

УДК 531.36

## ОСОБЕННОСТИ РАВНОВЕСИЯ ТЕЛА НА ШАРНИРНЫХ ОПОРАХ И СКОЛЬЗЯЩЕЙ ЗАДЕЛКЕ

© 2023 г. М. З. Досаев<sup>a,\*</sup>, В. А. Самсонов<sup>a</sup>

<sup>a</sup>НИИ механики МГУ, Москва, Россия

\*e-mail: dosayev@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 10.06.2022 г.

После доработки 26.07.2022 г.

Принята к публикации 31.07.2022 г.

Рассмотрено равновесие тела, опирающегося жесткими и телескопическими опорами на неподвижные шарниры. Показано, что добавление потенциально скользящего сочленения может не придать подвижности в конструкцию, как и добавление поворотного сочленения. Для скользящей опоры обнаружен парадокс: не выполняются уравнения, казалось бы, очевидного равновесия. Для регуляризации задачи вводятся отклонения. Внутренние реакции остаются статически неопределимыми, при этом величина этих реакций может оказаться значительной. Показано, что внешние реакции стремятся к бесконечности при уменьшении введенных отклонений. Это дает объяснение несовместности уравнений равновесия: пара бесконечных сил с нулевым плечом, вообще говоря, не эквивалентна нулевой силе, а может создать любой момент, в том числе уравновешивающий момент силы тяжести. Можно предположить, что часть крупных аварий со строительными конструкциями связана с указанными особенностями.

*Ключевые слова:* равновесие, скользящее сочленение, скользящая заделка, реакции связи, бесконечная реакция

DOI: 10.31857/S0572329922600402, EDN: JLAQVT

**1. Введение.** Известно (например, [1]), что задача о равновесии плоского твердого тела (рис. 1,а), опирающегося на два цилиндрических шарнира, является статически неопределимой. В таких задачах (рис. 1) кроме силы тяжести  $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$  ( $\mathbf{g}$  – ускорение свободного падения) рассматриваются реакции в шарнирах, которые традиционно раскладывают на нормальные  $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$  и тангенциальные  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ . При практической реализации подобных объектов возникают трудности из-за довольно больших значений неопределимых тангенциальных реакций. Подобные проблемы, в частности, могут быть связаны с предварительными напряжениями при сборке конструкции или с неодинаковыми температурными сжатиями/расширениями материалов. В технической практике для борьбы с этими трудностями используют дополнительный (потенциально подвижный) элемент сочленения, например, такой же шарнир в точке  $B$  (рис. 1,б), превращающий задачу в статически определимую (см., например, Задание С3, стр. 23 в [2]). Кроме того, для регулировки внутренних (например, реакции стержня  $\mathbf{R}_B$  на тело в точке  $B$ ) и внешних нагрузок такую потенциальную опору можно повернуть на некоторый угол  $\varphi$  к вертикали. Реакция стержня  $\mathbf{R}_B$  на рис. 1,б и далее на других рисунках внутренние реакции показаны пунктирной стрелкой. Три потенциально по-

