

УДК 629.7

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ ТВЕРДОГО ТЕЛА (КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА) ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАЗВОРОТА

© 2023 г. М. В. Левский<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup> Научно-исследовательский институт космических систем им. А.А. Максимова – филиал Государственного космического научно-производственного центра им. М.В. Хруничева, Королев, Россия

\*e-mail: levskii1966@mail.ru

Поступила в редакцию 31.10.2021 г.

После доработки 08.02.2022 г.

Принята к публикации 09.03.2022 г.

Представлено кватернионное решение динамической задачи оптимального разворота твердого тела (например, космического аппарата) из известного начального в заданное конечное угловое положение. Оптимизация программы управления проводится с использованием комбинированного показателя, сочетающего квадратичный критерий качества и время разворота, минимизируемый функционал объединяет в заданной пропорции энергетические затраты и длительность маневра. На основе принципа максимума и кватернионных моделей и методов исследования управляемого движения твердого тела (космического аппарата) получено решение поставленной задачи. Построение оптимального вращения основано на дифференциальном уравнении, связывающем кинетический момент и кватернион ориентации твердого тела. В аналитической форме записаны условия оптимальности и изучены свойства оптимального движения. Представлены аналитические уравнения и расчетные формулы для нахождения оптимального управления. Закон управления сформулирован в виде явной зависимости управляющих переменных от фазовых координат. Даны ключевые соотношения, определяющие оптимальные значения параметров алгоритма управления кинетическим моментом. В случае динамически симметричного тела дается полное решение задачи разворота в замкнутой форме: получены аналитические зависимости как явные функции времени для управляющих переменных и соотношения для расчета параметров закона управления. Приводятся численный пример и результаты математического моделирования вращения космического аппарата как твердого тела при оптимальном управлении, демонстрирующие практическую реализуемость предложенного метода управления.

*Ключевые слова:* кватернион, кинетический момент, управляющая функция, оптимальность, комбинированный критерий качества, принцип максимума, закон управления, краевая задача

DOI: 10.31857/S0572329922060137, EDN: KGUTWN

**Введение.** Решается задача перевода твердого тела (в частности, космического аппарата (КА)) из исходного углового положения в положение заданной ориентации. Главное отличие рассматриваемой задачи и предлагаемого решения состоит в оптимизации на основе нового критерия качества. Построение оптимальной программы разворота основывается на кватернионных моделях и принципе максимума.

Управляемые вращения твердого тела и соответствующие оптимизационные задачи исследовались неоднократно [1–28]. Большое количество работ соответствуют вращению вокруг неподвижной оси [1–8]; при этом принципы оптимизации и алгоритмы управления различны (в том числе на базе нечеткой логики [2], обратных задач динамики [3] или с помощью прогнозирующих моделей [4]). Проблема разработки высокоэффективных алгоритмов управления ориентацией КА остается актуальной и сегодня. Большой практический интерес представляют аналитические решения задачи оптимального разворота в замкнутой форме, поскольку они дают готовые законы программного управления и изменения оптимальной траектории движения КА, которые могут непосредственно применяться на борту КА. Для плоских вращений КА вокруг одной из главных центральных осей инерции и пространственного вращения сферически-симметричного тела оптимальные управления угловым движением изучены достаточно подробно [1, 5, 6, 9]. Также известны решения для осесимметричных КА [10–13], задачи оптимального по времени разворота [1, 7, 11–18], и кинематические задачи разворота в различных постановках [18–22]. В работе [19] минимизировался модуль кинетического момента во время разворота, что крайне важно при использовании инерционных исполнительных органов, которые в настоящее время широко применяют для управления КА [23–25]. В [20, 21] рассматриваются задачи построения с помощью принципа максимума оптимальных законов изменения вектора кинетического момента твердого тела для разворота за фиксированное время [20] (с минимизацией интегрального квадратичного функционала качества с подынтегральным выражением, являющимся взвешенной суммой квадратов проекций вектора кинетического момента) или разворота динамически симметричного тела, используя комбинированные функционалы качества, один из которых объединяет в заданной пропорции время и интеграл от квадрата модуля вектора кинетического момента, а другой — расход времени и импульса модуля вектора кинетического момента на разворот твердого тела [21]. Причем в обеих работах управлением считается вектор кинетического момента твердого тела [20, 21].

Для КА с произвольным соотношением моментов инерции и произвольными начальным и конечным угловыми положениями аналитического решения задачи пространственной переориентации не найдено; рассматривались только специфические случаи решения задачи разворота (например, [1, 6]). Ниже приводится кватернионное решение задачи управления угловым движением КА, когда фазовыми переменными являются кватернион ориентации связанной системы координат относительно инерциального базиса и кинетический момент КА (как твердого тела), а оптимизация выполнена на основе комбинированного показателя качества, который объединяет в заданной пропорции энергетические затраты на переориентацию КА и время разворота; фактор времени позволяет ограничить длительность маневра, а наличие интеграла от квадратичной свертки по силовым моментам ограничивает максимальный управляющий момент в процессе разворота. Вопросы экономичности при управлении движением КА остаются до сих пор актуальными, из-за чего решаемая ниже задача управления является практически важной. В отличие от упомянутых исследований [20, 21], в статье решается динамическая задача оптимального разворота, когда управлением является силовой момент, действующий на корпус КА. Представленное решение отличается от ранее известных.

**1. Уравнения углового движения и постановка задачи управления.** Движение КА (как твердого тела) относительно центра масс описывается известным уравнением [1, 5]:

$$\dot{\mathbf{L}} + (\mathbf{I}^{-1}\mathbf{L}) \times \mathbf{L} = \mathbf{M} \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{L}$  — кинетический момент твердого тела (КА),  $\mathbf{I}$  — тензор инерции твердого тела,  $\mathbf{M}$  — главный момент сил  $\mathbf{M}$  (символ  $\times$  означает векторное произведение векторов). Управление движением КА относительно центра масс производится за счет измене-

ния силового момента  $\mathbf{M}$ . Особенностью управления во время космического полета является малость возмущающих моментов, вызванных сопротивлением среды и взаимодействием КА с внешними полями.

Пространственное движение КА вокруг центра масс будем описывать с помощью кватернионов (параметров Родрига–Гамильтона). Ориентацию связанного базиса относительно опорного базиса зададим кватернионом  $\Lambda$  (для удобства кватернион  $\Lambda$  считается нормированным  $\|\Lambda\| = 1$ ) [1]. Опорный базис полагаем инерциальным. Кинематическое уравнение, связывающее кинетический момент  $\mathbf{L}$  и кватернион ориентации  $\Lambda$  твердого тела, имеет вид [1]:

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ (\Gamma^{-1}\mathbf{L}) \quad (1.2)$$

где символ “ $\circ$ ” – знак умножения кватернионов [1, с. 11–20] (под кватернионным умножением на вектор понимается умножение на кватернион с нулевой скалярной частью).

Задачи, когда разворот выполняется из состояния покоя в состояние покоя, встречаются достаточно часто и имеют практическое значение. Выпишем краевые условия задачи оптимального управления для динамической системы (1.1), (1.2):

$$\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}, \quad \mathbf{L}(0) = 0 \quad (1.3)$$

$$\Lambda(T) = \Lambda_f, \quad \mathbf{L}(T) = 0 \quad (1.4)$$

где  $T$  – время окончания поворотного маневра. Кватернионы  $\Lambda_{\text{in}}$  и  $\Lambda_f$ , отражающие ориентацию связанных с КА осей в начальный и конечный моменты времени, имеют произвольные наперед заданные значения, удовлетворяющие условию  $\|\Lambda_{\text{in}}\| = \|\Lambda_f\| = 1$  (предполагается, что  $\Lambda_f \neq \Lambda_{\text{in}}$ ).

Полагаем, что управление угловым положением КА осуществляется относительно главных центральных осей инерции КА (т.е. оси связанного базиса параллельны главным центральным осям инерции КА). Эффективность управления оценивается интегральной величиной

$$G = \int_0^T (M_1^2/J_1 + M_2^2/J_2 + M_3^2/J_3) dt + k_0 T \quad (1.5)$$

где  $k_0 > 0$  – постоянный положительный коэффициент ( $k_0 \neq 0$ );  $M_i$  – проекции главного момента сил  $\mathbf{M}$  на главные центральные оси эллипсоида инерции КА;  $J_i$  – главные центральные моменты инерции КА. Сформулируем задачу оптимального управления следующим образом: требуется перевести твердое тело (КА) из состояния (1.3) в состояние (1.4) в соответствии с уравнениями (1.1), (1.2) с минимальным значением показателя (1.5). Время  $T$  не фиксировано. Решение  $\mathbf{M}(t)$  ищем в классе кусочно-непрерывных функций времени.

Принятый критерий качества позволяет найти программу вращения (переориентации) с минимальными затратами управляющих ресурсов и времени. Сформулированная задача управления отличается от решаемых ранее задач видом функционала (1.5), при котором управляющие переменные не могут быть неограниченно большими (даже в отсутствие ограничений на управление). Фактор времени, присутствующий в критерии оптимальности (1.5), ограничивает длительность  $T$  оптимального разворота некоторым конечным значением  $T_{\text{opt}}$  (коэффициент  $k_0 \neq 0$ ). И еще одна особенность – поскольку время  $T$  не фиксировано, то требуемый поворотный маневр реализуется при любых условиях разворота  $\Lambda_{\text{in}}$ ,  $\Lambda_f$  и заданных значениях  $J_1, J_2, J_3, k_0$ . Задача оптимального изменения кинетического момента во время разворота КА, когда качество программы управления определяется характеристикой (1.5), достаточно актуальна (подынтегральное выражение в (1.5) отражает энергию управляющих ускорений, а коэффициент  $k_0$  определяет максимальный управляющий момент в ходе разворота).

