ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2022, № 6, с. 97–103

УДК 539.3

ИЗОТРОПНЫЕ ТЕНЗОР-ФУНКЦИИ С КВАЗИПОЛИНОМИАЛЬНЫМ СКАЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

© 2022 г. Д. В. Георгиевский[a,b,c,*]

[a] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[b] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*
[c] *Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*
**e-mail: georgiev@mech.math.msu.su*

Поступила в редакцию 10.01.2022 г.
После доработки 04.02.2022 г.
Принята к публикации 07.02.2022 г.

На базе аппарата тензор-функций от одного тензорного аргумента предложено многоуровневое семейство скалярных потенциалов напряжений по деформациям изотропных упругих сред, в котором элементы каждого уровня включают в себя элементы всех предыдущих уровней. Данный потенциал порождает многоуровневое семейство тензорно нелинейных определяющих соотношений, в которых каждое слагаемое, вне зависимости от уровня, имеет первый порядок малости по базе стремления нормы деформации к нулю. Найдено число материальных постоянных, входящих в многоуровневые определяющие соотношения. Предложена система установочных экспериментов для нахождения четырех материальных постоянных в прямых и обратных соотношениях второго уровня. Обсуждены вопросы взаимообратности тензорных функций и положительной определенности потенциала второго уровня, приводящего к тензорно линейной зависимости напряжений от деформаций.

Ключевые слова: многоуровневый упругий потенциал, тензор напряжений, тензор деформаций, определяющее соотношение, квазиполином, изотропная тензор-функция

DOI: 10.31857/S0572329922060071

Введение. Математический аппарат нелинейных тензор-функций от одного или нескольких тензорных аргументов [1], а также теория инвариантов [2] находят значительное применение в построении и анализе новых классов определяющих соотношений нелинейной механики сплошной среды [3–8] и, в частности, нелинейной теории упругости. Потенциальность налагает определенные дифференциальные связи на материальные функции, называемые условиями потенциальности среды, а само существование скалярных потенциалов напряжений по деформациям и наоборот интерпретируется и наделяется физическим смыслом энергии деформирования.

1. Квазиполиномиальные *N*-уровневые упругие потенциалы в анизотропной и изотропной средах. В рамках определяющих соотношений нелинейной упругости рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве потенциальную связь двух симметричных тензоров второго ранга – тензора напряжений Коши $\boldsymbol{\sigma}$ и тензора малых деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ с декартовыми компонентами σ_{ij} и ε_{ij} соответственно:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad W = W\left(I_{\varepsilon 1}, I_{\varepsilon 2}, I_{\varepsilon 3}\right) \tag{1.1}$$

Упругий потенциал напряжений по деформациям W зависит от трех инвариантов тензора деформаций, в качестве которых удобно выбрать следы трех первых степеней $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$I_{\varepsilon 1} = \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ii}, \quad I_{\varepsilon 2} = \sqrt{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2)} = \sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}$$
$$I_{\varepsilon 3} = \sqrt[3]{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^3)} = \sqrt[3]{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ki}}, \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}\| = I_{\varepsilon 2} \tag{1.2}$$

Введем в рассмотрение также аналогичные инварианты напряжений, имеющие одинаковую физическую размерность:

$$I_{\sigma 1} = \mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ii}, \quad I_{\sigma 2} = \sqrt{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2)} = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}$$
$$I_{\sigma 3} = \sqrt[3]{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}^3)} = \sqrt[3]{\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki}}, \quad \|\boldsymbol{\sigma}\| = I_{\sigma 2} \tag{1.3}$$

Выберем в данной работе для анализа следующий вид упругого потенциала уровня N в случае произвольной анизотропии:

$$W^{(N)} = \frac{1}{I_{\varepsilon 2}^{2(N-1)}} C_{i_1 i_2 \ldots i_{4N-1} i_{4N}} \varepsilon_{i_1 i_2} \ldots \varepsilon_{i_{4N-1} i_{4N}}, \quad N \geq 1 \tag{1.4}$$