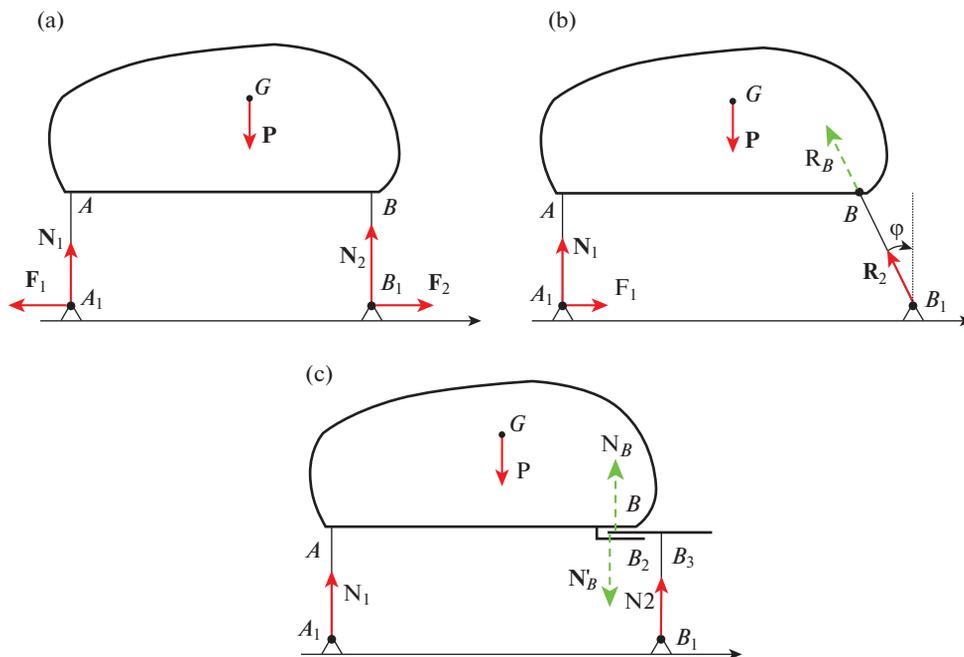


Рис. 1. Плоское тело на шарнирных опорах: (а) два цилиндрических шарнира; (б) дополнительный третий шарнир; (с) т-образная скользящая подставка.

движных сочленения позволяют избежать не только предварительных напряжений, но и температурных!

Однако, кроме поворотных сочленений, на практике применяются еще и скользящие заделки (например, типа телескопических), исследованию которых посвящен ряд работ в строительной научной литературе.

Плоские скользящие сочленения, используемые в сборных сегментных колоннах мостов для смягчения пагубных последствий землетрясений рассмотрены в [3]. В частности, экспериментально исследованы трибологические характеристики, производительность и долговечность стыков переставных скользящих соединений с использованием 3D-печатных форм и технологии компьютерного томографического сканирования.

Экспериментальные и аналитические исследования проведены в [4] для выбора предпочтительных параметров применения скользящего соединения в зданиях из каменной кладки.

В [5] проведено динамическое моделирование колонн с регулируемыми скользящими соединениями. Показано, что такие колонны являются эффективным инструментом для реализации общей сейсмической изоляции между настилом и трясущимся грунтом.

В железобетонных многоэтажных зданиях важная роль сейсмического взаимодействия каркасов конструкций с кладочными заполнениями была выявлена несколькими землетрясениями и исследована многими авторами. Одно из решений состоит в разделении каменной кладки на несколько подпанелей, относительно скользящих по определенным швам. В [6] исследуется сейсмическая оценка этого технологического решения в рамках проектирования землетрясений на основе известных данных.

Новая сейсмостойкая система, разработанная с целью контроля повреждений кладки и снижения пагубных последствий взаимодействия панели с рамой за счет комбинированного использования скользящих соединений, вставленных в кладку, предложена в [7].

Контактные задачи для круглой плиты со скользящей заделкой по торцу рассмотрены в [8]. Приведены примеры расчета взаимодействия плиты с плоским штампом.

В патенте [9] предложена составная конструкция с телескопическими стержнями и возможностью перемещения опор. Конструкция нацелена на учебно-исследовательскую работу студентов по выявлению зависимостей величин реакций связей и сил взаимодействия частей конструкции от размеров стержней.

Несомненно, оценка возможностей таких скользящих соединений представляет практический интерес.

Заменяем шарнир в точке  $B$  скользящей телескопической опорой (рис. 1,с). Левая опора  $AA_1$  остается жесткой, а вместо правой опоры  $BB_1$  будем использовать невесомую подставку – т-образный стержень  $B_2B_3$ . Тело  $ABCD$ , в принципе, может скользить по площадке  $B_2B_3$  без трения, оно могло бы повернуться вокруг шарнира  $A_1$  против часовой стрелки, но этому мешает ограничитель поворота площадки. После введения такой подставки вертикальное равновесие системы сохраняется, обе внешние реакции  $N_1$  и  $N_2$  определяются. Эта система представляет собой, практически, одно твердое тело! При потенциально, казалось бы, подвижном скользящем соединении связь полностью исключает любое перемещение тела и подставки, также как и в случае описанных выше трех цилиндрических шарниров. Однако внутренние реакции  $N_B$  и  $N'_B$  остаются статически неопределимыми, как и внутренние реакции всякого твердого тела.

**2. Парадокс телескопической опоры.** Ситуация кардинально меняется, когда мы повернем ограничитель и площадку на  $90^\circ$ , сделаем их вертикальными и превратим, таким образом, опору в телескопическую (рис. 2).