**2. Применение принципа максимума Л.С. Понтрягина.** Рассматриваемая задача оптимального управления (1.1)–(1.5) есть задача динамического оптимального разворота твердого тела [1], в которой  $\mathbf{L}$  и  $\Lambda$  – фазовые переменные, а управляющими функциями являются моменты  $M_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ ). Поставленную задачу решаем на основе необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Л.С. Понтрягина [29].

*2.1. Функция Гамильтона и сопряженная система уравнений.* Введем сопряженные переменные  $\varphi_i$ , соответствующие проекциям кинетического момента на оси связанного базиса  $L_i$ . Критерий оптимальности (1.5) не содержит позиционных координат (элементов кватерниона ориентации  $\Lambda$ ), поэтому вместо сопряженных переменных  $\psi_j$ , которые соответствуют компонентам  $\lambda_j$  кватерниона  $\Lambda$  ( $j = \overline{0, 3}$ ), используем следующие переменные  $r_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$  [26]:

$$\begin{aligned} r_1 &= (\lambda_0\psi_1 + \lambda_3\psi_2 - \lambda_1\psi_0 - \lambda_2\psi_3)/2, & r_2 &= (\lambda_0\psi_2 + \lambda_1\psi_3 - \lambda_2\psi_0 - \lambda_3\psi_1)/2 \\ r_3 &= (\lambda_0\psi_3 + \lambda_2\psi_1 - \lambda_3\psi_0 - \lambda_1\psi_2)/2 \end{aligned}$$

Впервые такую замену переменных предложили В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский и М.Б. Черток, Ю.В. Казначеев [1, 11]; позднее аналогичный прием использовали многие авторы [9, 10, 13, 18–24], в том числе при решении задач оптимального разворота твердого тела в постановках (1.1)–(1.4), но с другими функционалами оптимизации – чистые быстродействие и минимум энергозатрат (в частности, когда они содержат модуль вектора управляющего момента) [11, 27]. Оптимальные функции  $r_i$ , как компоненты вектора  $\mathbf{r}$ , и вектор  $\mathbf{r}$  удовлетворяют уравнениям [26]:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times (I^{-1}\mathbf{L})$$

$$\dot{r}_1 = L_3r_2/J_3 - L_2r_3/J_2, \quad \dot{r}_2 = L_1r_3/J_1 - L_3r_1/J_3, \quad \dot{r}_3 = L_2r_1/J_2 - L_1r_2/J_1 \quad (2.1)$$

Запишем функцию Гамильтона для задачи оптимального управления (1.1)–(1.5) [26]:

$$\begin{aligned} H &= -(M_1^2/J_1 + M_2^2/J_2 + M_3^2/J_3) - k_0 + \varphi_1(M_1 + (1/J_3 - 1/J_2)L_2L_3) + \\ &+ \varphi_2(M_2 + (1/J_1 - 1/J_3)L_1L_3) + \varphi_3(M_3 + (1/J_2 - 1/J_1)L_1L_2) + L_1r_1/J_1 + L_2r_2/J_2 + L_3r_3/J_3 \end{aligned}$$

Согласно принципу максимума уравнения для сопряженных функций  $\varphi_i$  имеют вид [29]:

$$\dot{\varphi}_i = -\frac{\partial H}{\partial L_i} \quad (i = \overline{1, 3})$$

В результате получим следующую сопряженную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= L_3\varphi_2(1/J_3 - 1/J_1) + L_2\varphi_3(1/J_1 - 1/J_2) - r_1/J_1 \\ \dot{\varphi}_2 &= L_1\varphi_3(1/J_1 - 1/J_2) + L_3\varphi_1(1/J_2 - 1/J_3) - r_2/J_2 \\ \dot{\varphi}_3 &= L_2\varphi_1(1/J_2 - 1/J_3) + L_1\varphi_2(1/J_3 - 1/J_1) - r_3/J_3 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Вектор  $\mathbf{r}$  является постоянным относительно инерциального базиса и  $|\mathbf{r}| = \text{const} \neq 0$ . Решение  $\mathbf{r}(t)$  системы (2.1) зависит от начальной  $\Lambda_{\text{in}}$  и конечной  $\Lambda_f$  ориентаций КА. Оптимальная функция  $\mathbf{r}(t)$  определяется кватернионом  $\Lambda(t)$  [1, 26]:

$$\mathbf{r} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_E \circ \Lambda, \quad \text{где} \quad \mathbf{c}_E = \text{const} = \Lambda_{\text{in}} \circ \mathbf{r}(0) \circ \tilde{\Lambda}_{\text{in}}$$

(составляющие вектора  $\mathbf{c}_E$  – проекции вектора  $\mathbf{r}$  на оси инерциального базиса);  $\tilde{\Lambda}$  – кватернион, сопряженный кватерниону  $\Lambda$  [1, с. 11–20]. Считается, что  $\mathbf{r}(0) \neq 0$  (в противном случае  $r_1 = r_2 = r_3 \equiv 0$  и дальнейшее решение задачи теряет смысл). Направление вектора  $\mathbf{c}_E$  зависит от начального и конечного положений КА. Для того, чтобы КА имел требуемую ориентацию на правом конце  $\Lambda(T) = \Lambda_f$ , необходимо определить век-

тор  $\mathbf{c}_E$  (или значение вектора  $\mathbf{r}$  в начальный момент времени) исходя из получающихся при этом решений системы (1.2).

2.2. *Условия максимума гамильтониана и структура оптимального управления.* Гамильтониан  $H$  – квадратичная функция вектора управления  $\mathbf{M}$ , и ее максимум определяется необходимыми условиями экстремума  $\partial H/\partial M_i = 0$ , которым удовлетворяют значения

$$M_i = J_i \varphi_i / 2 \quad (2.3)$$

Замкнутая система уравнений (1.1), (1.2), (2.1)–(2.3) определяет оптимальное решение. Задача построения оптимальной программы управления сводится к решению системы уравнений углового движения КА (1.1), (1.2), сопряженных уравнений (2.2) и уравнений (2.1) при условии, что управляющие функции  $M_i$  вычисляются в соответствии с (2.3) (системой уравнений (2.1)–(2.3) формализуются необходимые условия оптимальности для исходной задачи оптимального управления (1.1)–(1.5)).

Обозначим  $r_0 = |\mathbf{r}(t)|$ ,  $L_m = |\mathbf{L}|$ . С учетом условия  $\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}(T) = 0$  система уравнений (1.1), (2.1)–(2.3) имеет единственное решение, которое удовлетворяет соотношениям:

$$\varphi_i = (\rho - t)r_i/J_i \quad (2.4)$$

$$L_i = L_m(t)r_i/r_0 \quad (2.5)$$

где  $\rho = \text{const} > 0$  – скалярная величина (факт соответствия (2.5) уравнениям (2.1) легко проверить, подставив равенства (2.5) в уравнения движения (1.1) с учетом (2.3) и (2.4)).

Значение  $\mathbf{r}(0)$  таково, чтобы в результате интегрирования уравнений (1.1), (1.2), (2.1)–(2.3) с начальными условиями  $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}$  для траектории вращения  $\Lambda(t)$  выполнялось равенство  $\Lambda(T) = \Lambda_f$ . Если рассматривать нормированный вектор  $\mathbf{p} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ , то краевая задача принципа максимума заключается в определении значения вектора  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$  и положительной величины  $r_0$ , при которых решение системы дифференциальных уравнений (1.1), (1.2), (2.1), (2.2), (2.4) с одновременным выполнением (2.3) удовлетворяло условиям разворота (1.3), (1.4) (с учетом соотношений  $r_i = r_0 p_i$ ). В оптимальном решении сопряженные переменные  $\varphi_i$  подчиняются уравнениям (2.4), и оптимальный управляющий момент  $\mathbf{M}$  имеет значение

$$M_i = (\rho - t)r_i/2 \quad (2.6)$$

Как видно из (2.1), (2.6), при оптимальном управлении силовой момент  $\mathbf{M}$  действует вдоль прямой, неподвижной в инерциальной системе координат. Поэтому при нулевом начальном и конечном кинетическом моментах решение системы (1.1), (2.1)–(2.3) описывает движение, при котором кинетический момент КА  $\mathbf{L}$  имеет постоянное направление в инерциальной системе координат, причем это решение единственное (так как  $\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}(T) = 0$ ).

