

УДК 517.97, 539.376

ЧИСЛЕННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ СХЕМЫ МНОГОТОЧЕЧНОГО ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ПАНЕЛЕЙ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

© 2022 г. К. С. Бормотин^{a,*}, А. А. Кривенко^{a,**}

^a Комсомольский-на-Амуре государственный университет, Комсомольск-на-Амуре, Россия

*e-mail: cvmi@knastu.ru

**e-mail: baikal-190@yandex.ru

Поступила в редакцию 21.05.2022 г.

После доработки 22.05.2022 г.

Принята к публикации 23.05.2022 г.

В авиастроении в технологических процессах изготовления тонкостенных деталей включаются этапы формообразования в условиях ползучести. Такие режимы позволяют управлять повреждаемостью за счет выбора кинематической схемы деформирования. Формулируется задача оптимального управления, которая решается методом динамического программирования. Реализация численного метода оптимизации выполнена в конечно-элементном программном комплексе Marc. Для анализа схем деформирования рассматривается моделирование процесса формования панелей в реконфигурируемом стержневом пуансоне. Высокопрочные сплавы изделий могут обладать свойствами анизотропии и разносопротивляемости растяжению и сжатию. Данные свойства, по результатам расчетных данных, соответствуют разным кинематическим схемам деформирования.

Ключевые слова: ползучесть, анизотропия, разносопротивляемость, поврежденность, формообразование, метод конечных элементов, задача оптимального управления, метод динамического программирования

DOI: 10.31857/S057232992205004X

1. Введение. В современном отечественном и зарубежном авиастроении в технологиях формообразования крупногабаритных изделий используют медленные высокотемпературные режимы деформирования [1–4]. Такие режимы, обеспечивающие условия ползучести, позволяют уменьшить повреждаемость и сберечь ресурс изделий на стадии изготовления.

Современная организация производства требует автоматизации и, соответственно, использования оборудования с числовым программным управлением. В качестве такого оборудования в последнее время рассматривается реконфигурируемый стержневой пуансон (матрица) [5–7], исследуются особенности конструкции стержневых систем и предлагаются основные подходы к определению нагрузок, действующих на каждый стержневой элемент. Формующая поверхность, как пуансона, так и матрицы, образованная двумя системами соосно расположенных стержней, каждый из которых выставляется в индивидуальную позицию посредством числового программного управления, позволяет адаптировать оснастку для изготовления деталей различной конфигурации.

В связи с этим, актуальным направлением исследований является разработка методов определения рациональных температурно-скоростных кинематических режимов

формования заготовок для максимального сбережения ресурса материала конструкции. Известно аналитическое решение для идеальных пластин и оболочек, которое получено с учетом ряда ограничений: так в случае малых прогибов оптимальное деформирование проходит по линейному закону, а в случае больших прогибов оптимальное деформирование проводится по нелинейному закону [8–10].

В авиастроении в качестве деталей все больше применяются крупногабаритные монолитные, монолитно-сборные и оребренные панели из облегченных высокопрочных конструкционных сплавов. Большинство деталей типа обшивок и элементов шпангоутов имеют сложную геометрию, в частности переменную кривизну и переменную толщину. Используемые сплавы при изготовлении изделий обладают такими свойствами как анизотропия, разное сопротивление растяжению и сжатию [11–16]. Данные свойства могут появиться в результате предварительной обработки заготовок. В этом случае для прогнозирования нагрузки, формирующей изменения геометрии заготовок при деформировании, и определения оптимальных условий процесса актуальны численные методы. Определение эффектов различных параметров, участвующих в процессах формообразования металлических изделий стало возможным благодаря использованию метода конечных элементов для анализа процессов обработки металлов давлением. Например, для определения оптимального пути формирования изгиба при изготовлении интегральных панелей самолета предлагается метод, основанный на совместном применении метода конечных элементов, искусственной нейронной сети и генетического алгоритма [17]. В качестве функции цели рассматриваются отклонения точек поверхности от заданной геометрии.

В данной работе, в качестве критерия выбора оптимальной траектории деформирования задается поврежденность материала. Допустимое пространство решений задач оптимального управления включает немонотонные траектории деформирования, учитывающие частичную разгрузку. Рассматривается зависимость оптимальной адаптации оснастки в процессе деформирования панелей от свойств материала в ползучести.

