмпирическому значению, равному единице, предложенному Нецу и Накагавой. Предложены два аналитических соотношения для турбулентной вязкости: первое основывается на универсальной функции для турбулентной кинетической энергии (при $y^+ < 20$) и выражении ван Драйста для длины смешения; второе соотношение основывается на равновесном профиле турбулентной кинетической энергии (при $y^+ > 50$). Распределения средней продольной скорости вычислены при решении уравнения количества движения с использованием предложенных выражений для турбулентной вязкости. Сопоставление распределений средней продольной скорости, градиента скорости и турбулентного сдвигового напряжения с результатами прямого численного моделирования развитых турбулентных течений в каналах для $300 < Re_\tau < 2003$ показывает хорошее согласие в вязком и буферном подслоях и внешней области.

Данное исследование не претендует на получение общего решения для турбулентных течений, ограниченных стенками, учитывая сложность многомасштабной нелинейной задачи. Исследование предлагает только простые аналитические инструменты, которые способны дать интересные результаты для турбулентных течений в каналах в некотором диапазоне чисел Рейнольдса, вычисленных на основе скорости трения. Проведенная калибровка коэффициентов, входящих в предложенные формулы, имеет прямое отношение только к рассмотренной частной геометрии течения. Это может оказаться полезным при проверке аналитических формул для течений в открытых каналах с числами Рейнольдса, близкими к рассмотренным, для возможных приложений в инженерной гидравлике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sun J., Kuhn D., Naterer G. Eddy viscosity and Reynolds stress models of entropy generation in turbulent channel flows // ASME J. Fluids Eng. 2017. V. 139. P. 034501.
2. Marusic I., McKeon B.J., Monkewitz P.A., Nagib H.M., Smits A.J. Wall-bounded turbulent flows at high Reynolds numbers: Recent advances and key issues // Phys. Fluids. 2010. V. 22. P. 065103.
3. Wei T., Willmarth W.W. Reynolds-number effects on the structure of a turbulent channel flow // J. Fluid Mech. 1989. V. 204. P. 57–95.
4. Kim J., Moin P., Moser R.D. Turbulent statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number // J. Fluid Mech. 1987. V. 177. P. 133.
5. Moser R.D., Kim J., Mansour N.N. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$ // Phys. Fluids. 1999. V. 11. P. 943–945.
6. Iwamoto K., Suzuki Y., Kasagi N. Reynolds number effect on wall turbulence: toward effective feedback control // Int. J. Heat and Fluid Flow. 2002. V. 23. P. 678–689.
7. del Alamo J.C., Jimenez J., Zandonade P., Moser R.D. Scaling of the energy spectra of turbulent channels // J. Fluid Mech. 2004. V. 500. P. 135–144.
8. Hoyas S., Jiménez J. Scaling of velocity fluctuations in turbulent channels up to $Re_\tau = 2003$ // Phys. Fluids. 2006. V. 18. P. 011702.
9. Hanjalic K., Launder B.E. Contribution towards a Reynolds-stress closure for low-Reynolds-number turbulence // J. Fluid Mech. 1976. V. 74. P. 593–610.
10. Launder B.E. Low-Reynolds-number turbulence near walls // Rept. TFD/86/4, Dept. Mechanical Engineering, Univ. Manchester Inst. of Science and Technology, Manchester, England, UK.
11. Pope S.B. Turbulent Flows. Cambridge: University Press, 2000.
12. Tennekes H., Lumley J.L. A First Course in Turbulence. MIT Press, 1972.
13. Nezu I., Nakagawa H. Turbulence in Open-Channel Flows. Rotterdam: Balkema, 1993.
14. L'vov V.S., Pomyalov A., Tiberkevich V. Simple analytical model for entire turbulent boundary layer over flat plane: from viscous and mixing layers to turbulent logarithmic region // Env. Fluid Mech. 2005. V. 5. P. 373–386.
15. Absi R. Analytical solutions for the modeled k-equation // ASME J. Appl. Mech. 2008. V. 75. P. 044501.
16. Coles D. The law of the wake in turbulent boundary layer // J. Fluid Mech. 1956. V. 1. P. 191–226.
17. Hinze J.O. Turbulence. New York: McGraw-Hill, 1975.
18. Krug D., Philip J., Marusic I. Revisiting the law of the wake in wall turbulence // J. Fluid Mech. 2017. V. 811. P. 421–435.

19. *Patel V.C., Rodi W., Scheuerer G.* Turbulence models for near-wall and low Reynolds numbers flows: A review // AIAA J. 1985. V. 23. P. 1308–1319.
20. *Rahman M.M., Siikonen T.* An eddy viscosity model with near-wall modifications // Int. J. Num. Meth. Fluids. 2000. V. 49. P. 975–997.
21. *Absi R.* A simple eddy viscosity formulation for turbulent boundary layers near smooth walls // C. R. Mecanique. 2009. V. 337. P. 158–165.
22. *El Gharbi N., Absi R., Benzaoui A., Bennacer R.* An improved near wall treatment for turbulent channel flows // Int. J. Comput. Fluid Dyn. 2011. V. 25. P. 41–46.
23. *van Driest E.R.* On turbulent flow near a wall // J. Aero. Sci. 1956. V. 23. P. 1007–1011.
24. *Businger J.A., Arya S.P.S.* Heights of the mixed layer in the stable stratified planetary boundary layer // Adv. Geophys. V. 18A. P. 73–92.
25. *Hsu T.W., Jan C.D.* Calibration of Businger-Arya type of eddy viscosity model's parameters // J. Waterw. Port Coastal. Ocean. Eng., ASCE. 1998. V. 124. P. 281–284.
26. *Schlichting H., Gersten K.* Boundary Layer Theory. Springer, 2000.
27. *Absi R., Di Nucci C.* On the accuracy of analytical methods for turbulent flows near smooth walls // C. R. Mecanique. 2012. V. 340. P. 641–645.