где $C_{i_1 i_2 \ldots i_{4N-1} i_{4N}}$ – компоненты материального тензора модулей упругости ранга $4N$ с симметриями, обусловленными свертками по индексам в (1.4). Данные комопненты симметричны по перестановкам внутри каждой из $2N$ пар индексов $(i_1, i_2), \ldots (i_{4N-1}, i_{4N})$, а также по всем возможным перестановкам самих этих $2N$ пар. С учетом отмеченных симметрий число независимых компонент $C_{i_1 i_2 \ldots i_{4N-1} i_{4N}}$ равно числу монотонно невозрастающих последовательностей длины $2N$, каждый элемент которых может быть любым натуральным числом от единицы до шести. С помощью метода индукции нетрудно установить, что число таких последовательностей равно числу сочетаний C_{2N+5}^{2N}. Так, при $N = 1$ их 21 (как и должно быть для линейной анизотропной упругой среды), при $N = 2$ – 126 и т.д.

Представление (1.4) естественно назвать квазиполиномиальным, поскольку с точностью до нормирующего знаменателя $I_{\varepsilon 2}^{2(N-1)} = \|\boldsymbol{\varepsilon}\|^{2(N-1)}$ потенциал $W^{(N)}$ – полином по деформациям степени $2N$, причем при любом $N \geq 1$ каждое слагаемое этого полинома имеет порядок малости $O(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2)$, $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \to 0$. Для $N = 1$ выражение $W^{(1)}$ – классическая в линейной анизотропной теории упругости квадратичная форма с компонентами $C_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ тензора модулей упругости четвертого ранга. Как видно из (1.1) и (1.4), уровень $N = 1$ соответствует единственному среди всех N варианту физически линейных определяющих соотношений, связывающих тензоры $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Остановимся подробнее на случае изотропного нелинейно-упругого материала. Как известно, тензорный базис изотропных функций состоит лишь из единичного тензора второго ранга I с компонентами δ_{ij}, поэтому все модули $C_{i_1 i_2 \ldots i_{4N-1} i_{4N}}$ в (1.4) должны быть суммами всевозможных произведений $2N$ символов Кронекера. Свертки (1.4) по всем индексам таких компонент $C_{i_1 i_2 \ldots i_{4N-1} i_{4N}}$ с деформациями приведут к следующему виду изотропного упругого потенциала уровня N:

$$W^{(N)} = \frac{1}{I_{\varepsilon 2}^{2(N-1)}} \sum_{\oplus} c_{klm}^{(N)} I_{\varepsilon 1}^{k} I_{\varepsilon 2}^{2l} I_{\varepsilon 3}^{3m}, \quad N \geq 1 \tag{1.5}$$

где $c_{klm}^{(N)}$ – материальные константы (функции координат для неоднородного материала), определенным образом связанные с $C_{i_1 i_2 \ldots i_{4N-1} i_{4N}}$. Знак $\oplus$ в нижнем пределе суммы здесь и далее означает совокупность условий: $k, l, m \geq 0$, $k + 2l + 3m = 2N$.

Следы $I_{\varepsilon n}^n = \mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^n)$ более высоких степеней $\boldsymbol{\varepsilon}$ с помощью формулы Гамильтона–Кели выражаются через $I_{\varepsilon 1}$, $I_{\varepsilon 2}^2$, $I_{\varepsilon 3}^3$. Например, для $n = 4,5,6$ справедливы выражения [9]