2. Формулировка задач оптимального управления при формообразовании тонкостенных конструкций. Задача оптимального формообразования в режиме ползучести изделий из листов и панелей с помощью реконфигурируемого стержневого пуансона представляет собой поиск оптимального закона движения стержней.

Пусть $V \subset R^3$ – область деформируемого тела с границей S . Контактная поверхность жестких тел с деформируемым обозначается через S_c ($S_c \subset S$). Обозначим через $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ – векторы перемещений деформируемого тела и векторы перемещений контактных тел.

Математическая формулировка задачи формообразования в условиях ползучести с учетом малых деформаций, но больших перемещений и поворотов (общая Лагранжева формулировка [18]) представляется в виде квазистатического вариационного принципа с функционалом

$$J_1(\dot{\bar{\mathbf{u}}}, \dot{\mathbf{u}}) = \dot{W}_c + a(\dot{\bar{\mathbf{u}}}, \dot{\mathbf{u}}) \quad \text{при} \quad \dot{\bar{\mathbf{u}}} |_{S_c} = \dot{\bar{\mathbf{u}}}^* \quad (2.1)$$

где $\dot{\bar{\mathbf{u}}}^*$ – заданные скорости перемещений контактных тел в момент времени t ; $t \in [0, T]$ – время деформирования тела под нагрузкой; \dot{W}_c – соотношения, полученные наложением контактных условий на движения тел методом множителей Лагранжа или методом штрафных функций; потенциальная форма определяется в виде

$$a(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\delta \mathbf{u}}) = \int_V \frac{\partial E(\dot{u}_{i,j})}{\partial \dot{u}_{i,j}} \delta \dot{u}_{i,j} dV, \quad \text{где} \quad E(\dot{u}_{i,j}) = \frac{1}{2} c_{ijpl} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{pl} - c_{ijpl} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{pl}^c + \frac{1}{2} \sigma_{ij} \dot{u}_{p,i} \dot{u}_{p,j}, \quad c_{ijpl} - \text{компо-}$$

ненты тензора упругих констант, $\dot{\epsilon}_{ij} = (1/2)(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i} + \dot{u}_{p,i} u_{p,j} + u_{p,i} \dot{u}_{p,j})$ – компоненты

скоростей деформаций, $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$; $\dot{\varepsilon}_{pl}^c$ – компоненты скоростей деформаций ползучести, определяемые по закону установившейся ползучести; точкой сверху обозначены скорости перемещений \dot{u}_i , \dot{u}_i^* , $i, j, p, l = 1, 2, 3$.

Компоненты скорости второго тензора напряжений Пиола–Кирхгофа определяют соотношениями

$$\dot{\sigma}_{ij} = c_{ijpl}(\dot{\varepsilon}_{pl} - \dot{\varepsilon}_{pl}^c)$$

Таким образом, математическая формулировка задачи оптимального управления включает уравнения механики деформируемого твердого тела, полученные из условий стационарности (2.1), и функционал оптимизации:

$$A = \int_0^T \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^c dV dt \rightarrow \inf \quad (2.2)$$

Данный функционал представляет удельную работу рассеяния и характеризует параметр поврежденности.

В качестве функций управления принимаются перемещения $\bar{\mathbf{u}}(t) = f(t)\bar{\mathbf{u}}^*$ точек контактных тел на границе S_c , а функции состояния – перемещения, деформации, напряжения в теле V . Таким образом, определив некоторое решение $\bar{\mathbf{u}}^*$ обратной задачи [19], решается задача поиска оптимальной функции $f(t)$.

В данной работе предлагается анализ следующих моделей определяющих соотношений в ползучести:

1. Неассоциированный закон установившейся ползучести для изотропных сред, имеющих разные характеристики при сжатии и растяжении [20]:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \gamma s_{ij}, \quad \gamma(\sigma_e, \theta) \equiv \frac{1}{2}[\gamma_1 + \gamma_2 + (\gamma_2 - \gamma_1) \sin 3\theta] \quad (2.3)$$

где

$$\gamma_1(\sigma_e) \equiv \frac{3}{2} B^+ \sigma_e^{n_+-1}, \quad \gamma_2(\sigma_e) \equiv \frac{3}{2} B^- \sigma_e^{n_--1} \quad (2.4)$$

σ_e – эффективное напряжение, которое определяется через компоненты девиатора тензора напряжений: $\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$, θ – угол напряженного состояния.