Истинность решения (2.4), (2.5) для системы дифференциальных уравнений (1.1), (2.1)–(2.3) подтверждается последовательной подстановкой зависимостей (2.4) в уравнения (2.2) с учетом соотношений (2.1), (2.5) для всех  $i = 1, 2, 3$  (равенства (2.5) непосредственно следуют из системы (1.1), (2.1), (2.6)). Если обозначить  $\boldsymbol{\varphi}$  – вектор, компонентами которого являются сопряженные функции  $\varphi_i$ , то система (2.2) принимает вид

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\varphi} \times (I^{-1}\mathbf{L}) + I^{-1}(\mathbf{L} \times \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{r}) \quad (2.7)$$

Подставим значения  $\boldsymbol{\varphi}$  и  $\mathbf{L}$ , рассчитанные в соответствии с найденным решением (2.4), (2.5), в уравнение (2.7). Вычисление левой части (2.7) с учетом (2.1), (2.4) дает следующее:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varphi}} &= (\rho - t)I^{-1}\dot{\mathbf{r}} - I^{-1}\dot{\mathbf{r}} = (\rho - t)I^{-1}(\mathbf{r} \times (I^{-1}\mathbf{L})) - I^{-1}\dot{\mathbf{r}} = \\ &= I^{-1}(L_m(r - t)\mathbf{r} \times (I^{-1}\mathbf{r})/r_0 - \dot{\mathbf{r}}) \end{aligned}$$

Подстановка (2.4), (2.5) в правую часть уравнения (2.7) дает следующий результат:

$$\begin{aligned} (I^{-1}(\rho - t)\mathbf{r}) \times (I^{-1}\mathbf{L}) + I^{-1}(\mathbf{L} \times (I^{-1}(\rho - t)\mathbf{r}) - \mathbf{r}) &= (I^{-1}(\rho - t)\mathbf{r}) \times (I^{-1}L_m\mathbf{r})/r_0 + \\ + I^{-1}(L_m\mathbf{r} \times (I^{-1}(\rho - t)\mathbf{r})/r_0 - \mathbf{r}) &= I^{-1}(L_m(\rho - t)\mathbf{r} \times (I^{-1}\mathbf{r})/r_0 - \mathbf{r}) \end{aligned}$$

В итоге убедились, что соотношения (2.4), (2.5) превращают уравнение (2.7) в тождество. Следовательно, зависимости (2.4), (2.5) есть решение системы уравнений (1.1), (2.1)–(2.3).

2.3. *Свойства оптимального управления.* Поскольку вращение с минимальным значением (1.5) одновременно удовлетворяет уравнениям (2.1) и (2.5), то оптимальное изменение кинетического момента описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{\mathbf{L}} = \dot{L}_m\mathbf{L}/L_m + \mathbf{L} \times (I^{-1}\mathbf{L})$$

Для исследования свойств оптимального решения  $\mathbf{M}(t)$  введем скалярную функцию  $m(t)$ , равную скалярному произведению векторов  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{p}$ . Тогда  $\mathbf{M} = m(t)\mathbf{p}$ . В начальный момент времени  $t = 0$  модуль  $|\mathbf{M}(0)| = m_0 = r_0\rho/2$ . Значение константы  $\rho = T/2 = 2m_0/r_0$ . Следовательно,  $m(t) = m_0 - r_0t/2 = m_0(1 - 2t/T)$ . Перепишем закономерность (2.6) в следующем виде

$$M_i = m_0(1 - 2t/T)p_i \quad (2.8)$$

Управление (2.8) динамической системой (1.1), (1.2), когда модуль момента  $\mathbf{M}$  изменяется как кусочно-линейная функция времени, удовлетворяет необходимым условиям оптимальности для критерия (1.5) (направление момента  $\mathbf{M}$  параллельно прямой, неподвижной относительно инерциального базиса). Так как разворот выполняется из состояния покоя в состояние покоя, то такое управление кинетическим моментом всегда можно осуществить (замкнутая система (1.1), (2.1)–(2.3) имеет решение при любых значениях  $\Lambda_{in}$  и  $\Lambda_f$ ).

Изучим свойства функции  $L_m(t)$ . Подстановка (2.5) в (1.1) с учетом (2.1) дает  $\mathbf{M} = \dot{L}_m\mathbf{r}/r_0$ . После сравнения с соотношениями (2.8) заключаем, что  $\dot{L}_m = m(t) = m_0 - r_0t/2$ . Из (2.3) получим  $\boldsymbol{\varphi} = 2I^{-1}\mathbf{M} = 2\dot{L}_mI^{-1}\mathbf{p}$ , что совпадает с (2.4), если  $(\rho - t)r_0 = 2\dot{L}_m$  и  $\ddot{L}_m = -r_0/2$ . На концах траектории вращения (в точках  $t = 0$  и  $t = T$ ) имеем  $L_m(0) = L_m(T) = 0$  (поскольку по условиям разворота  $\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}(T) = 0$ ). В точке  $t = T/2$  кинетический момент максимален и  $\mathbf{M}(T/2) = 0$ . Скалярная функция  $L_m(t)$  в оптимальном решении имеет вид:  $L_m(t) = m_0t(1 - t/T)$ , а время разворота и максимальный модуль силового момента связаны соотношением  $m_0 = r_0T/4$ . Оптимальный закон изменения кинетического момента выглядит следующим образом:

$$L_i = m_0t(1 - t/T)p_i \quad (2.9)$$

Оптимальные функции  $L_i(t)$ ,  $\varphi_i(t)$ ,  $r_i(t)$  соответствуют требованиям (2.4), (2.5), в которых переменные  $r_i(t)$  являются решением системы (2.1). Оптимальные управления определяются выражениями (2.8). Оптимальным (в смысле минимума функционала (1.5)) является вращение, при котором направление кинетического момента КА остается неизменным относительно инерциальной системы координат (векторы  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{L}$  параллельны на всем интервале управления). Управление (2.6) оптимально, потому что оно – единственное решение системы уравнений (1.1), (2.1)–(2.3), которая отражает необходимые условия оптимальности.

Еще одним основным свойством оптимального разворота КА является постоянство соотношения кинетической энергии вращения  $E$  к квадрату модуля кинетического момента КА во все время движения (на всем отрезке времени  $[0, T]$ ). Докажем сделанное утвержде-

ние. Найдем  $E = L_m^2(r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3)/(2r_0^2)$  и  $E/|\mathbf{L}| = (r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3)/(2r_0^2) = \text{const}$  (напомним,  $r_0 = |\mathbf{r}(t)| = \text{const}$ ). Нетрудно показать, что у оптимального вращения, которое подчиняется уравнениям (2.1), (2.5), наблюдается закономерность  $r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3 = \text{const}$ . Для проверки этого утверждения достаточно продифференцировать по времени левую часть указанного равенства с учетом зависимостей (2.1), (2.5) и убедиться, что полученная производная равна нулю после подстановки  $\dot{r}_i$  по формулам (2.1) и затем  $L_i$  по выражениям (2.5).

Обозначим  $L_{\max}$  – максимальное значение функции  $L_m(t)$ . При оптимальном изменении кинетического момента  $\mathbf{L}(t)$  вращение имеет свойство симметрии и характеризуется следующими закономерностями:

$$\begin{aligned} \Lambda \circ \mathbf{M}(T-t) \circ \tilde{\Lambda} &= -\Lambda \circ \mathbf{M}(t) \circ \tilde{\Lambda}, & \Lambda \circ \mathbf{L}(T-t) \circ \tilde{\Lambda} &= \Lambda \circ \mathbf{L}(t) \circ \tilde{\Lambda} \\ \max_{t < T/2} m(t) &= -\min_{t > T/2} m(t) = m(0) \\ L_{\max} &= |\mathbf{L}(T/2)|, & \int_0^{T/2} |\mathbf{L}(t)| dt &= \int_{T/2}^T |\mathbf{L}(t)| dt \end{aligned}$$

Максимальный управляющий момент  $m_0 = |\mathbf{M}(0)| = |\mathbf{M}(T)|$ . Свойство оптимального решения  $m(T) = -m(0)$  следует из структуры функции  $L_m(t)$ , а именно

$$L_m(0) = 0, \quad L_m(T) = 0, \quad L_m(t) = \int_0^t (m_0 - r_0 t/2) dt = m_0 t(1 - t/T)$$

**2.4. Подтверждение единственности оптимального решения.** Пусть  $\mathbf{q}$  – орт, параллельный моменту  $\mathbf{M}$ , причем в начальный момент времени  $t = 0$  направления векторов  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{q}$  совпадают. Тогда  $\boldsymbol{\phi} = fI^{-1}\mathbf{q}$ , где  $f$  – скалярная функция, у которой  $f(0) > 0$ . В окрестности точки  $t = 0$  имеем  $\mathbf{M} \parallel \mathbf{L}$  и  $\mathbf{L} = \chi\mathbf{q}$ , где  $\chi$  – скалярная величина. Подставим  $\boldsymbol{\phi} = fI^{-1}\mathbf{q}$  в уравнения  $\dot{\mathbf{M}} = I\boldsymbol{\phi}/2$  и (1.1) с учетом условия  $\mathbf{L} = \chi\mathbf{q}$  и соотношений (2.1). Получим следующее уравнение

$$\mathbf{q}\dot{\chi} + \dot{\mathbf{q}}\chi + (\chi I^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q}\chi = m(t)\mathbf{q} \quad (2.10)$$

Сумма  $\dot{\mathbf{q}}\chi + (\chi I^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q}\chi$  ортогональна орту  $\mathbf{q}$  или равна нулю (всегда  $\mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0$ , так как  $|\mathbf{q}| = 1$ ); символ  $\cdot$  означает скалярное произведение векторов. Уравнение (2.10) будет выполнено в единственном случае, если  $\dot{\chi} = m(t)$  и  $\dot{\mathbf{q}} = -(\chi I^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q}$ . Теперь подставим равенства  $\boldsymbol{\phi} = f(t)I^{-1}\mathbf{q}$  и  $\mathbf{L} = \chi\mathbf{q}$  в правую и левую части уравнения (2.7). Рассмотрим левую часть (2.7)

$$fI^{-1}\dot{\mathbf{q}} + fI^{-1}\dot{\mathbf{q}} = fI^{-1}\dot{\mathbf{q}} - fI^{-1}((\chi I^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q})$$