$$\begin{aligned} 6I_{\varepsilon 4}^4 &= I_{\varepsilon 1}^4 - 6I_{\varepsilon 1}^2 I_{\varepsilon 2}^2 + 8I_{\varepsilon 1} I_{\varepsilon 3}^3 + 3I_{\varepsilon 2}^4 \\ 6I_{\varepsilon 5}^5 &= I_{\varepsilon 1}^5 - 5I_{\varepsilon 1}^3 I_{\varepsilon 2}^2 + 5I_{\varepsilon 1}^2 I_{\varepsilon 3}^3 + 5I_{\varepsilon 2}^2 I_{\varepsilon 3}^3 \\ 12I_{\varepsilon 6}^6 &= I_{\varepsilon 1}^6 - 3I_{\varepsilon 1}^4 I_{\varepsilon 2}^2 + 4I_{\varepsilon 1}^3 I_{\varepsilon 3}^3 - 9I_{\varepsilon 1}^2 I_{\varepsilon 2}^4 + 12I_{\varepsilon 1} I_{\varepsilon 2}^2 I_{\varepsilon 3}^3 + 3I_{\varepsilon 2}^6 + 4I_{\varepsilon 3}^6 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Число независимых констант $c_{klm}^{(N)}$ в (1.5) равно количеству троек (k,l,m) неотрицательных целых чисел k, l и m таких, что $k + 2l + 3m = 2N$. Для $N = 1$ троек две: $(2,0,0)$ и $(0,1,0)$, что соответствует гуковскому потенциалу

$$W^{(1)} = c_{200}^{(1)} I_{\varepsilon 1}^2 + c_{010}^{(1)} I_{\varepsilon 2}^2 \tag{1.7}$$

с постоянными Ламе $\lambda = 2c_{200}^{(1)}$ и $\mu = c_{010}^{(1)}$. Для $N = 2$ имеем четыре тройки: $(4,0,0)$, $(2,1,0)$, $(1,0,1)$ и $(0,2,0)$, т. е.

$$W^{(2)} = c_{400}^{(2)} \frac{I_{\varepsilon 1}^4}{I_{\varepsilon 2}^2} + c_{210}^{(2)} I_{\varepsilon 1}^2 + c_{101}^{(2)} \frac{I_{\varepsilon 1} I_{\varepsilon 3}^3}{I_{\varepsilon 2}^2} + c_{020}^{(2)} I_{\varepsilon 2}^2 \tag{1.8}$$

В силу очевидной из (1.5) связи констант соседних уровней

$$c_{klm}^{(N)} = c_{k,l-1,m}^{(N-1)}, \quad l = 1,2,\ldots,N \tag{1.9}$$

можно утверждать, что потенциал $W^{(N)}$ содержит все слагаемые, входящие в $W^{(N-1)}$, а кроме того новые слагаемые, соответствующие тройкам $(k,0,m)$. Число таких новых слагаемых на N-м шаге ($N \ge 2$) равно количеству чисел, делящихся на три, включая нуль, и не превышающих $2N$, т. е. $[2N/3] + 1$. Таким образом, число $F^{(N)}$ независимых констант $c_{klm}^{(N)}$ в (1.5) вычисляется рекуррентно:

$$F^{(1)} = 2, \quad F^{(N)} = F^{(N-1)} + \left[\frac{2N}{3}\right] + 1, \quad N \ge 2 \tag{1.10}$$

т. е. $F^{(2)} = 4$, $F^{(3)} = 7$, $F^{(4)} = 10$ и т. д.

2. Определяющие соотношения уровня *N*. Перейдем к нахождению напряжений (1.1) на основе изотропного потенциала (1.5). Принимая во внимание соотношения

$$\frac{\partial I_{\varepsilon 1}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial I_{\varepsilon 2}^2}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\varepsilon_{ij}}{I_{\varepsilon 2}}, \quad \frac{\partial I_{\varepsilon 3}^3}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\varepsilon_{ip}\varepsilon_{pj}}{I_{\varepsilon 3}^2} \tag{2.1}$$

получим

$$\sigma_{ij}^{(N)} = A_0^{(N)} \delta_{ij} + A_1^{(N)} \varepsilon_{ij} + A_2^{(N)} \varepsilon_{ip}\varepsilon_{pj} \tag{2.2}$$