*2.1. Постановка задачи о скользящей опоре.* Рассмотрим плоскую механическую систему, состоящую из тяжелого тела  $A_1CDB$  массой  $m$  (рис. 2,а) и невесомого стержня  $B_2B_1$ . С одной стороны тело  $A_1CDB$  опирается на неподвижный цилиндрический шарнир  $A_1$ . В точке  $B$  к телу жестко прикреплена направляющая параллельно прямой  $AA_1$ , по которой может скользить без трения стержень  $B_2B_1$ . Стержень  $B_2B_1$ , в свою очередь, опирается на цилиндрический шарнир  $B_1$ . Прямая  $A_1B_1$ , соединяющая шарниры, горизонтальна. Для определенности введем геометрические размеры:  $b$  – расстояние между центром масс  $G$  тела и прямой  $AB$ ,  $a$  – расстояние между  $G$  и прямой  $AA_1$ ,  $l$  – длина опоры  $AA_1$ ,  $c = DC$  – расстояние между опорами.

На механическую систему действуют следующие внешние силы: сила тяжести  $\mathbf{P} = mg$  ( $g$  – ускорение свободного падения) и реакции в шарнирах  $A_1$  и  $B_1$ , которые мы разложим на нормальные  $N_1, N_2$  и тангенциальные  $F_1, F_2$  соответственно. Отметим, что поскольку в направляющей нет трения, между стержнем и телом возникают усилия, ортогональные этой направляющей. Здесь и в дальнейшем представим эти усилия в виде двух сил  $\mathbf{F}_B, \mathbf{F}'_B$ , которые действуют со стороны стержня на тело и являются внутренними для рассматриваемой системы. Точки приложения этих сил неизвестны, обозначим расстояния от точек приложения этих сил до шарнира  $B_1$  через  $l_B, l'_B$  соответственно.

Рассмотрим положение тела, при котором опоры вертикальны. Оказывается, что, несмотря на появившуюся потенциальную возможность опоры скользить по направляющей, реализовать эту возможность она не может. Вся конструкция не может повернуться вокруг шарнира  $A_1$ . Из-за того, что опоры параллельны, любой поворот тела

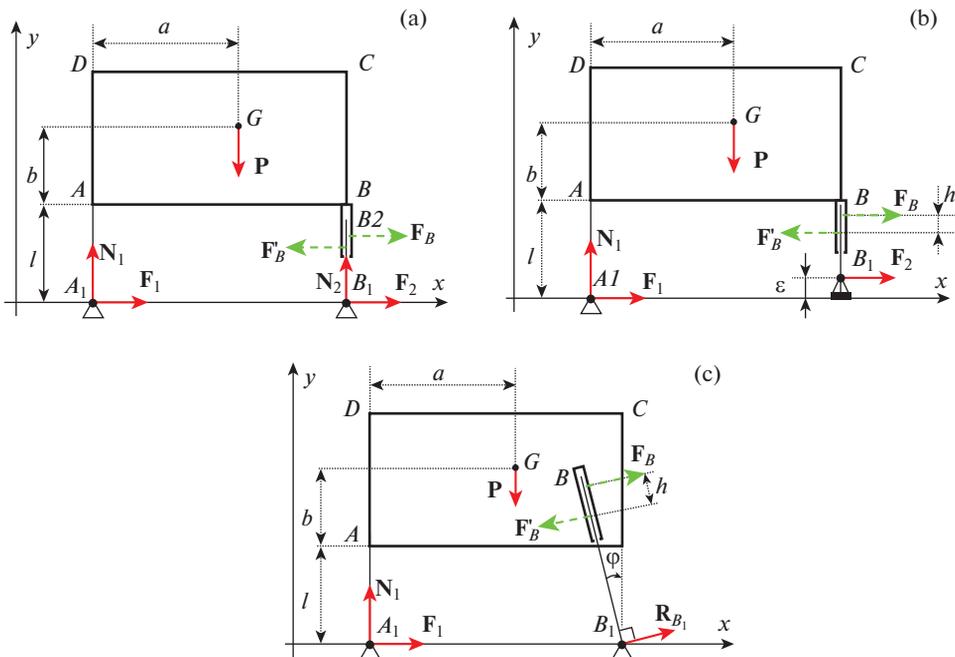


Рис. 2. Тело на телескопической опоре: (а) плоская постановка с потенциально подвижной опорой; (б) постановка под подвижную опору; (с) поворот подвижной опоры.

приведет к изменению расстояния между точками  $A_1$  и  $B_1$ . Таким образом, система не может сдвинуться из такого вертикального положения. Получаем, что это положение является положением равновесия. При этом уравнения равновесия не выполняются!