(уравнения (1.1), (2.2) должны выполняться одновременно, поэтому свойство  $\dot{\mathbf{q}} = -(\chi I^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q}$  взято из (2.10)). Теперь найдем правую часть уравнения (2.7)

$$(fI^{-1}\mathbf{q}) \times (I^{-1}\chi\mathbf{q}) + I^{-1}(\chi\mathbf{q} \times (fI^{-1}\mathbf{q}) - \mathbf{r}) = -f^{-1}((\chi I^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q}) - I^{-1}\mathbf{r}$$

Приравняв левую и правую части уравнения (2.7) получаем  $\dot{\mathbf{f}}\mathbf{q} = -\mathbf{r}$ , из чего заключаем:  $\dot{f} = -r_0$  и  $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p} = \mathbf{r}/r_0$  (так как  $f(0) > 0$ , а  $f(T) < 0$ , и потому  $\dot{f} < 0$ ). Учитывая, что  $\boldsymbol{\omega} = I^{-1}\mathbf{L}$  есть угловая скорость, приходим к следующему выводу: если существует момент времени  $t$ , когда угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}$  и вектор сопряженных переменных  $\boldsymbol{\phi}$  параллельны, то они параллельны на всем интервале управления  $0 < t < T$ . По условиям задачи управления  $\mathbf{L}(0) = 0$  и  $\mathbf{L}(T) = 0$ , из-за чего векторы  $\boldsymbol{\phi}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  параллельны как мини-

мум два раза – в самом начале разворота и в самом конце разворота ( $\omega = ht\phi$  при  $t \rightarrow 0$ , и  $\omega = -h(T-t)\phi$  при  $t \rightarrow T$ ). Поэтому заключаем, что при оптимальном управлении на всем отрезке времени  $t \in [0, T]$  имеет место свойство  $\mathbf{L} \parallel \mathbf{r}$ . Следовательно, оптимальное вращение обязательно удовлетворяет соотношениям (2.4), (2.5).

Доказано, что зависимости (2.4), (2.5) – единственное решение системы уравнений (1.1), (2.1)–(2.3) при условии  $\mathbf{L}(0) = 0$ ,  $\mathbf{L}(T) = 0$ . В момент времени  $t = T/2$  силовой момент  $\mathbf{M}$  обнуляется  $\mathbf{M}(T/2) = 0$ , а кинетический момент КА принимает максимальное значение.

**3. Нахождение основных констант оптимального управления.** Поскольку гамильтониан  $H$  не зависит от времени в явном виде и время окончания маневра  $T$  не фиксировано, то на оптимальной траектории  $H = \text{const} = 0$  [30]. Поэтому

$$H = -k_0 + (L_m/r_0 + (\rho - t)^2/4)(r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3) = 0$$

На основании необходимого условия оптимальности  $H = 0$  найдем время разворота, максимальную величину управляющего момента и максимальный кинетический момент. Из структуры гамильтониана условие  $H(T) = 0$  принимает вид

$$H = M_1\phi_1 + M_2\phi_2 + M_3\phi_3 - (M_1^2/J_1 + M_2^2/J_2 + M_3^2/J_3) - k_0 = 0$$

(так как в конечный момент времени  $t = T$  кинетический момент  $\mathbf{L}(T) = 0$ ). Учитывая (2.4), (2.6), получим уравнение:  $C^2 r_0^2 (\rho - T)^2/4 - k_0 = 0$ , из которого  $C^2 r_0^2 T^2 = 16k_0$  и  $m_0 = \sqrt{k_0}/C$ , где  $C = \sqrt{p_{10}^2/J_1 + p_{20}^2/J_2 + p_{30}^2/J_3}$ ,  $p_{i0} = p_i(0)$  (так как время разворота  $T = 4m_0/r_0$ , и  $\rho = 2m_0/r_0$ ).

Если  $L_m = 0$ , то гамильтониан равен  $H = m_0^2 C^2 - k_0 = 0$ .

Если  $t = T/2$ , то  $m(t) = |\mathbf{M}| = 0$  и  $H(T/2) = r_0 L_{\max} C^2 - k_0 = 0$ , откуда  $L_{\max} = k_0/(r_0 C^2)$ .

Значение  $r_0$  для оптимального решения равно  $r_0 = 4\sqrt{k_0}/(CT)$  и связано с максимальным управляющим моментом  $m_0$  и временем разворота  $T$  зависимостью  $r_0 = 4m_0/T$ . Максимальный модуль кинетического момента определяется параметром  $m_0$ . Длительность оптимального разворота  $T$  зависит от максимального управляющего момента  $m_0$  и значения интеграла

$$F = \int_0^T |\mathbf{L}(t)| dt \quad (3.1)$$

и составляет  $T = \sqrt{6F/m_0}$ , или  $T = \sqrt{6S/\sqrt{k_0}}$ , где  $S$  – функционал пути [22]:

$$S = \int_0^T \sqrt{J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2} dt, \quad S = FC$$

Соответственно,  $r_0 = 4m_0\sqrt{m_0}/(6F)$ ,  $L_{\max} = \sqrt{3F\sqrt{k_0}}/(8C)$ , так как  $L_{\max} = m_0 T/4 = \sqrt{3m_0 F}/8$  (напомним, что  $m_0 = \sqrt{k_0}/C$ ). Максимальная энергия вращения  $E_{\max} = 3FC\sqrt{k_0}/16 = 3S\sqrt{k_0}/16$ .

Значения  $F$  и  $S$  не зависят от характера изменения модуля  $|\mathbf{L}(t)|$  и определяются исключительно кватернионом разворота  $\Lambda_t = \tilde{\Lambda}_{\text{in}} \circ \Lambda_t$  и моментами инерции КА  $J_1, J_2, J_3$  [22]. Нетрудно доказать, что найденные значения времени  $T$ , а также остальных характеристик разворота действительно оптимальны по критерию (1.5). Вычислим значение  $G$  для закона (2.8).

$$G = k_0 T + m_0^2 C^2 T/3 = k_0 T + 12F^2 C^2 / T^3, \text{ потому что } F = m_0 T^2/6, \text{ а значит } m_0 = 6F/T^2$$

Минимум  $G$  достигается в точке  $T = \sqrt{6FC/\sqrt{k_0}}$ , при котором  $m_0 = \sqrt{k_0}/C$ .

$$L_{max} = \sqrt{3F\sqrt{k_0}/(8C)}$$

Как видим, время оптимального разворота  $T$  зависит только от коэффициента  $k_0$  минимизируемого функционала. Величина (1.5) при оптимальном управлении равна  $G = 4k_0T/3$ .

Если рассматривать приведенные управления  $u_i = M_i/\sqrt{J_i}$  [11], то  $|\mathbf{u}|^2$  характеризует энергетику управляющих воздействий, интеграл

$$Q = \int_0^T (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) dt$$

соответствует энергетическим затратам на разворот, где  $T$  – время, затраченное на перевод КА из положения (1.3) в положение (1.4);  $\mathbf{u}$  – приведенный вектор управления, компонентами которого являются  $u_i$ . Значение показателя качества (1.5) таково  $G = Q + k_0T$ .

В переменных  $u_i$  гамильтониан в начальный и конечный моменты времени равен  $H = |\mathbf{u}|^2 - k_0 = 0$ , так как при оптимальном управлении  $\varphi_i = 2u_i/\sqrt{J_i}$  и  $\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}(T) = 0$ . Отсюда следует важный вывод: модуль приведенного управления в начальный и конечный моменты времени одинаковый и не зависит от начального и конечного положений КА и его моментов инерции, а определяется только коэффициентом  $k_0$  минимизируемого функционала;  $|\mathbf{u}(0)| = |\mathbf{u}(T)| = \sqrt{k_0}$ . Максимальная величина силового момента для оптимального вращения не зависит от значения “функционала пути”  $S$  и от интеграла (3.1).

Решение задачи оптимального управления (в смысле минимума (1.5)) описывается уравнениями (2.1), (2.4), а управляющие функции  $M_i$  и компоненты кинетического момента  $L_i$  изменяются по законам (2.8), (2.9). Решение (2.8), (2.9) оптимально, так как оно является единственным, что соответствует необходимым условиям оптимальности. Параметр  $m_0$  в законах (2.8), (2.9) определяет максимальную величину управляющего момента и максимальный модуль кинетического момента. Константы  $r_0$ ,  $m_0$  полностью определяют траекторию вращения во время оптимального управления кинетическим моментом.

Оптимальный управляющий момент  $\mathbf{M}$  связан с кватернионом  $\Lambda$  следующим образом:

$$\mathbf{M} = m_0(1 - 2t/T)\tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{in}\mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{in} \circ \Lambda \quad (3.2)$$

Любое отличное от (3.2) управление заведомо хуже (в смысле минимума показателя качества (1.5)), потому что не является решением системы уравнений (1.1), (2.1)–(2.3) и не отвечает необходимым условиям оптимальности, сформулированным системой (2.1)–(2.3).