Для материала АК4-1 при температуре $T = 200^\circ\text{C}$ стадия установившейся ползучести при сжатии и при растяжении в течение 250 ч, описывается законом Нортона с разными значениями коэффициентов [12, 13]:

$$\text{– растяжение: } B^+ = 0.5 \times 10^{-14} (\text{кГ/мм}^2)^{-n_+} (\text{час})^{-1}, \quad n_+ = 8$$

$$\text{– сжатие: } B^- = 0.25 \times 10^{-14} (\text{кГ/мм}^2)^{-n_-} (\text{час})^{-1}, \quad n_- = 8$$

Для данного материала характеристики упругости одинаковы при растяжении и сжатии: модуль Юнга $E = 7000 \text{ кГ/мм}^2$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.4$.

2. Неассоциированный закон установившейся ползучести для изотропных сред разносопротивляющихся растяжению и сжатию с учетом параметра поврежденности имеет вид (2.3) с функциями:

$$\gamma_1(\sigma_e) \equiv \frac{3}{2} \frac{B^+ \sigma_e^{n_+-1}}{A_*^{m_+} (1 - \omega)^{m_+}}, \quad \gamma_2(\sigma_e) \equiv \frac{3}{2} \frac{B^- \sigma_e^{n_--1}}{A_*^{m_-} (1 - \omega)^{m_-}} \quad (2.5)$$

Параметр поврежденности ω определяется из уравнения:

$$\dot{\omega}(\sigma_e, \theta) \equiv \frac{1}{2}[\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2 + (\dot{\omega}_2 - \dot{\omega}_1) \sin 3\theta] \quad (2.6)$$

$$\text{где } \dot{\omega}_1 = \frac{B^+ \sigma_e^{n_+ + 1}}{A_*^{m_+ + 1} (1 - \omega)^{m_+}}, \quad \dot{\omega}_2 = \frac{B^- \sigma_e^{n_- + 1}}{A_*^{m_- + 1} (1 - \omega)^{m_-}}.$$

Параметры данного закона ползучести для материала АК4-1 при температуре $T = 200^\circ\text{C}$ [12, 13]:

$$\text{растяжение: } B^+ = 0.45 \times 10^{-14} \text{ (кГ/мм}^2\text{)}^{m_+ - n_+} \text{ (час)}^{-1}, \quad n_+ = 8, \quad m_+ = 7;$$

$$\text{сжатие: } B^- = 0.29 \times 10^{-14} \text{ (кГ/мм}^2\text{)}^{m_- - n_-} \text{ (час)}^{-1}, \quad n_- = 8, \quad m_- = 2.$$

Параметр поврежденности в случае одноосного деформирования есть отношение текущей работы рассеяния A к ее величине на момент разрушения A_* , ($A_* = 1 \text{ кГ/мм}^2$) т.е. приведенная работа $\omega = \frac{A}{A_*}$ [12, 13].

3. Неассоциированный закон установившейся ползучести для анизотропных сред разносопротивляющихся растяжению и сжатию имеет вид (2.3) с учетом следующих функций

$$\gamma_1(\sigma_{ij}) \equiv T_1^{n_+}, \quad \gamma_2(\sigma_{ij}) \equiv T_2^{n_-} \quad (2.7)$$

где квадратичные формы компонент тензора напряжений [15]:

$$T_1 = (A_{11}^+(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + A_{22}^+(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + A_{33}^+(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2A_{12}^+\sigma_{12}^2 + 2A_{23}^+\sigma_{23}^2 + 2A_{31}^+\sigma_{31}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.8)$$

$$T_2 = (A_{11}^-(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + A_{22}^-(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + A_{33}^-(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2A_{12}^-\sigma_{12}^2 + 2A_{23}^-\sigma_{23}^2 + 2A_{31}^-\sigma_{31}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.9)$$

$$A_{11}^+ = \frac{1}{2} \left((B_{22}^+)^{\frac{2}{n_+}} + (B_{33}^+)^{\frac{2}{n_+}} - (B_{11}^+)^{\frac{2}{n_+}} \right), \quad 2A_{12}^+ = 4(B_{12}^+)^{\frac{2}{n_+}} - A_{11}^+ - A_{22}^+$$

$$A_{11}^- = \frac{1}{2} \left((B_{22}^-)^{\frac{2}{n_-}} + (B_{33}^-)^{\frac{2}{n_-}} - (B_{11}^-)^{\frac{2}{n_-}} \right), \quad 2A_{12}^- = 4(B_{12}^-)^{\frac{2}{n_-}} - A_{11}^- - A_{22}^-$$

Остальные компоненты A_{ij}^+ , A_{ij}^- ($i, j = 1, 2, 3$) получаются циклической перестановкой индексов.