Из равновесия стержня получим:

$$\begin{aligned} N_2 &= 0 \\ F_2 - F_B + F'_B &= 0 \\ F_B l'_B - F'_B l''_B &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Учитывая (2.1), выпишем условия равновесия элементов системы:

$$\begin{aligned} mg &= N_1 \\ F_1 + F_2 &= 0 \\ amg &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Отметим, что третье уравнение (2.2), полученное из условия равенства моментов внешних сил относительно точки  $A_1$  приводит к парадоксальному результату:  $amg = 0$ . Момент силы тяжести равен нулю! Этот парадокс аналогичен парадоксу, описанному в [10].

**3. Отклонения в плоской постановке со скользящей опорой.** Внесем изменения в постановку задачи с потенциально скользящей опорой, введя в рассмотрение дополнительные элементы так, чтобы механическая система стала статически определимой.

*3.1. Изменение высоты шарнира скользящей опоры.* Сначала изменим высоту правого шарнира (рис. 2,б), приподняв его на высоту  $\varepsilon$ . Все внешние реакции становятся определенными.

Выпишем уравнения вертикального равновесия.

$$\begin{aligned} mg &= N_1 \\ F_1 + F_2 &= 0 \\ amg + \varepsilon F_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Из уравнений (3.1) легко определить величины горизонтальных реакций:  $F_1 = amg/\varepsilon$ ,  $F_2 = -amg/\varepsilon$ . Обе горизонтальные реакции стремятся к бесконечности при стремлении  $\varepsilon$  к нулю. Более того, мы можем вместо того, чтобы поднять правую опору, наоборот опустить ее на величину  $\varepsilon$ . Тогда значения реакций  $F_1$ ,  $F_2$  меняют знак. И, например, сила  $F_1$  при стремлении  $\varepsilon$  к нулю уже будет стремиться к минус бесконечности! Какая же реакция должна быть для твердых элементов при  $\varepsilon = 0$ ? Вопрос, конечно, интересен, но, очевидно, что на практике произойдет, в лучшем случае, деформация каких-то элементов конструкции, а, в худшем, их разрушение. Изучение таких ситуаций следует проводить методами деформируемого твердого тела.

Однако, даже при  $\varepsilon$  не равном нулю задача определения внутренних реакций  $\mathbf{F}_B$ ,  $\mathbf{F}'_B$  статически неопределима. Они могут оказаться достаточно большими, если контакт стержня с направляющей реализуется на малой площадке, и плечо между этими силами окажется малой величиной.

**3.2. Поворот скользящей опоры.** Теперь изменим задачу другим способом: повернем правую опору на некоторый угол  $\varphi$  (рис. 2,с). Реакция опоры  $R_{B_1}$  в точке  $B_1$  перпендикулярна направлению  $BB_1$ . Уравнения равновесия принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} mg &= N_1 + R_{B_1} \sin \varphi \\ F_1 + R_{B_1} \cos \varphi &= 0 \\ amg - cR_{B_1} \sin \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Получим из (3.2) величины реакций:

$$\begin{aligned} R_{B_1} &= amg/(c \sin \varphi) \\ F_1 &= -amg \cos \varphi/(c \sin \varphi) \\ N_1 &= mg(1 - a/c) \end{aligned}$$

Если устремить величину угла  $\varphi$  к нулю, тангенциальная реакция левой опоры  $F_1$  и реакция правой опоры  $R_{B_1}$  стремятся к бесконечности. Эти две силы образуют пару сил, которая даже с нулевым плечом может создать любой необходимый момент, в том числе, уравновешивающий момент силы тяжести.

Разрешение обнаруженного парадокса, как и в [10], состоит в том, что включение в систему потенциально скользящего сочленения приводит к острому конфликту с теми связями, которые остались “твердыми” и вызывает их бесконечно большие реакции. Иначе говоря, приводит к поломке конструкции.

**4. Пространственный случай.** Рассмотрим тяжелое тело  $ABCK$  массой  $m$  (рис. 3,а), опирающееся тремя жесткими параллельными опорами  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  на сферические шарниры.