Задача построения оптимального управления  $\mathbf{M}(t)$  состоит главным образом в нахождении такого значения  $m_0$  и вектора  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$ , чтобы в результате вращения твердого тела в соответствии с уравнениями (1.2), (2.1), (2.9) выполнялись равенства  $\Lambda(T) = \Lambda_f$  и  $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$ . Для получения функциональной зависимости управлений от фазовых координат необходимо решить уравнения (2.1), которые для закона (2.5) с учетом формул  $r_i = r_0 p_i$  принимают следующий вид

$$\dot{p}_1 = \frac{J_2 - J_3}{J_2 J_3} L_m p_2 p_3, \quad \dot{p}_2 = \frac{J_3 - J_1}{J_1 J_3} L_m p_1 p_3, \quad \dot{p}_3 = \frac{J_1 - J_2}{J_1 J_2} L_m p_1 p_2 \quad (3.3)$$

Общее решение приведенной системы уравнений найти практически невозможно. Трудность заключается в нахождении граничных значений  $\mathbf{p}(0)$  и  $\mathbf{p}(T)$ , связанных выражением

$$\Lambda_f \circ \mathbf{p}(T) \circ \tilde{\Lambda}_f = \Lambda_{in} \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_{in}$$

или  $\mathbf{p}(T) = \tilde{\Lambda}_t \circ \mathbf{p}(0) \circ \Lambda_t$ , где  $\Lambda_t = \tilde{\Lambda}_{in} \circ \Lambda_f$  – кватернион разворота.

Для синтеза оптимального управления кинетическим моментом требуется знание времени оптимального разворота  $T$  и значений постоянных параметров  $m_0, r_0$ , определяющих темп приближения к заданному конечному положению  $\Lambda(T) = \Lambda_f, \mathbf{L}(T) = 0$ . Конкретные положительные величины  $r_0$  и  $m_0$ , а также длительность разворота определяются коэффициентом  $k_0$  функционала качества и вектором  $\mathbf{p}_0$ . Убедимся, что найденные ранее постоянные параметры  $m_0, T$  для закона управления (3.2) действительно оптимальны. Приняв во внимание соотношение  $m_0 T^2 = 6F$ , запишем значение функционала (1.5) в следующем виде:

$$G = (m_0^2 C / 3 + k_0) \sqrt{6F / m_0} \quad (3.4)$$

или

$$G = 12S^2 / T^3 + k_0 T \quad (3.5)$$

Функция (3.4) минимальна, если  $m_0 = \sqrt{k_0} / C$ . Минимум функции (3.5) соответствует времени разворота  $T = \sqrt{6S / \sqrt{k_0}}$ . При этом величина (1.5) для оптимального управления (3.2) равна  $G = 4k_0 T / 3$ , т.е.  $G = 4\sqrt{2k_0 S \sqrt{k_0}} / 3$ .

**4. Некоторые частные случаи оптимального управления.** Функции  $\varphi_i(t), r_i(t), L_i(t)$  будут оптимальными тогда и только тогда, когда они удовлетворяют уравнениям (2.1), (2.4), (2.5). Ключевой проблемой в решении задачи оптимального управления кинетическим моментом является нахождение значения вектора  $\mathbf{p}_0$  и времени разворота  $T$ . Постоянная  $m_0 = |\mathbf{M}(0)|$  оптимального закона изменения кинетического момента определяется значением коэффициента  $k_0$  минимизируемого показателя качества ( $\mathbf{p}_0$  зависит исключительно от кватерниона разворота  $\Lambda_t$  и моментов инерции  $J_1, J_2, J_3$  и не зависит от времени  $T$ ). Если  $\mathbf{p}_0$  известно, то

$$\boldsymbol{\varphi}(0) = 2I^{-1} \mathbf{p}_0 \sqrt{k_0} / C$$

Управляющие переменные рассчитываются в соответствии с законом (2.8), для исполнения которого надо в каждый текущий момент времени  $t$  знать все три переменные  $p_1, p_2, p_3$ . Система (1.2), (2.1), (2.5) имеет аналитическое решение только для динамически симметричного и сферического тел. Для сферически-симметричного тела ( $J_1 = J_2 = J_3$ ) решение следующее:

$$p_i(t) = \text{const} = p_{i0} = v_i / \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}, \quad M_i(t) = m_0(1 - 2t/T)p_{i0}$$

$$L_i(t) = m_0 t(1 - t/T)p_{i0}, \quad i = \overline{1,3}$$

где  $v_1, v_2, v_3$  – компоненты векторной части кватерниона разворота  $\Lambda_t$ .

В случае динамически симметричного тела (например, если  $J_2 = J_3$ ) задача оптимального управления кинетическим моментом решается до конца (при дальнейших рассуждениях продольной осью считается ось  $OX$ ). В этом частном, но достаточно распространенном случае оптимальным решением является одновременное вращение твердого тела (например, КА) вокруг некоторого направления  $\boldsymbol{\eta}$ , неподвижного относительно инерциального базиса, и вокруг продольной оси  $OX$ , которая образует с осью

$\eta$  постоянный угол  $\vartheta$ . Угловые скорости относительно осей  $\eta$  и  $OX$  изменяются пропорционально с постоянным коэффициентом пропорциональности, и поэтому можем записать [11, 16]

$$\Lambda_f = \Lambda_{in} \circ e^{p_0\beta/2} \circ e^{e_1\alpha/2}$$

где  $\alpha, \beta$  – углы поворота КА вокруг продольной оси  $OX$  и вокруг вектора  $\mathbf{p}$  соответственно;  $\mathbf{e}_1$  – орт продольной оси  $OX$ ; вектор в показателе степени кватернионной экспоненты понимается как кватернион с нулевой скалярной частью (считается  $|\alpha| \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi$ ). Как и ранее [11], решение  $\mathbf{p}(t)$  системы (2.5), (3.3) представим в следующем виде [11, 16]:

$$p_1 = p_{10} = \cos\vartheta, \quad p_2 = p_{20} \cos \kappa + p_{30} \sin \kappa, \quad p_3 = -p_{20} \sin \kappa + p_{30} \cos \kappa$$

$$\text{и} \quad \kappa = \frac{J - J_1}{J_1 J} \int_0^t L_1(t) dt \quad (4.1)$$

где  $J = J_2 = J_3$ ; продольная составляющая  $L_1(t)$  определяется из соотношений (2.9) с учетом  $p_1 = \text{const} = p_{10}$ . В отличие от решения [11], в котором  $L_1(t)$  – кусочно-линейная функция времени, в оптимальном по критерию (1.5) решении  $L_1(t)$  – квадратичная функция времени. Значения углов  $\alpha, \beta$  и  $p_{i0}$  от  $\Lambda_{in}$  и  $\Lambda_f$  находятся из следующей системы уравнений [11, 16]

$$\alpha = \frac{J - J_1}{J_1} p_{10} \beta, \quad \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - p_{10} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = v_0, \quad \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} + p_{10} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = v_1 \quad (4.2)$$

$$p_{20} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + p_{30} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = v_2, \quad -p_{20} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + p_{30} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = v_3$$

где  $v_0, v_1, v_2, v_3$  – компоненты кватерниона разворота  $\Lambda_i$ ;  $-\pi \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi$ .

Функции  $L_i$  (проекции оптимального кинетического момента  $\mathbf{L}$  на оси связанной системы координат) рассчитываются по уравнениям (4.1) и (2.9). Искомое решение  $M_i(t), L_i(t)$  представим в аналитическом виде:

$$M_1 = m_0(1 - 2t/T)p_{10}; \quad M_2 = m_0(1 - 2t/T)\sqrt{1 - p_{10}^2} \sin(\kappa + \gamma)$$

$$M_3 = m_0(1 - 2t/T)\sqrt{1 - p_{10}^2} \cos(\kappa + \gamma)$$

$$L_1 = m_0 t(1 - t/T)p_{10}; \quad L_2 = m_0 t(1 - t/T)\sqrt{1 - p_{10}^2} \sin(\kappa + \gamma)$$

$$L_3 = m_0 t(1 - t/T)\sqrt{1 - p_{10}^2} \cos(\kappa + \gamma)$$

где  $\vartheta = \arccos p_{10}$ ;  $\kappa = m_0 p_{10} t^2 (0.5 - t/3T)(J - J_1)/(J_1 J)$ ;  $\gamma = \arcsin(p_{20}/\sqrt{1 - p_{10}^2})$ , если  $p_{30} \geq 0$ , или  $\gamma = \pi - \arcsin(p_{20}/\sqrt{1 - p_{10}^2})$ , если  $p_{30} < 0$  ( $|p_{10}| \neq 1$ ); вариант  $|p_{10}| = 1$  соответствует плоскому вращению вокруг продольной оси  $OX$ , поэтому мы его не рассматриваем.

Заметим, что в работе [27] также выписаны все предварительные выражения общего решения задачи оптимального разворота твердого тела (но для другого функционала качества) и до конца доведено решение для случая динамической симметрии тела. Авторы работы [11], решая задачу разворота при условии динамической симметричности твердого тела (из-за чего оптимальное управление обеспечивает вращение КА с постоянным углом отклонения кинетического момента от продольной оси), показали, что решение системы (4.2) существует при любых значениях кватерниона  $\Lambda_i$  и моментах инерции динамически симметричного тела.

Для динамически симметричного тела параметры закона управления  $r_0, m_0, T$  находятся намного проще (также упрощается определение интеграла  $F$  и показателя  $G$ ).