На основе экспериментов на растяжение и сжатие сплошных цилиндрических образцов, а также на кручение тонкостенных трубчатых образцов, вырезанных в направлении нормали к плите толщиной 42 мм из сплава АК4-1 и в продольном направлении, при температуре $T = 200^\circ\text{C}$ в течение 400 ч найдены параметры закона ползучести для трансверсально-изотропного материала [11, 13]:

$$n_+ = n_- = n = 12, \quad B_{23}^+ = B_{31}^+ = 2.976 \times 10^{-35} \text{ МПа}^{-n} \cdot \text{с}^{-1}$$

$$B_{11}^+ = B_{22}^+ = B_{33}^+ = B_{12}^+ = 8.935 \times 10^{-35} \text{ МПа}^{-n} \cdot \text{с}^{-1}$$

$$B_{23}^- = B_{31}^- = 0.811 \times 10^{-35} \text{ МПа}^{-n} \cdot \text{с}^{-1}$$

$$B_{11}^- = B_{22}^- = B_{33}^- = B_{12}^- = 1.805 \times 10^{-35} \text{ МПа}^{-n} \cdot \text{с}^{-1}$$

или

$$\begin{aligned} B_{23}^+ &= B_{31}^+ = 8.48 \times 10^{-20} (\text{кГ/мм}^2)^{-n} \text{ч}^{-1} \\ B_{11}^+ &= B_{22}^+ = B_{33}^+ = B_{12}^+ = 2.545 \times 10^{-19} (\text{кГ/мм}^2)^{-n} \text{ч}^{-1} \\ B_{23}^- &= B_{31}^- = 2.31 \times 10^{-20} (\text{кГ/мм}^2)^{-n} \text{ч}^{-1} \\ B_{11}^- &= B_{22}^- = B_{33}^- = B_{12}^- = 5.14 \times 10^{-20} (\text{кГ/мм}^2)^{-n} \text{ч}^{-1} \end{aligned}$$

4. Ассоциированный закон установившейся ползучести для анизотропных сред раз-
носопротивляющихся растяжению и сжатию, в общем виде имеет вид

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.10)$$

где Φ – скалярная потенциальная тензорная функция напряжений [13, 14]:

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma_e, \theta) &\equiv \frac{1}{2} [\phi_1 + \phi_2 + (\phi_2 - \phi_1) \sin 3\theta] \\ \phi_1(T) &= T_1^{n_+ + 1} / n_+ + 1, \quad \phi_2(T) = T_2^{n_- + 1} / n_- + 1 \end{aligned} \quad (2.11)$$

В этом случае в квадратичных формах (2.8), (2.9) коэффициенты находятся по формулам:

$$\begin{aligned} A_{11}^+ &= \frac{1}{2} \left((B_{22}^+)^{\frac{2}{n_+ + 1}} + (B_{33}^+)^{\frac{2}{n_+ + 1}} - (B_{11}^+)^{\frac{2}{n_+ + 1}} \right), \quad 2A_{12}^+ = 4(B_{12}^+)^{\frac{2}{n_+ + 1}} - A_{11}^+ - A_{22}^+ \\ A_{11}^- &= \frac{1}{2} \left((B_{22}^-)^{\frac{2}{n_- + 1}} + (B_{33}^-)^{\frac{2}{n_- + 1}} - (B_{11}^-)^{\frac{2}{n_- + 1}} \right), \quad 2A_{12}^- = 4(B_{12}^-)^{\frac{2}{n_- + 1}} - A_{11}^- - A_{22}^- \end{aligned}$$

Остальные компоненты A_{ij}^+ , A_{ij}^- ($i, j = 1, 2, 3$) получаются циклической перестановкой индексов.