Плоскости  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  перпендикулярны направлению опор, которые, в свою очередь, направлены по вертикали. Точка  $K$  – проекция центра масс тела  $G$  на плоскость  $ABC$ . Расстояние от точки  $K$  до прямых  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  обозначим соответственно  $d_1$ ,  $d_2$  и  $d_3$ ;  $h_1$ ,  $h_2$  и  $h_3$  – длины высот треугольника  $ABC$ , проведенных соответственно к этим же сторонам,  $AB = c$ ,  $d_4$  – расстояние от точки  $K$  до прямой  $Az$ ,  $b + l$  – расстояние от центра масс до плоскости шарниров. Введем систему координат  $Oxyz$ : ось  $Ox$  направим по  $A_1B_1$ , ось  $Oy$  – вертикальна, ось  $Oz$  дополняет систему до правой. Реак-

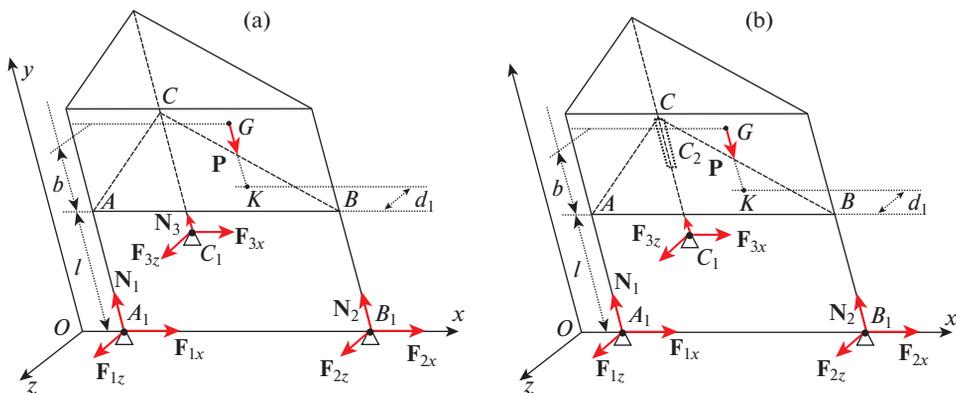


Рис. 3. Пространственное тело на трех сферических шарнирах: (а) три жесткие опоры; (б) две жестких и одна скользящая опоры.

ции в шарнирах разложим на составляющие, направленные по осям координат: нормальные  $N_1, N_2, N_3$ , направленные по  $Oy$ , и тангенциальные  $F_{1x}, F_{2x}, F_{3x}, F_{1z}, F_{2z}, F_{3z}$ , лежащие в плоскости шарниров.

Задача статически неопределимая. Рассмотрим уравнения равенства моментов сил относительно прямых, содержащих стороны треугольника  $ABC$ :

$$d_1 mg = h_1 N_3$$

$$d_2 mg = h_2 N_1$$

$$d_3 mg = h_3 N_2$$

Откуда возможно определить все три нормальные компоненты реакций. Подставив эти зависимости в уравнение для проекций сил на ось  $Oy$ , получим, в частности, следующее соотношение, справедливое для произвольного треугольника  $ABC$  и произвольно выбранной точки  $K$ :

$$d_1/h_1 + d_2/h_2 + d_3/h_3 = 1 \quad (4.1)$$

Соотношение (4.1) получено с помощью теоретико-механического подхода, но может быть доказано и чисто геометрически.

Помимо этого, возможно выписать следующие соотношения для величин тангенциальных реакций:  $F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0, F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} = 0$ .

Таким образом, как и в плоском случае известна только сумма соответствующих тангенциальных реакций.

Теперь заменим одну жесткую опору на скользящее сочленение (рис. 3,б). Пусть опора  $CC_1$  содержит направляющую, по которой может скользить без трения невесомый стержень  $C_1C_2$ . Аналогично плоскому случаю, уравнение равенства моментов сил относительно прямой  $A_1B_1$ , дает следующее противоречивое тождество:  $d_1 mg = 0$ . К такому же результату приведет и случай двух скользящих опор.

**5. Отклонения в пространственной постановке со скользящей опорой.** По аналогии с плоским случаем введем малые отклонения в постановку задачи о скользящей опоре.

*5.1. Изменение высоты шарнира скользящей опоры.* Приподнимем шарнир  $C_1$  (рис. 4,а) на высоту  $\epsilon$  над плоскостью шарниров. Задача по-прежнему является статически неопределимой, поскольку на 6 уравнений равновесия в задаче 8 неизвестных компонент реакций. Выпишем уравнения вертикального равновесия: проекции уравнения