где коэффициенты $A_0^{(N)}$, $A_1^{(N)}$ и $A_2^{(N)}$ – материальные функции инвариантов

$$\begin{aligned} A_0^{(N)} &= \frac{1}{I_{\varepsilon 2}^{2(N-1)}} \sum_{\oplus} k c_{klm}^{(N)} I_{\varepsilon 1}^{k-1} I_{\varepsilon 2}^{2l} I_{\varepsilon 3}^{3m} \\ A_1^{(N)} &= \frac{2}{I_{\varepsilon 2}^{2N}} \sum_{\oplus} (l + 1 - N) c_{klm}^{(N)} I_{\varepsilon 1}^{k} I_{\varepsilon 2}^{2l} I_{\varepsilon 3}^{3m} \\ A_2^{(N)} &= \frac{3}{I_{\varepsilon 2}^{2(N-1)}} \sum_{\oplus} m c_{klm}^{(N)} I_{\varepsilon 1}^{k} I_{\varepsilon 2}^{2l} I_{\varepsilon 3}^{3(m-1)} \end{aligned} \tag{2.3}$$

разумеется, удовлетворяющие трем перекрестным условиям потенциальности

$$\frac{\partial A_0^{(N)}}{\partial I_{\varepsilon 2}} = I_{\varepsilon 2}\frac{\partial A_1^{(N)}}{\partial I_{\varepsilon 1}}, \quad \frac{\partial A_0^{(N)}}{\partial I_{\varepsilon 3}} = I_{\varepsilon 3}^2\frac{\partial A_2^{(N)}}{\partial I_{\varepsilon 1}}, \quad I_{\varepsilon 2}\frac{\partial A_1^{(N)}}{\partial I_{\varepsilon 3}} = I_{\varepsilon 3}^2\frac{\partial A_2^{(N)}}{\partial I_{\varepsilon 2}}$$

Отметим некоторые важные свойства тензорно нелинейной изотропной функции $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$ (2.2) с коэффициентами (2.3).

a) Норма каждого из слагаемых в (2.2) имеет порядок малости $O(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|)$, $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \to 0$.

b) Из предыдущего пункта, в частности, следуют равенства

$$\sigma_{ij}^{(N)}\varepsilon_{ij} = I_{\varepsilon 1}A_0^{(N)} + I_{\varepsilon 2}^2 A_1^{(N)} + I_{\varepsilon 3}^3 A_2^{(N)} = 2W^{(N)} \tag{2.4}$$

что говорит о традиционном физическом смысле потенциала (1.5) (и в общем случае (1.4)) как энергии упругой деформации.

c) Функция (2.2) тензорно линейна, или квазилинейна тогда и только тогда, когда $A_2^{(N)} \equiv 0$, т. е. потенциал (1.5) не зависит от кубического инварианта деформаций $I_{\varepsilon 3}$. В этом случае в (1.5) и (2.3) следует положить $m = 0$ и отбирать только тройки $(k, l, 0)$:

$$W^{(N)} = \frac{1}{I_{\varepsilon 2}^{2(N-1)}}\sum_{\oplus} c_{kl0}^{(N)} I_{\varepsilon 1}^k I_{\varepsilon 2}^{2l}, \quad N \geq 1 \tag{2.5}$$

Число независимых материальных констант $c_{kl0}^{(N)}$ равно $N + 1$. Тензорная линейность функции $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma})$ эквивалентна [10] пропорциональности девиаторов

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - I_{\sigma 1}\mathrm{I}/3, \quad \mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - I_{\varepsilon 1}\mathrm{I}/3 \tag{2.6}$$

3. Квазиполиномиальные N-уровневые потенциалы деформаций по напряжениям. Для обратной тензор-функции $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma})$ подобно (1.1) введем потенциал w деформаций по напряжениям, зависящий от инвариантов (1.3):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \sigma_{ij}}, \quad w = w(I_{\sigma 1}, I_{\sigma 2}, I_{\sigma 3}) \tag{3.1}$$

Если функция $W^{(N)}$ изотропна и имеет квазиполиномиальный вид (1.5), то w записывается аналогичным образом:

$$w^{(N)} = \frac{1}{I_{\sigma 2}^{2(N-1)}}\sum_{\oplus} d_{klm}^{(N)} I_{\sigma 1}^k I_{\sigma 2}^{2l} I_{\sigma 3}^{3m}, \quad N \geq 1 \tag{3.2}$$