Реализация моделей определяющих соотношений ползучести в системе Marc выполняется с помощью написания пользовательских функций на языке программирования fortran.

3. Численный метод оптимизации кинематической схемы формообразования панелей в режиме ползучести. Применяя основные процедуры метода конечных элементов к вариационному уравнению функционала (2.1) строятся дискретные уравнения задачи деформирования [18, 21]

$${}^{t+dt} \mathbf{K}^{(r-1)} \Delta \mathbf{U}^{(r)} = {}^{t+dt} \mathbf{R}^{(r-1)} \quad (3.1)$$

где ${}^{t+dt} \mathbf{K}^{(r-1)}$ – симметричная матрица касательной жесткости (в матрицах включены дополнительные элементы, образующиеся от контактных ограничений), ${}^{t+dt} \mathbf{R}^{(r-1)}$ – вектор внутренних и внешних сил. Верхние индексы величины $t + dt$ указывают значение времени нагружения, для которого она вычисляется. Верхние индексы величины $(r - 1)$ указывают на номер итерации при уточнении решения методом Ньютона–Рафсона.

Наряду с дискретизацией по времени t , вызванной решением нелинейных задач механики методом конечных элементов, для приближенного решения задачи оптимального управления вводится дополнительная сетка: $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$. Учитывая дискретные по времени уравнения пошаговой процедуры интегрирования (3.1) при условии $dt \leq t_{k+1} - t_k$ минимизируемый функционал (2.2) заменяется формулой

$$\bar{A} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{t=t_k}^{t_{k+1}} \int_V \sigma_{ij} \Delta \varepsilon_{ij}^c dV \rightarrow \inf \quad (3.2)$$

В данном случае, дискретная задача оптимального управления будет включать дискретные по времени уравнения пошаговой процедуры интегрирования (3.1) и минимизируемый функционал (3.2). В такой постановке строится функция Беллмана и задача решается методом динамического программирования [22–25].

Для решения аддитивных задач применяется алгоритм, основное содержание которого состоит в формулировке правил последовательного сжатия множества конкурентоспособных вариантов [22, 23]. Алгоритм представляет собой многошаговый процесс, на каждом шаге которого производится исключение некоторого множества вариантов, о котором в процессе работы алгоритма становится известным, что оно не содержит оптимального варианта.

Для разработки алгоритма оптимизации при деформировании заготовки в реконфигурируемом пуансоне в качестве управляющих параметров вводится вектор-функция перемещений узловых точек контактных тел на границе S_c (стержней) в виде $\bar{U}_z(t) = f(t)\bar{U}_z^*$, где \bar{U}_z^* – заданные конечные перемещения. В этом случае строится сетка в пространстве (t, z) . Шаг по аргументу t задан и равен Δt , по переменной z – Δz . Узлы сетки обозначим через $P_m(n)$. Индекс n означает номер гиперплоскости Σ_n при заданном значении t , а индекс m означает номер узла в гиперплоскости Σ_n . Каждые два узла, лежащие в гиперплоскостях $P_q(n)$ и $P_m(n+1)$, соединены отрезками, длины этих отрезков обозначаются $l_{qm}(n) = f_n(P_q(n), P_m(n+1))$ [23].

В результате таких операций строится граф с вершинами $P_m(n)$, и вместо исходной задачи будет рассматриваться задача поиска на этом графе кратчайшего пути, соединяющего гиперплоскости Σ_0 и Σ_N . Обозначая через $l_m(n)$ ломанную кратчайшей длины, соединяющую узел $P_m(n)$ с гиперплоскостью Σ_0 , можно прийти к рекуррентному соотношению [23]:

$$l_s(n+1) = \min_m \{l_m(n) + l_{ms}(n)\}$$

Минимум берется по тем номерам m , для которых узлы лежат в допустимой области G_n и принадлежат гиперплоскости Σ_n .

Расчет функций $\bar{U}_z(t) = f(t)\bar{U}_z^*$ выполняется методом динамического программирования, реализованным в системе Магс, по заданной сетке. Размеры сетки или шаги метода динамического программирования вычисляются по формуле:

$$\Delta t = t_k - t_{k-1} = \frac{T}{N}, \quad k = 1, \dots, N, \quad t_0 = 0, \quad \Delta z = \frac{\bar{U}_z^*}{M}$$

На каждом интервале $[t_{k-1}, t_k]$ при решении задачи уравнениями (3.1) определяются граничные условия на перемещения контактных тел ΔU_z по заданному алгоритму [25].