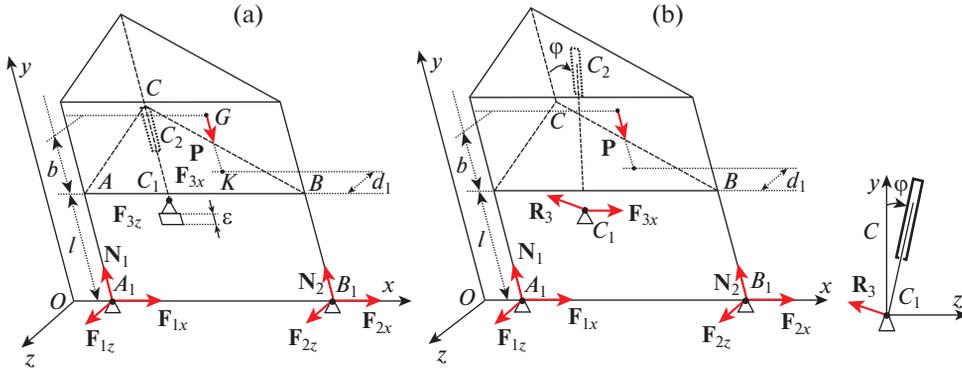


Рис. 4. Введение отклонений в пространственную постановку с потенциально подвижной опорой: (а) подставка под подвижную опору; (б) поворот подвижной опоры.

равновесия сил на оси координат, равенство моментов сил относительно прямой  $AB$ , равенство моментов сил относительно прямой  $A_1z$ , равенство моментов сил относительно прямой  $B_1z$ .

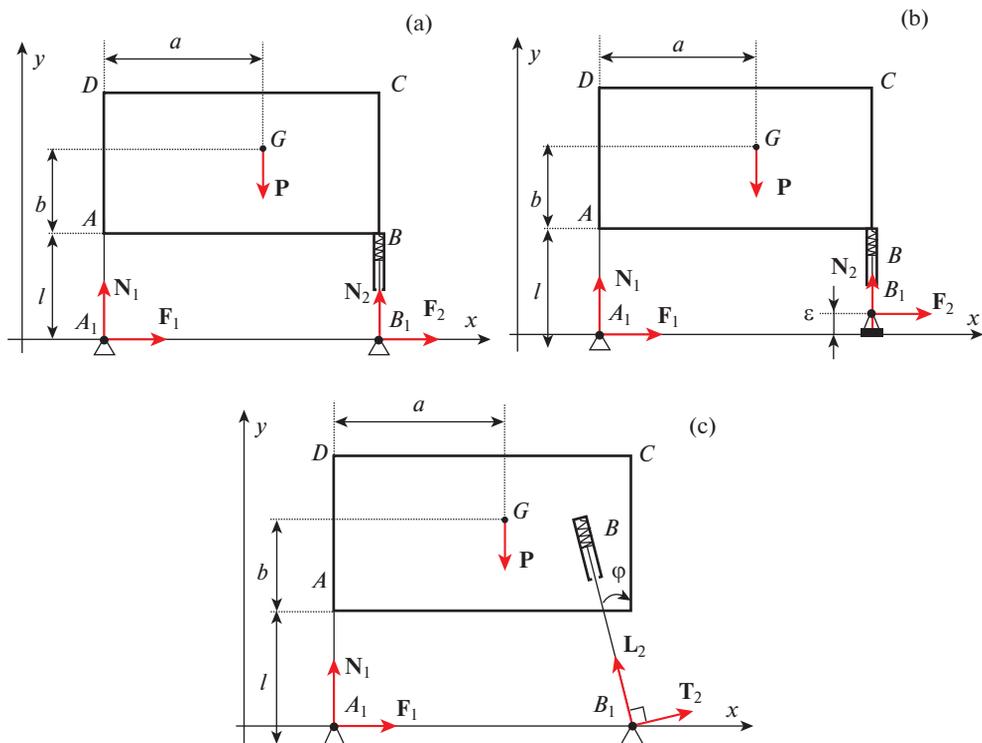
$$\begin{aligned}
 mg &= N_1 + N_2 \\
 F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} &= 0 \\
 F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} &= 0 \\
 d_1 mg + \varepsilon F_{3z} &= 0 \\
 d_4 mg + \varepsilon F_{3x} - c N_2 &= 0 \\
 (c - d_4) mg + \varepsilon F_{3x} - c N_1 &= 0
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Из уравнений (5.1) мы можем определить 4 компонента реакций:  $F_{3x} = 0$ ,  $F_{3z} = d_1 mg / \varepsilon$ ,  $N_1 = (c - d_4) mg / c$ ,  $N_2 = d_4 mg / c$ ; а также два соотношения на другие 4 компонента:  $F_{1x} + F_{2x} = 0$ ,  $F_{1z} + F_{2z} = -d_1 mg / \varepsilon$ . Если мы устремим  $\varepsilon$  к нулю,  $F_{3z} \rightarrow \infty$  и  $F_{1z} + F_{2z} \rightarrow \infty$ .