где $d_{klm}^{(N)}$ – материальные константы, алгебраически выражающиеся (вообще говоря, при больших N довольно сложно) через $c_{klm}^{(N)}$. Для $N = 1$ получим гуковский потенциал

$$w^{(1)} = d_{200}^{(1)} I_{\sigma 1}^2 + d_{010}^{(1)} I_{\sigma 2}^2, \quad d_{200}^{(1)} = -\frac{\nu}{2E}, \quad d_{010}^{(1)} = \frac{1+\nu}{2E} \tag{3.3}$$

с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν. Для $N = 2$ имеем

$$w^{(2)} = d_{400}^{(2)}\frac{I_{\sigma 1}^4}{I_{\sigma 2}^2} + d_{210}^{(2)} I_{\sigma 1}^2 + d_{101}^{(2)}\frac{I_{\sigma 1}I_{\sigma 3}^3}{I_{\sigma 2}^2} + d_{020}^{(2)} I_{\sigma 2}^2 \tag{3.4}$$

Вычисленные на основе изотропного потенциала (3.2) деформации ε_{ij} имеют вид

$$\varepsilon_{ij}^{(N)} = B_0^{(N)}\delta_{ij} + B_1^{(N)}\sigma_{ij} + B_2^{(N)}\sigma_{ip}\sigma_{pj} \tag{3.5}$$

где $B_0^{(N)}$, $B_1^{(N)}$ и $B_2^{(N)}$ – материальные функции инвариантов (1.3):

$$
\begin{aligned}
B_0^{(N)} &= \frac{1}{I_{\sigma 2}^{2(N-1)}} \sum_{\oplus} k d_{klm}^{(N)} I_{\sigma 1}^{k-1} I_{\sigma 2}^{2l} I_{\sigma 3}^{3m} \\
B_1^{(N)} &= \frac{2}{I_{\sigma 2}^{2N}} \sum_{\oplus} (l+1-N) d_{klm}^{(N)} I_{\sigma 1}^{k} I_{\sigma 2}^{2l} I_{\sigma 3}^{3m} \\
B_2^{(N)} &= \frac{3}{I_{\sigma 2}^{2(N-1)}} \sum_{\oplus} m d_{klm}^{(N)} I_{\sigma 1}^{k} I_{\sigma 2}^{2l} I_{\sigma 3}^{3(m-1)}
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Взаимная обратность функций (2.2) и (3.5) обусловлена тем, что

$$
2w^{(N)}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{ij} \frac{\partial w^{(N)}}{\partial \sigma_{ij}} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{(N)} = \sigma_{ij}^{(N)}\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} \frac{\partial W^{(N)}}{\partial \varepsilon_{ij}} = 2W^{(N)}(\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{3.7}
$$

Аналитические зависимости троек материальных функций $A_0^{(N)}$, $A_1^{(N)}$, $A_2^{(N)}$ и $B_0^{(N)}$, $B_1^{(N)}$, $B_2^{(N)}$ можно найти в работе [9].

4. Потенциалы и определяющие соотношения второго уровня. Установочные эксперименты. Остановимся подробнее на следующем по сложности после физически линейного уровне $N = 2$ с упругими потенциалами (1.8) и (3.4). Для краткости переобозначая $a_1 = c_{400}^{(2)}$, $a_2 = c_{210}^{(2)}$, $a_3 = c_{101}^{(2)}$, $a_4 = c_{020}^{(2)}$, $b_1 = d_{400}^{(2)}$, $b_2 = d_{210}^{(2)}$, $b_3 = d_{101}^{(2)}$, $b_4 = d_{020}^{(2)}$, из (2.2) и (3.5) получим