В случае деформирования анизотропных материалов законы движения стержней могут быть различны. Задача оптимизации приобретает d -ю размерность, где d – количество независимо движущихся стержней. Увеличение размерности задачи оптимизации приводит к поиску набора функций, обеспечивающих экстремальное значение критерия, т.е. рассматриваются несколько графов с вершинами $P_{m_1}^1(n_1), \dots, P_{m_d}^d(n_d)$, соответствующих нескольким функциям $\bar{U}_z^1(t) = f^1(t)\bar{U}_z^{1*}, \dots, \bar{U}_z^d(t) = f^d(t)\bar{U}_z^{d*}$ для разных контактных тел. Решение задачи оптимизации находится определением на этих графах кратчайших путей с помощью рекуррентного соотношения, причем для каж-

Таблица 1. Результаты расчета деформаций ползучести при деформировании кубического образца по разным моделям определяющих соотношений

Модель	Деформации и параметр поврежденности	Результаты при растяжении: $\sigma_x = 15 \text{ кГ/мм}^2$	Результаты при сжатии: $\sigma_x = -15 \text{ кГ/мм}^2$
Модель разнсопротивляемости в ползучести (2.3), (2.4)	ϵ_x^c	0.0032	-0.0017
	\bar{A} , кГ/мм ²	0.0483	0.0257
Модель разнсопротивляемости в ползучести с учетом поврежденности (2.3), (2.5), (2.6)	ϵ_x^c	0.0035	-0.002
	ω	0.0519	0.0307
	\bar{A} , кГ/мм ²	0.0519	0.0307
Ассоциированный и неассоциированный закон ползучести для анизотропных разнсопротивляющихся сред (2.3), (2.7)–(2.11)	ϵ_x^c	0.0079	-0.0018
	\bar{A} , кГ/мм ²	0.1189	0.0271

дого узла $P_{m_i-1}^{i-1}(n)$ на гиперплоскости Σ_n^{i-1} перебираются все узлы $P_{m_i}^i(n)$ на гиперплоскости Σ_n^i .

В частности, при расчете 2-х оптимальных траекторий (размерность задачи оптимизации $d = 2$) методом динамического программирования для каждого варианта 1-й траектории анализируются все варианты 2-й траектории.

4. Численные результаты моделирования и оптимизации. Тестирование реализованных в программе MSC.Marc моделей определяющих соотношений (2.3)–(2.11) проводилось при решении задач растяжения и сжатия кубического образца в течение $T = 260$ ч постоянными нагрузками (табл. 1). Размеры образца: $1 \times 1 \times 1$ мм.

Согласно численным данным решения задач параметры поврежденности, учитываемые в модели определяющих соотношений (2.6) и вычисленные по результатам (3.2), совпадают. Кроме того, для приближенной оценки параметра поврежденности достаточно использовать модель определяющих соотношений (2.3), (2.4). Завышенные результаты, полученные при ползучести для анизотропных разнсопротивляющихся сред, можно объяснить аппроксимацией экспериментальных данных, полученных при большем времени деформирования.

Для оценки особенностей деформирования материала с разнсопротивляемостью при растяжении и сжатии рассматривается задача кручения квадратной пластинки [20]. Квадратная пластина имеет размеры $200 \text{ мм} \times 200 \text{ мм}$ и толщину 20 мм . Начало прямоугольной системы координат находится в центре пластины, а ось z направлена перпендикулярно пластине (пространственные координаты пластины: $100 \text{ мм} \leq x \leq 100 \text{ мм}$, $100 \text{ мм} \leq y \leq 100 \text{ мм}$, и $10 \text{ мм} \leq z \leq 10 \text{ мм}$). В каждом углу пластинки для задания распределенной нагрузки установлены квадратные площадки размером $20 \text{ мм} \times 20 \text{ мм} \times 10 \text{ мм}$. К четырем площадкам в течение 260 ч приложены два набора распределённых сил одинаковой величины и противоположного направления, эквивалентные сосредоточенной силе по величине 1850 кГ . В результате деформирования образуется седловидная поверхность пластины (рис. 1), и данное испытание имеет сложное напряженное состояние, в котором одновременно существуют растягивающие и сжимающие напряжения. Полученные величины прогибов (перемещения по оси z) для разных моделей определяющих соотношений представлены в табл. 2.