У динамически симметричных тел с продольной осью  $OX | \mathbf{L} | = J_2 \dot{\beta}$  и  $F = J_2 \beta$ , где  $J_2$  – момент инерции относительно поперечной оси ( $J_2 = J_3$ );  $\dot{\beta}$  – скорость вращения вокруг кинетического момента  $\mathbf{L}$ ;  $\beta$  – угол поворота КА вокруг вектора  $\mathbf{L}$  (из физического смысла  $\beta \geq 0$ ). Чтобы показатель (1.5) был минимальным, необходимо чтобы угол  $\beta$  был как можно меньше, для чего потребуем  $\beta \leq \pi$  (отсюда понятно, почему система (4.2) включает условие  $0 \leq \beta \leq \pi$ ). Значения  $r_0$ ,  $T$ ,  $L_{\max}$ ,  $G$  зависят только от угла поворота вокруг кинетического момента  $\mathbf{L}$  и, соответственно, таковы:

$$T = \sqrt{6J_2\beta C / \sqrt{k_0}}, \quad L_{\max} = \sqrt{3J_2\beta\sqrt{k_0} / (8C)}, \quad G = 4\sqrt{2k_0J_2\beta C\sqrt{k_0} / 3}, \quad r_0 = 4m_0\sqrt{m_0 / (6J_2\beta)}$$

где  $m_0 = \sqrt{k_0} / C$ .

Для несимметричного КА ( $J_1 \neq J_2 \neq J_3$ ) решение системы уравнений (1.2), (2.1), (2.5) в аналитическом виде не существует и определяется численными методами (например, методом последовательных приближений или как описано в [16]). Расчет значения  $\mathbf{p}_0$  осуществляется в процессе решения краевой задачи  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{p}(T) = \tilde{\Lambda}_t \circ \mathbf{p}_0 \circ \Lambda_t$  для системы (3.3). Как известно [22], решение  $\mathbf{p}_0$  не зависит от характера изменения функции  $L_m$ , которая присутствует в уравнениях (3.3), в силу чего искомый вектор  $\mathbf{p}_0$  рассчитываем в предположении, что  $L_m = \text{const} \neq 0$ , что значительно упрощает решение краевой задачи; так как в этом случае кинетический момент изменяется согласно уравнению

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{L} \times (\mathbf{I}^{-1}\mathbf{L}) \tag{4.3}$$

Если кинетический момент изменяется в соответствии с уравнениями (2.1), (2.5), то вне зависимости от характера поведения параметра  $L_m$  значение (3.1) следующее [22]:

$$\int_0^T |\mathbf{L}(t)| dt = K_{\text{av}} t_{\text{pr}}$$

где  $K_{\text{av}}$  – известный отличный от нуля модуль кинетического момента ( $K_{\text{av}} > 0$ );  $t_{\text{pr}}$  – прогнозируемое время достижения условия  $\Lambda = \Lambda_f$  для решения  $\Lambda(t)$  системы уравнений (1.2), (2.1), (2.5) с учетом  $L_m = K_{\text{av}}$  и  $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}$  (очевидно, что если  $L_m(t) = \text{const} = K_{\text{av}}$ , то интеграл (3.1) составляет  $F = K_{\text{av}} t_{\text{pr}}$ ). Каждому конкретному  $K_{\text{av}}$  соответствует свое значение  $t_{\text{pr}}$  (время  $t_{\text{pr}}$  обратно пропорционально величине  $K_{\text{av}}$ ). Приняв какое-то  $K_{\text{av}} \neq 0$  и интегрируя уравнения (1.2), (4.3) с начальными условиями  $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}$ ,  $\mathbf{L}(0) = K_{\text{av}} \mathbf{p}_0$ , получим прогнозируемое время  $t_{\text{pr}}$ , а затем  $F$ .

В отличие от известного решения [11], применимого исключительно для тел с осевой симметрией, в представленном оптимальном управлении отсутствуют отрезки времени с постоянным модулем управляющего момента. Кроме того, в предложенном оптимальном решении все управляющие переменные  $M_i(t)$  – непрерывные гладкие функции времени.

**5. Результаты математического моделирования.** Для примера рассмотрим разворот международной космической станции (МКС) из положения, при котором связанные оси совпадают по направлению с одноименными осями инерциального базиса, в положение, соответствующее кватерниону  $\Lambda_f = \{0.258819, 0.683013, 0.591506, 0.341506\}$ . Приведем численное решение задачи оптимального управления кинетическим моментом в процессе разворота с минимальной величиной (1.5). Разворот выполняется из положения покоя в положение покоя. Определим оптимальную программу управления  $\mathbf{M}(t)$ , которая переводит МКС из состояния (1.3) в состояние (1.4). Инерционные характеристики МКС полагаем равными [31]:  $J_1 = 4853000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $J_2 = 23601000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,

$J_3 = 26278000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ . Считаем, что коэффициент  $k_0 = 0.1 \text{ Вт/с}$ . Элементы кватерниона разворота  $\Lambda_t$  имеют следующие значения:  $v_0 = 0.258819$ ;  $v_1 = 0.683013$ ;  $v_2 = 0.591506$ ;  $v_3 = 0.341506$ . Вектор  $\mathbf{p}_0$  находим в результате решения краевой задачи принципа максимума. Из соотношения моментов инерции  $J_1, J_2, J_3$  следует, что ось  $OX$  – продольная ось КА. При решении краевой задачи принципа максимума в уравнениях (2.5) полагаем  $L_m = \text{const}$  (и, соответственно,  $|\mathbf{L}| = \text{const}$ ), так как искомое значение  $\mathbf{p}_0$  не зависит от характера изменения функции  $L_m(t)$  [22]. Расчет вектора  $\mathbf{p}_0$  происходит методом последовательных приближений, где в качестве первого приближения берется решение той же краевой задачи для динамически симметричного тела с моментами инерции  $J_1$  и  $J$ , где  $J$  – момент инерции относительно поперечной оси, равный среднему значению между  $J_2$  и  $J_3$  (принцип осреднения нередко используется исследователями [32]). Было принято значение

$$J = \frac{J_2 J_3}{J_2 + J_3 - J_1} (\sqrt{(1 - J_1/J_2)(1 - J_1/J_3)} + 1)$$

При сделанном допущении о динамической симметричности решение  $\mathbf{p}_0$  находится из уравнений (4.2). В результате получили следующее значение:  $\mathbf{p}_0^{(0)} = \{0.283154; 0.113225; 0.952368\}$ . Рассчитанные в соответствии с системой (4.2) значения  $\mathbf{p}_0$  и  $\beta$  являются начальным приближением к истинному решению. Они уточняются до тех пор, пока не будут удовлетворять требованиям  $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}$ ,  $\Lambda(t_{\text{pr}}) = \Lambda_f$  для решения системы уравнений (1.2), (4.3) с начальным кинетическим моментом  $\mathbf{L}_{\text{st}}$ , определяемым вектором  $\mathbf{p}_0$  и углом  $\beta$  по формулам:

$$L_{1\text{st}} = \frac{J\beta}{T} p_{10}, \quad L_{2\text{st}} = \frac{J\beta}{T} p_{20}, \quad L_{3\text{st}} = \frac{J\beta}{T} p_{30} \quad (5.1)$$

(при решении краевой задачи принципа максимума и уточнении вектора  $\mathbf{p}_0$  время  $T$  принимается произвольным, например,  $T = 300 \text{ с}$ ). Прогноз траектории вращения выполняется интегрированием системы дифференциальных уравнений (1.2), (4.3), описывающих вращение КА, при начальных условиях  $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}$ ,  $\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}_{\text{st}}$  и с учетом того, что  $\mathbf{M} = 0$ . Погрешность рассчитанных  $\mathbf{p}_0$  и  $\beta$  относительно истинных значений, соответствующих оптимальному решению, оценивается величиной  $\varepsilon = \text{sqa}(\tilde{\Lambda}_{\text{pr}} \circ \Lambda_f)$ , где  $\Lambda_{\text{pr}}$  – максимально близкое к  $\Lambda_f$  угловое положение, полученное в ходе моделирования вращения (согласно уравнениям (1.2), (4.3)). Значение  $\mathbf{p}_0$  уточняется до тех пор, пока  $\varepsilon < \varepsilon_{\text{th}}$  ( $\varepsilon_{\text{th}}$  – некоторая близкая к единице пороговая величина, отражающая ошибку текущего решения). Искомые значения  $\mathbf{p}_0$  и  $\beta$ , удовлетворяющие граничным условиям  $\Lambda(0) = \Lambda_{\text{in}}$ ,  $\Lambda(t_{\text{pr}}) = \Lambda_f$ , считаются найденными в момент выполнения условия  $\varepsilon \geq \varepsilon_{\text{th}}$  (когда прогнозируемая ошибка соответствует заданной точности), краевая задача решена. Уточнение вектора  $\mathbf{p}_0$  производилось с помощью рекуррентного правила:

$$\Lambda_t^{(k+1)} = \Lambda_t^{(k)} \circ \tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{\text{pr}}$$

где  $\Lambda_t^{(k)}$  – кватернион разворота, используемый в системе (4.2) для  $k$ -го приближения. На каждом  $k$ -м шаге итераций пересчитывается кватернион разворота  $\Lambda_t^{(k)}$  (правые части системы (4.2)), и на основе системы (4.2) рассчитываются новые  $\mathbf{p}_0$  и  $\beta$ , соответствующий им начальный кинетический момент  $\mathbf{L}_{\text{st}}$  (по выражениям (5.1)) и прогноз  $\Lambda_{\text{pr}}$ . Если  $\varepsilon < \varepsilon_{\text{th}}$ , то рассчитывается кватернион разворота  $\Lambda_t^{(k+1)}$  для следующего  $(k+1)$ -го приближения и процесс уточнения вектора  $\mathbf{p}_0$  повторяется. Начальным приближением

ем для правых частей системы (4.2) являются элементы кватерниона  $\Lambda_t^{(0)} = \tilde{\Lambda}_{in} \circ \Lambda_f$ . Процесс поиска  $\mathbf{p}_0$  прекращается, когда  $\varepsilon \geq \varepsilon_{th}$ .