5.2. *Поворот скользящей опоры.* Повернем скользящую опору  $C_1C_2$  (рис. 4,б) относительно тела в плоскости  $C_1yz$  на угол  $\varphi$ . Пусть  $CE$  – высота треугольника  $ABC$ , проведенная к стороне  $AB$ . Выпишем уравнения равновесия: проекции уравнения равновесия сил на оси координат, равенство моментов сил относительно прямой  $AB$ , равенство моментов сил относительно прямой  $A_1z$ , равенство моментов сил относительно прямой  $A_1y$ .

$$\begin{aligned}
 mg &= N_1 + N_2 + R_3 \sin \varphi \\
 F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} &= 0 \\
 F_{1z} + F_{2z} + R_3 \cos \varphi &= 0 \\
 d_1 mg - h_1 R_3 \sin \varphi &= 0 \\
 d_4 mg - AE \sin \varphi R_3 - c N_2 &= 0 \\
 AE \cos \varphi R_3 - h_1 F_{3x} - c F_{2z} &= 0
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Из уравнений (5.2) мы можем определить 3 компонента реакций:  $R_3 = d_1 mg / (h_1 \sin \varphi)$ ,  $N_2 = (d_4 - AEd_1 / h_1) mg / c$ ,  $N_1 = (c - d_4 - BE d_1 / h_1) mg / c$ ; а также 3 соотношения на другие компоненты:  $F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0$ ,  $F_{1z} + F_{2z} = -R_3 \cos \varphi$  и  $h_1 F_{3x} + c F_{2z} = AE \cos \varphi R_3$ .



**Рис. 5.** Упругость правой скользящей опоры в плоском случае: (а) плоская постановка с потенциально подвижной упругой опорой; (б) подставка под подвижную упругую опору; (в) поворот подвижной упругой опоры.

Рассмотрим предельный переход  $\varphi \rightarrow 0$ , получим, что реакция  $R_3 \rightarrow \infty$ . Вместе с ней устремляется в бесконечность, по крайней мере, одна из тангенциальных реакций.

В случае обоих предельных переходов получаем неограниченность реакций опор. Эта неограниченность объясняет парадокс с силой тяжести, описанный выше.

**6. Упругая опора.** Попытаемся выяснить, можно ли снять остроту проблемы, если ввести в опоры упругие элементы. Вернемся к плоской задаче. Добавим в плоской задаче о скользящей опоре между телом и стержнем  $BB_1$  пружину некоторой жесткости  $k$  (рис. 5,а), при  $BB_1 = l_0$  пружина не деформирована. Нормальная реакция правой опоры равна усилию сжатой пружины:  $N_2 = F_{el2} = k\Delta l$ , где  $\Delta l = l - l_0$ .

Выпишем условия вертикального равновесия:

$$\begin{aligned} mg &= N_1 + N_2 \\ F_1 + F_2 &= 0 \\ amg - cN_2 &= 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Условия (6.1) выполняются только для единственного значения жесткости:  $k = amg/(c\Delta l)$ , когда упругость пружины обеспечит необходимую величину  $N_2$  реакции опоры  $B_1$ . При этом определить величины тангенциальных реакций невозможно.

**6.1. Изменение высоты шарнира упругой опоры.** Внесем в задачу об упругой скользящей опоре отклонение: изменим высоту правого шарнира (рис. 5,б). Нормальная ре-

акция правой опоры по-прежнему равна усилию сжатой пружины:  $N_2 = F_{e/2} = k\Delta l$ , но удлинение пружины изменилось  $\Delta l = l - \varepsilon - l_0$ . Выпишем уравнения вертикального равновесия.

$$\begin{aligned} mg &= N_1 + N_2 \\ F_1 + F_2 &= 0 \\ amg - cN_2 + F_2\varepsilon &= 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Из уравнений (6.2) определим компоненты реакций опор:

$$\begin{aligned} N_1 &= mg - k\Delta l \\ F_2 &= (mga - k\Delta lc) / \varepsilon \\ F_1 &= (k\Delta lc - mga) / \varepsilon \end{aligned}$$

Обе тангенциальные реакции стремятся к бесконечности при стремлении  $\varepsilon$  к нулю.