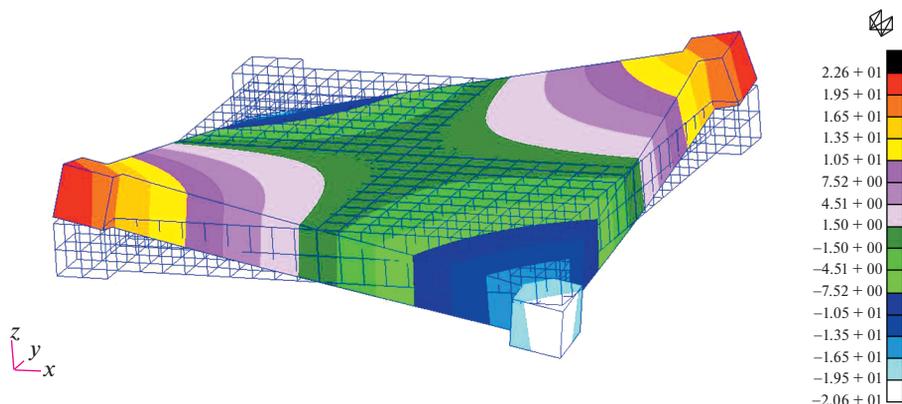


Рис. 1. Конечно-элементная модель исходной и деформированной панели с распределением перемещений по оси z.

Сопоставляя решения, имеем близкие значения прогиба для ассоциированного и неассоциированного закона. На основе этого дальнейшие расчеты будем проводить с использованием неассоциированного закона.

Решение задачи оптимизации траекторий деформирования рассматривается на примере многоточечного формообразования квадратной пластинки в установке с верхней и нижней матрицами, включающими по четыре стержня. Размеры пластинки $500 \times 500 \times 45$ мм. Перемещение жестких тел задается и выполняется на 30 мм. В случае, если имеется только конечная форма панели, то расчет конечного положения стержней, обеспечивающих необходимую упреждающую форму панели, может быть выполнен итерационным методом решения обратной задачи [19].

Анализ решений данной задачи с разными определяющими соотношениями позволяет сделать следующие выводы:

1. Обеспечение больших прогибов вызывает смятия материала в местах контакта с жесткими телами. Это приводит к концентрации напряжений, значительному увеличению параметра поврежденности по модели определяющих соотношений (2.3), (2.5), (2.6), и в итоге к неустойчивому процессу решения.

2. Моделирование ассоциированного закона в системе MSC.Marc возможно только с помощью неявной процедуры интегрирования [26]. В этом случае учет контактных условий приводит также к неустойчивому процессу решения и не позволяет выбрать единые общие параметры итерационного процесса для всех вариантов деформирования.

Таким образом, исследование зависимости оптимальных траекторий деформирования пластинки от свойств материала будет проводиться со следующими определяющими соотношениями в ползучести:

Таблица 2. Значения прогибов в момент времени $T = 260$ ч, полученные при использовании двух типов обобщенного закона Нортон

Тип обобщенного закона Нортон	Прогиб (мм) в узле с координатами (35.35, 35.35, 0)	Прогиб (мм) в узле с координатами (90,90,0)
Неассоциированный (2.3), (2.7)–(2.9)	2.774	18.303
Ассоциированный (2.10), (2.11)	2.752	18.086