$$
\sigma_{ij}^{(2)} = \left(2a_2 I_{\varepsilon 1} + \frac{4a_1 I_{\varepsilon 1}^3}{I_{\varepsilon 2}^2} + \frac{a_3 I_{\varepsilon 3}^3}{I_{\varepsilon 2}^2}\right)\delta_{ij} + 2\left(a_4 - \frac{a_1 I_{\varepsilon 1}^4}{I_{\varepsilon 2}^4} - \frac{a_3 I_{\varepsilon 1} I_{\varepsilon 3}^3}{I_{\varepsilon 2}^4}\right)\varepsilon_{ij} + \frac{3a_3 I_{\varepsilon 1}}{I_{\varepsilon 2}^2}\varepsilon_{ip}\varepsilon_{pj} \tag{4.1}
$$

$$
\varepsilon_{ij}^{(2)} = \left(2b_2 I_{\sigma 1} + \frac{4b_1 I_{\sigma 1}^3}{I_{\sigma 2}^2} + \frac{b_3 I_{\sigma 3}^3}{I_{\sigma 2}^2}\right)\delta_{ij} + 2\left(b_4 - \frac{b_1 I_{\sigma 1}^4}{I_{\sigma 2}^4} - \frac{b_3 I_{\sigma 1} I_{\sigma 3}^3}{I_{\sigma 2}^4}\right)\sigma_{ij} + \frac{3b_3 I_{\sigma 1}}{I_{\sigma 2}^2}\sigma_{ip}\sigma_{pj} \tag{4.2}
$$

Опишем набор установочных экспериментов для вычисления податливостей b_1, b_2, b_3 и b_4.

Растяжение стержня. В одноосном напряженном состоянии с единственной ненулевой компонентой $\sigma_{11} = \sigma_0$ инварианты (1.3) таковы: $I_{\sigma 1} = \sigma_0$, $I_{\sigma 2}^2 = \sigma_0^2$, $I_{\sigma 3}^3 = \sigma_0^3$. На основании (4.2) ненулевыми будут продольная $\varepsilon_{11}^{(2)}$ и две поперечные $\varepsilon_{22}^{(2)}$, $\varepsilon_{33}^{(2)}$ компоненты деформаций:

$$
\varepsilon_{11}^{(2)} = 2(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)\sigma_0, \quad \varepsilon_{22}^{(2)} = \varepsilon_{33}^{(2)} = (4b_1 + 2b_2 + b_3)\sigma_0 \tag{4.3}
$$

Равномерное давление. При сжатии тела равномерным давлением $p_0 = -\sigma_{11} = -\sigma_{22} = -\sigma_{33}$ имеем $I_{\sigma 1} = -3p_0$, $I_{\sigma 2}^2 = 3p_0^2$, $I_{\sigma 3}^3 = -3p_0^3$. Дилатация $\varepsilon_{kk}^{(2)}$, являющаяся относительным изменением объема тела, подлежит измерению и, с другой стороны, находится из обратных определяющих соотношений (4.2):

$$
\varepsilon_{kk}^{(2)} = -6(9b_1 + 3b_2 + b_3 + b_4)p_0 \tag{4.4}
$$

Сдвиг плоского слоя. При одномерном сдвиге плоского слоя $\sigma_{12} = \sigma_0$, $I_{\sigma 1} = I_{\sigma 3} = 0$, $I_{\sigma 2}^2 = 2\sigma_0^2$. Сдвиговая деформация $\varepsilon_{12}^{(2)}$ согласно (4.2) имеет вид

$$
\varepsilon_{12}^{(2)} = 2b_4\sigma_0 \tag{4.5}
$$

Итак, по результатам четырех измерений деформаций в трех установочных экспериментах предъявлена неоднородная система четырех линейных уравнений (4.3)–(4.5) относительно податливостей b_1, b_2, b_3 и b_4. Нетрудно показать, что ее ранг равен четырем. Если в результате решения этой системы окажется, что $b_1 = b_3 = 0$, то достаточно ограничиться моделью уровня $N = 1$, т.е. физически линейной моделью упругости, в которой определяющие соотношения (4.1) и (4.2) превращаются в прямой и обратный законы Гука.