Описанная схема итераций аналогична итерационному методу решения уравнения вида  $x = g(x)$  для скалярной функции  $g(x)$  скалярного (одномерного) аргумента  $x$ . При уточнении  $\mathbf{p}_0$  аргументом является гиперкомплексное число (кватернион)  $\Lambda_t$ , а функцией – кватернион  $\Lambda_t \circ \tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{pr}$ , где  $\Lambda_f$  – постоянный кватернион, не зависящий от аргумента  $\Lambda_t$ , а  $\Lambda_{pr}$  зависит от аргумента  $\Lambda_t$  через систему уравнений (4.2), (5.1) посредством модели движения (1.2), (4.3). После изменения  $\Lambda_t$  меняются вектор  $\mathbf{p}_0$  (в соответствии с (4.2)) и начальный кинетический момент  $\mathbf{L}_{st}$ , и поэтому обновится значение  $\Lambda_{pr}$ , что приведет к изменению функции  $\Lambda_t \circ \tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{pr}$ . Как только  $\text{sqal}(\tilde{\Lambda}_{pr} \circ \Lambda_f) \geq \varepsilon_{th}$ , итерационный процесс прекращается, и решение  $\mathbf{p}_0$  получено. Отмечаем, что  $|\text{vect}(\tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{pr}^{(k)})| < |\text{vect}\Lambda_t^{(k)}|$  для любого  $k$ , поэтому процесс приближения  $\mathbf{p}_0$  к оптимальному значению сходится. Аналогичный метод нахождения оптимального вектора  $\mathbf{p}_0$  в решении краевой задачи принципа максимума применялся в задаче максимального быстродействия [16], как один из возможных (хотя и не единственный) итерационных алгоритмов расчета вектора  $\mathbf{p}_0$  для оптимального управления.

После решения краевой задачи разворота из положения  $\Lambda(0) = \Lambda_{in}$  в положение  $\Lambda(T) = \Lambda_f$  определили основные параметры:  $\mathbf{p}_0 = \{0.310532; 0.105396; 0.944702\}$ ,  $F = 38957 \text{ кН} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$ . Соответственно, “функционал пути” составил  $S = 9078.5 \text{ м} \cdot \text{кг}^{1/2}$ . Максимальный модуль управляющего момента  $m_0 = 1357 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Время оптимального разворота  $T = 415 \text{ с}$ , а  $\rho = 207.5 \text{ с}$ . Максимальный модуль кинетического момента составил  $L_{max} = 140.8 \text{ кН} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ , а максимальная энергия вращения за время разворота оказалась равной  $E_{max} = 538 \text{ Дж}$ . Значение константы  $r_0$  будет  $r_0 = 4m_0/T = 13.08 \text{ Н} \cdot \text{м/с}$ . Оптимальный вектор  $\boldsymbol{\varphi}(0) = \{173.66 \times 10^{-6}; 12.12 \times 10^{-6}; 97.57 \times 10^{-6}\}$ .

Данные математического моделирования оптимального вращения приведены рис. 1–5. На рис. 1 даны графики изменения проекций кинетического момента на оси связанного базиса  $L_1(t)$ ,  $L_2(t)$ ,  $L_3(t)$  по времени (переменные  $L_i$  приведены в  $\text{кН} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ , время  $t$  дано в секундах). Проекция  $L_1$ , соответствующая продольной оси КА, не меняет знак, и характер ее изменения повторяет поведение модуля кинетического момента (в отличие от  $L_2$  и  $L_3$ ). На рис. 2 представлены графики изменения компонент кватерниона  $\Lambda(t)$ , отражающего текущую ориентацию КА во время разворота:  $\lambda_0(t)$ ,  $\lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2(t)$ ,  $\lambda_3(t)$ . На рис. 3 дано изменение составляющих  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ ,  $p_3(t)$  орта  $\mathbf{p}$  во времени. Отмечаем, что во время оптимального разворота проекция  $p_1$  меняется незначительно. На рис. 4 изображены графики изменения управляющих функций  $M_1(t)$ ,  $M_2(t)$ ,  $M_3(t)$  (переменные  $M_i$  приведены в  $\text{Н} \cdot \text{м}$ , время  $t$  дано в секундах). Значение (1.5), характеризующее экономичность программы  $\mathbf{M}(t)$  управления кинетическим моментом, равно  $G = 4k_0T/3 = 55.3 \text{ Дж/с}$ . Рис. 5 демонстрирует поведение модуля кинетического момента КА во время разворота (величина  $|\mathbf{L}|$  дана в  $\text{кН} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ , время  $t$  приведено в секундах). При оптимальном управлении переменные  $p_i$  и  $\lambda_j$  являются гладкими функциями времени; переменные  $L_i$  – гладкие функции времени (за исключением моментов времени  $t = 0$  и  $t = T$ ).

Необходимо заметить, что чем больше коэффициент  $k_0$ , тем меньше время разворота  $T$  и больше энергия  $E_{max}$ , максимальный момент  $|\mathbf{M}(0)|$  и максимальный модуль кинетического момента  $L_{max}$ . Значение коэффициента  $k_0$  в минимизируемом функционале (1.5) выбрано из условия  $E_{max} < 540 \text{ Дж}$  (при этом желательно, чтобы время разворота  $T < 450 \text{ с}$ ).

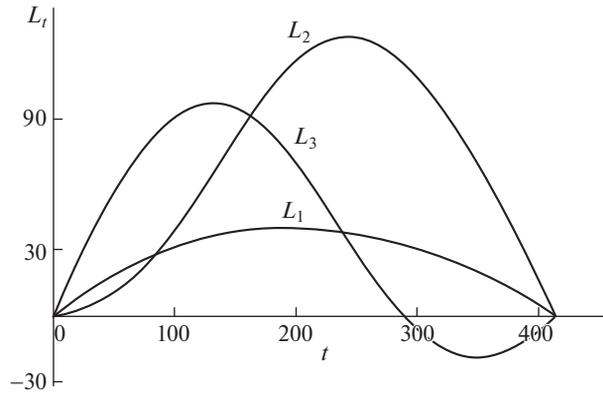


Рис. 1. Изменение составляющих кинетического момента во время разворота.

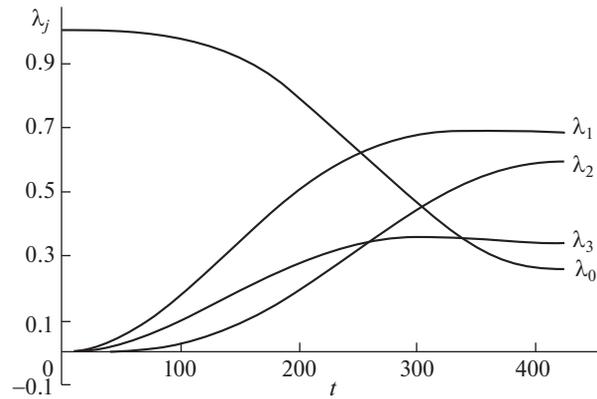


Рис. 2. Изменение компонент кватерниона ориентации  $\Lambda(t)$  во время разворота.

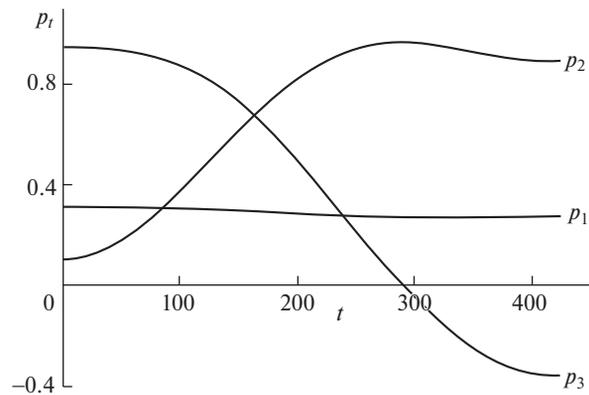


Рис. 3. Вид функций  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ ,  $p_3(t)$  во время оптимального разворота.

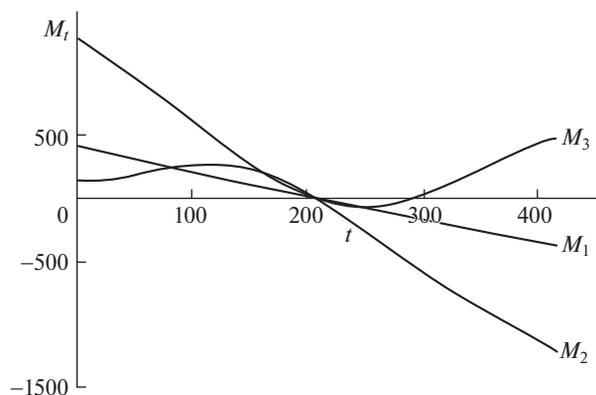


Рис. 4. Характер изменения управляющих функций во время разворота.