**6.2. Поворот упругой опоры.** Повернем правую упругую опору на некоторый угол  $\varphi$  (рис. 5,с). Реакцию правой опоры разложим на продольную  $L_2$  ( $L_2 = k\Delta l$ ) и поперечную  $T_2$  составляющие. Выпишем условия равновесия:

$$\begin{aligned} mg &= N_1 + L_2 \cos \varphi + T_2 \sin \varphi \\ F_{fr1} - L_2 \sin \varphi + T_2 \cos \varphi &= 0 \\ amg - c(L_2 \cos \varphi + T_2 \sin \varphi) &= 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Из (6.3) получим неизвестные реакции опор:

$$\begin{aligned} N_1 &= mg(1 - a/c) \\ T_2 &= (cL_2 \cos \varphi - amg) / (c \sin \varphi) \\ F_1 &= L_2 \sin \varphi - (cL_2 \cos \varphi - amg) \cos \varphi / (c \sin \varphi) \end{aligned}$$

Реакции  $T_2, F_1$  стремятся к бесконечности при  $\varphi \rightarrow 0$ .

**7. Заключение.** Показано, что наличие потенциально скользящего сочленения может не добавить подвижности конструкции, как и наличие поворотной. Для скользящей опоры обнаружен парадокс: уравнения равновесия не выполняются.

При этом величина реакций связи может оказаться значительной, даже принимать бесконечные значения. Дано объяснение парадокса, указанного выше: две бесконечные силы могут создать любой необходимый момент, в том числе уравновешивающий момент силы тяжести.

Мы показали, что несколько абсолютно твердых тел можно соединить идеальными (без трения) связями (шарниры, скользящая заделка), таким образом, что, с одной стороны, эти связанные тела образуют неизменяемую конфигурацию, то есть как бы превращаются в абсолютно твердое тело, с другой стороны, реакции наложенных связей могут принимать бесконечно большие значения. Поэтому такая конструкция не может быть реализована с помощью обычных материалов. Какие-то звенья вынуждены будут деформироваться или даже сломаться.

Предъявленная конструкция похожа на обычные типовые строительные конструкции. Подобные особенности равновесия конструкций с податливыми опорами должны быть известны в строительной механике, хотя авторы не смогли их найти в литературе. Это позволяет предположить, что часть крупных аварий со строительными конструкциями связана именно с особенностями, указанными в настоящей статье и в [10].

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 22-21-00303.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Березкин Е.Н.* Лекции по теоретической механике. Часть 1. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1967. 313 с.
2. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. *А.А. Яблонского*. Изд. 5, испр. М.: “ИНТЕГРАЛ-ПРЕСС”, 1998. 382 с.
3. *Liu Y.Q., Liang F., Au Francis T.K.* Experimental study of durable low-friction concrete contacts for precast segmental columns with resettable sliding joints // *Constr. Build. Mater.* 2022. V. 318. P. 126192. doi.org/.  
<https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.126192>
4. *Jiang Yu.-F., Guo Z.-X., Basha S.H., Chai Z.-L.* Sliding bed joint for seismic response control of ashlar stone masonry structures // *Eng. Struct.* 2021. V. 244. P. 112734. doi.org/.  
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112734>
5. *Liu Y.Q., Liang F., Au Francis T.K.* Precast segmental bridge columns with resettable sliding-joints – An inspiration from ancient Chinese pagodas // *Struct.* 2021. V. 33. P. 615–626. doi.org/.  
<https://doi.org/10.1016/j.istruc.2021.03.120>
6. *Di Trapani F., Bolis V., Basone F., Cavaleri L., Preti M.* Traditional vs. sliding-joint masonry infilled frames: Seismic reliability and EAL // *Proc. Struct. Integr.* 2020. V. 26. P. 383–392. doi.org/.  
<https://doi.org/10.1016/j.prostr.2020.06.049>
7. *Morandi P., Milanesi R.R., Magenes G.* Innovative solution for seismic-resistant masonry infills with sliding joints: in-plane experimental performance // *Eng. Struct.* 2018. V. 176. P. 719–733. doi.org/.  
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.09.018>
8. *Базаренко Н.А.* Контактные задачи для круглой плиты со скользящей заделкой по торцу // *Изв. РАН. МТТ.* 2014. № 3. С. 93–106.
9. *Маркин Ю.С., Маркин О.Ю., Рахматуллин Р.Р., Каркаев Р.Б., Штыкова Е.В., Хабибуллин Б.М.* Составная конструкция устройства с жесткой заделкой, шарнирно-подвижной опорой, невесомым стержнем и скользящим соединением. Патент на полезную модель: RU 124798 U1. 2013.
10. *Досаев М.З., Самсонов В.А.* Особенности динамики систем с упругими элементами и сухим трением // *Прикл. мат. мех.* 2021. Т. 85. № 4. С. 426–435.