Аналогично предыдущему можно предъявить набор установочных экспериментов для нахождения упругих констант a_1, a_2, a_3 и a_4.

Одноосное деформирование плоского слоя. В одноосном деформированном состоянии с единственной ненулевой компонентой деформаций $\varepsilon_{11} = \varepsilon_0$ инварианты (1.2) следующие: $I_{\varepsilon 1} = \varepsilon_0$, $I_{\varepsilon 2}^2 = \varepsilon_0^2$, $I_{\varepsilon 3}^3 = \varepsilon_0^3$. Тогда из (4.1) следует, что диагональные компоненты напряжений имеют вид

$$\sigma_{11}^{(2)} = 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)\varepsilon_0, \quad \sigma_{22}^{(2)} = \sigma_{33}^{(2)} = (4a_1 + 2a_2 + a_3)\varepsilon_0 \tag{4.6}$$

Равномерное сжатие. Тензор деформаций в этом случае шаровой: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0\delta_{ij}$, $I_{\varepsilon 1} = 3\varepsilon_0$, $I_{\varepsilon 2}^2 = 3\varepsilon_0^2$, $I_{\varepsilon 3}^3 = 3\varepsilon_0^3$. Измеримый в эксперименте след напряжений $\sigma_{kk}^{(2)}$, равный утроенному давлению с противоположным знаком, вычисляется на основании (4.1):

$$\sigma_{kk}^{(2)} = 6(9a_1 + 3a_2 + a_3 + a_4)\varepsilon_0 \tag{4.7}$$

Сдвиг плоского слоя. Имеем $\varepsilon_{12} = \varepsilon_0$, $I_{\varepsilon 1} = I_{\varepsilon 3} = 0$, $I_{\varepsilon 2}^2 = 2\varepsilon_0^2$. Касательное напряжение $\sigma_{12}^{(2)}$ согласно (4.1) равно

$$\sigma_{12}^{(2)} = 2a_4\varepsilon_0 \tag{4.8}$$

Система четырех линейных уравнений (4.6)–(4.8) относительно a_1, a_2, a_3 и a_4 разрешима. Четверки констант (a_1, a_2, a_3, a_4) и (b_1, b_2, b_3, b_4), разумеется, можно алгебраически выразить друг через друга, используя взаимообратность соотношений (4.1) и (4.2).

5. Тензорно линейные определяющие соотношения второго уровня. Связи напряжений и деформаций (4.1) и (4.2) становятся тензорно линейными, если в них положить $a_3 = 0$ и $b_3 = 0$. Потенциалы (1.8) и (3.4) примут вид

$$W^{(2)} = \frac{1}{I_{\varepsilon 2}^2}(a_1 I_{\varepsilon 1}^4 + a_2 I_{\varepsilon 1}^2 I_{\varepsilon 2}^2 + a_4 I_{\varepsilon 2}^4), \quad w^{(2)} = \frac{1}{I_{\sigma 2}^2}(b_1 I_{\sigma 1}^4 + b_2 I_{\sigma 1}^2 I_{\sigma 2}^2 + b_4 I_{\sigma 2}^4) \tag{5.1}$$

Переходя от квадратичных инвариантов $I_{\varepsilon 2}^2$ и $I_{\sigma 2}^2$ тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ к квадратичным инвариантам $I_{e2}^2 = \mathrm{tr}(\mathbf{e}^2) = \sqrt{e_{ij}e_{ij}}$ и $I_{s2}^2 = \mathrm{tr}(\mathbf{s}^2) = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$ их девиаторов (2.6):

$$I_{e2}^2 = I_{\varepsilon 2}^2 + \frac{1}{3}I_{\varepsilon 1}^2, \quad I_{s2}^2 = I_{\sigma 2}^2 + \frac{1}{3}I_{\sigma 1}^2 \tag{5.2}$$

преобразуем выражения для потенциалов:

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon 2}^2 W^{(2)} &= \left(a_1 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{9}\right)I_{\varepsilon 1}^4 + \left(a_2 + \frac{2a_4}{3}\right)I_{\varepsilon 1}^2 I_{e2}^2 + a_4 I_{e2}^4 \\ I_{\sigma 2}^2 w^{(2)} &= \left(b_1 + \frac{b_2}{3} + \frac{b_4}{9}\right)I_{\sigma 1}^4 + \left(b_2 + \frac{2b_4}{3}\right)I_{\sigma 1}^2 I_{s2}^2 + b_4 I_{s2}^4 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Исследуем вопрос о положительной определенности правых частей (5.3) как квадратичных форм, построенных на парах $(I_{\varepsilon 1}^2, I_{e2}^2)$ и $(I_{\sigma 1}^2, I_{s2}^2)$. Дискриминанты этих форм равны $D_a = a_2^2 - 4a_1a_4$ и $D_b = b_2^2 - 4b_1b_4$ соответственно. Поскольку элементы в каждой из указанных пар неотрицательны, имеют место следующие наборы условий, являющиеся критериями положительной определенности:

$$\left(a_1 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{9} > 0\right) \wedge (a_4 > 0) \wedge \left((D_a < 0) \vee \left((D_a \ge 0) \wedge \left(a_2 + \frac{2a_4}{3} > 0\right)\right)\right)$$

$$\left(b_1 + \frac{b_2}{3} + \frac{b_4}{9} > 0\right) \wedge (b_4 > 0) \wedge \left((D_b < 0) \vee \left((D_b \geq 0) \wedge \left(b_2 + \frac{2b_4}{3} > 0\right)\right)\right)$$

В частном (физически линейном) случае $a_1 = 0$ дискриминанты D_a и D_b неотрицательны и эти два набора условий сводятся к следующим:

$$\frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{9} > 0, \quad a_4 > 0; \quad \frac{b_2}{3} + \frac{b_4}{9} > 0, \quad b_4 > 0 \tag{5.4}$$

В использующихся в теории упругости обозначениях $a_2 = \lambda/2$, $a_4 = \mu$, $b_2 = -\nu/(2E)$, $b_4 = (1+\nu)/(2E)$ системы (5.4) эквивалентны известным требованиям

$$\lambda + \frac{2\mu}{3} > 0, \quad \mu > 0; \quad \frac{1-2\nu}{E} > 0, \quad \frac{1+\nu}{E} > 0$$

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00077).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лохин В.В., Седов Л.И.* Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 393–417.
2. *Спенсер Э.* Теория инвариантов. М.: Мир, 1974. 156 с. = *Spencer A.J. M.* Continuum Physics. V. 1. Part III. Theory of Invariants. N.Y.–London, 1971.
3. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: ЛЕНАНД, 2014. 320 с.
4. *Аннин Б.Д.* Формула Лагранжа–Сильвестра для тензорной функции, зависящей от двух тензоров // Докл. АН СССР. 1960. Т. 133. № 4. С. 743–744.
5. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986. 264 с.
6. *Димитриенко Ю.И.* Нелинейная механика сплошной среды. М.: Физматлит, 2009. 624 с.
7. *Георгиевский Д.В.* Нелинейные тензор-функции двух аргументов и некоторые “ортогональные эффекты” напряженно-деформированного состояния // Известия РАН. МТТ. 2020. № 5. С. 21–26.
   https://doi.org/10.31857/S0572329920040042
8. *Бровко Г.Л.* Объективные тензоры и их отображения в классической механике сплошной среды // Известия РАН. МТТ. 2021. № 1. С. 83–105.
   https://doi.org/10.31857/S0572329920060045
9. *Георгиевский Д.В.* Тензорно нелинейные эффекты при изотермическом деформировании сплошных сред // Успехи механики. 2002. Т. 1. № 2. С. 150–176.
10. *Георгиевский Д.В.* Порядок малости эффекта Пойнтинга с позиций аппарата тензорно нелинейных функций // Известия РАН. МТТ. 2018. № 4. С. 29–33.
    https://doi.org/10.31857/S057232990000794-3