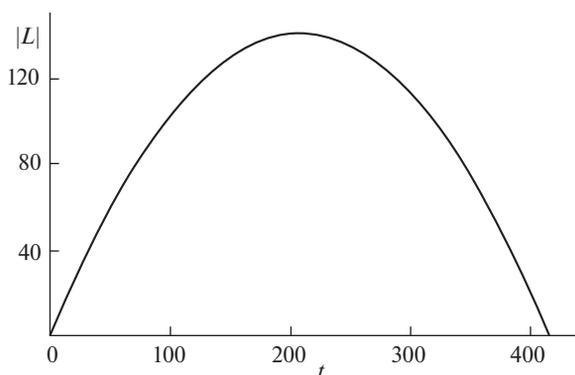


Рис. 5. Поведение модуля кинетического момента при оптимальном управлении.

**Заключение.** Исследуется кватернионное решение динамической задачи оптимального управления пространственным разворотом твердого тела (в частности, КА) из произвольного начального в заданное конечное угловое положение. Рассматривается случай, когда в начальный и конечный моменты времени кинетический момент равен нулю. Принятый нами критерий качества объединяет в заданной пропорции энергетические затраты и время, затраченные на переориентацию КА. Вопросы экономичности управления движением КА актуальны и сегодня, а потому предложенная задача управления практически важная. В аналитической форме описаны отличительные свойства оптимального движения. Для нахождения оптимального управления и закономерностей вращения во время перевода КА в заданную ориентацию применялись кватернионные модели движения твердого тела и принцип максимума Л.С. Понтрягина. Выписаны функция Гамильтона, сопряженная система уравнений для исходной оптимизационной задачи и выражения для оптимального управления, отражающие связь управляющих и фазовых переменных. Структура полученной системы дифференциальных уравнений такова, что закономерности оптимального изменения кинетического момента  $\mathbf{L}(t)$  и оптимального движения  $\Lambda(t)$  обнаруживаются в явном виде. Доказано, что в течение всего разворота отношение кинетической энергии вращения

к квадрату модуля кинетического момента КА есть величина постоянная. Сформулированы необходимые условия оптимальности и определена структура оптимального управления; приведены аналитические зависимости для программной траектории движения КА. Поскольку на управляющий момент и на время разворота не наложено никаких ограничений, то маневр переориентации можно выполнить для любых начального и конечного положений. Расчетные формулы для вычисления ключевых характеристик маневра переориентации представлены в явном виде.

Была изложена процедура реализации оптимального программного управления и описана конструктивная схема решения краевой задачи принципа максимума при произвольных моментах инерции КА и условиях разворота. Поведение параметров движения КА в процессе разворота иллюстрируют результаты математического моделирования.

Основное отличие рассмотренной задачи управления состоит в использовании нового критерия оптимальности. Введение в минимизируемый функционал времени, затраченного на разворот (со своим коэффициентом пропорциональности), определяет максимальную величину управляющего момента  $|\mathbf{M}(0)|$ , максимальный кинетический момент  $L_{\max}$  и, соответственно, длительность маневра  $T$ . В течение всего разворота управляющий момент действует вдоль прямой, неподвижной относительно инерциального базиса, абсолютная скорость изменения управляющего момента (как векторная величина) имеет постоянное значение относительно инерциальной системы координат. В отличие от [11], где оптимальным является релейное управление, когда возможен участок вращения по инерции, минимизация принятого показателя качества (1.5) приводит к непрерывному управлению. В оптимальном по критерию (1.5) решении отсутствуют интервалы вращения с постоянным модулем силового момента.

Для динамически симметричного КА получено законченное решение задачи оптимального управления в замкнутой форме. Даны зависимости в виде явных функций времени для оптимальной траектории вращения и соотношения для нахождения ключевых параметров закона управления, поэтому предложенное решение имеет практическое значение. В аналитическом виде записана система уравнений (4.2), позволяющая решить краевую задачу принципа максимума и полностью определить константы алгоритма управления (для расчета оптимальных значений указанных параметров используется разработанное ранее устройство [33]).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
2. Алексеев К.Б., Малявин А.А., Шадян А.В. Экстенсивное управление ориентацией космического аппарата на основе нечеткой логики // Полет. 2009. № 1. С. 47–53.
3. Велищанский М.А., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Синтез алгоритмов переориентации космического аппарата на основе концепции обратной задачи динамики // Изв. РАН. ТиСУ. 2003. № 5. С. 156–163.
4. Ваньков А.И. Адаптивное робастное управление угловым движением КА с использованием прогнозирующих моделей // Космич. исслед. 1994. Т. 32. Вып. 4–5. С. 13–21.
5. Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. 600 с.
6. Levskii M.V. About method for solving the optimal control problems of spacecraft spatial orientation // Probl. Nonlin. Anal. Eng. Sys. 2015. V. 21. № 2. P. 61–75.
7. Решмин С.А. Пороговая абсолютная величина релейного управления при наискорейшем приведении спутника в гравитационно-устойчивое положение // Доклады Академии наук. 2018. Том 480. № 6. С. 671–675.  
<https://doi.org/10.1134/S1028335818060101>
8. Junkins J. L., Turner J. D. Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers. Elsevier. USA, 1986. 515 p.

9. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Особые режимы управления в задаче оптимального разворота сферически-симметричного космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 6. С. 47–54.  
<https://doi.org/10.1134/S1064230709060057>
10. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Решение задачи оптимального разворота осесимметричного космического аппарата с ограниченным и импульсным управлением при произвольных граничных условиях // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 2. С. 152–165.  
<https://doi.org/10.1134/S1064230707020189>
11. *Бранец В.Н., Черток М.Б., Казначеев Ю.В.* Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии // Космич. исслед. 1984. Т. 22. Вып. 3. С. 352–360.
12. *Shen H., Tsiotras P.* Time-optimal Control of Axi-symmetric Rigid Spacecraft with two Controls // AIAA J. Guid. Contr. Dyn. 1999. V. 22. № 5. P. 682–694.  
<https://doi.org/10.2514/2.4436>
13. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое решение задачи оптимального по быстродействию разворота осесимметричного космического аппарата в классе конических движений // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 2. С. 131–147.  
<https://doi.org/10.7868/S0002338818020117>
14. *Scrivener S., Thompson R.* Survey of Time-optimal Attitude Maneuvers // J. Guid. Contr. Dyn. 1994. V. 17. № 2. P. 225–233.
15. *Zhou H., Wang D., Wu B., EK Poh.* Time-optimal reorientation for rigid satellite with reaction wheels // Int. J. Contr. 2012. V. 85. № 10. P. 1–12.  
<https://doi.org/10.1080/00207179.2012.688873>
16. *Левский М.В.* Применение принципа максимума Л.С. Понтрягина к задачам оптимального управления ориентацией космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 6. С. 144–157.  
<https://doi.org/10.1134/S1064230708060117>
17. *Решин С.А.* Пороговая абсолютная величина релейного управления при наискорейшем приведении спутника в желаемое угловое положение // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 5. С. 30–41.  
<https://doi.org/10.1134/S106423071805012X>
18. *Левский М.В.* Кинематически оптимальное управление переориентацией космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 1. С. 119–136.  
<https://doi.org/10.1134/S1064230714050116>
19. *Левский М.В.* Об одном случае оптимального управления пространственной ориентацией космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2012. № 4. С. 115–130.  
<https://doi.org/10.1134/S1064230712020086>
20. *Бирюков В.Г., Челноков Ю.Н.* Построение оптимальных законов изменения вектора кинетического момента твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 5. С. 3–21.  
<https://doi.org/10.3103/S002565441405001X>
21. *Зеленукина О.В., Челноков Ю.Н.* Построение оптимальных законов изменения вектора кинетического момента динамически симметричного твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 4. С. 31–49.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654411040030>
22. *Левский М.В.* Синтез оптимального управления терминальной ориентацией космического аппарата с использованием метода кватернионов // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 2. С. 7–24.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654409020022>
23. *Левский М.В.* Особенности управления ориентацией космического аппарата, оборудованного инерционными исполнительными органами // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16. № 3. С. 188–195.  
<https://doi.org/10.17587/mau.16.188-195>
24. *Levskii M.V.* Special Aspects in Attitude Control of a Spacecraft, Equipped with Inertial Actuators // J. Comp. Sci. Appl. Informat. Technol. 2017. V. 2. № 4. P. 1–9.  
<https://doi.org/10.15226/2474-9257/2/4/00121>
25. *Quang M. Lam.* Robust and adaptive reconfigurable control for satellite attitude control subject to under-actuated control condition of reaction wheel assembly // Math. Eng. Sci. Aerosp. 2018. V. 9. № 1. P. 47–63.

26. *Левский М.В.* Использование универсальных переменных в задачах оптимального управления ориентацией космических аппаратов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 1. С. 53–59.
27. *Стрелкова Н.А.* Об оптимальной переориентации твердого тела // Проблемы механики управляемого движения. Нелинейные динамические системы. Пермь: ПГУ, 1990. С. 115–133.
28. *Зубов Н.Е., Ли М.В., Микрин Е.А., Рябченко В.Н.* Терминальное построение орбитальной ориентации космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2017. № 4. С. 154–173. <https://doi.org/10.1134/S1064230717040190>
29. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
30. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974. 488 с.
31. *Банит Ю.Р., Беляев М.Ю., Добринская Т.А., Ефимов Н.И., Сазонов В.В., Стажков В.М.* Определение тензора инерции международной космической станции по телеметрической информации. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. № 57. М.: ИПМ, 2002.
32. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
33. *Левский М.В.* Устройство формирования параметров регулярной прецессии твердого тела. Патент на изобретение РФ № 2146638 // Бюллетень “Изобретения. Заявки и патенты”. 2000. № 8. С. 148.