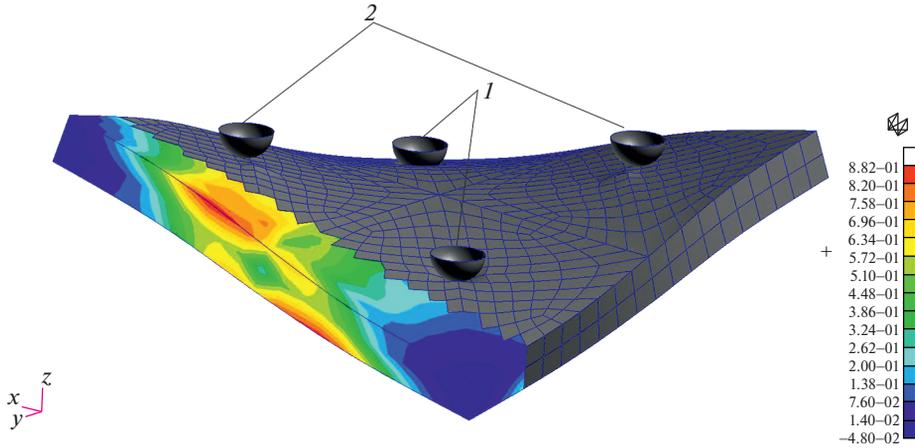


Рис. 2. Деформированная конфигурация пластинки и максимальное значение энергии рассеяния.

1. закон установившейся ползучести для изотропных сред с одинаковыми характеристиками при сжатии и растяжении (2.3), (2.4): $B^+ = B^-$;
2. неассоциированный закон установившейся ползучести для изотропных сред, имеющих разные характеристики при сжатии и растяжении (2.3), (2.4);
3. неассоциированный закон установившейся ползучести для анизотропных сред разносопротивляющихся растяжению и сжатию (2.3), (2.7), (2.8), (2.9).

При движении контактных тел максимальное значение энергии рассеяния в пластинке, при исключении мест смятия от жестких тел, образуются в области перегиба (рис. 2). Таким образом, критерий оптимизации (3.2) рассматривается в данных областях с четырех сторон.

Известно, что для пластин в случае малых прогибов оптимальное деформирование происходит по линейному закону $\bar{U}_z(t) = \frac{t}{T} \bar{U}_z^*$, а в случае больших прогибов опти-

мальное деформирование происходит по нелинейному закону $\bar{U}_z(t) = \sqrt{\frac{t}{T}} \bar{U}_z^*$ [8–10].

В случае одинакового движения всех контактных тел ($d = 1$) оптимальная функция представлена на рис. 3, 4 (жирная сплошная кривая – численные результаты, штрих-пунктирная кривая – аналитические данные для изгиба пластин [8–10]). Численное решение задачи оптимизации траектории деформирования, одинаковой для всех стержней, сводится к перебору вариантов при каждом параметре t_k . Набор функций $f(t)$ задается ломанными линиями, проходящими от точки O к точке B (рис. 3, 4). В результате, оптимальное решение, полученное методом динамического программирования при $N = 3$, $M = 9$ и $N = 4$, $M = 12$ для трех случаев определяющих соотношений, приближается к аналитической кривой и не совпадает с линейной функцией.

В случае различного движения контактных тел, в частности, при $d = 2$ группы контактных жестких тел 1 и 2 (рис. 2) будут перемещаться по разным функциям. Для модели материала, соответствующей закону Нортонa (т.е. без учета разносопротивляемости, анизотропии), вычисленная оптимальная система траекторий состоит из двух одинаковых функций, которые совпадают с траекторией на рис. 3, 4 (жирная сплошная линия). Вычисленная оптимальная система траекторий с законом установившейся ползучести для изотропных сред, имеющих разные характеристики при сжатии и

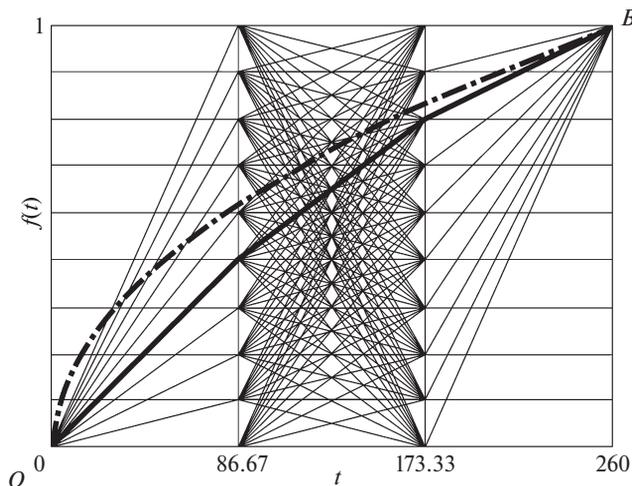


Рис. 3. Варианты законов движения контактных тел при $N = 3$, $M = 9$ и оптимальная функция.

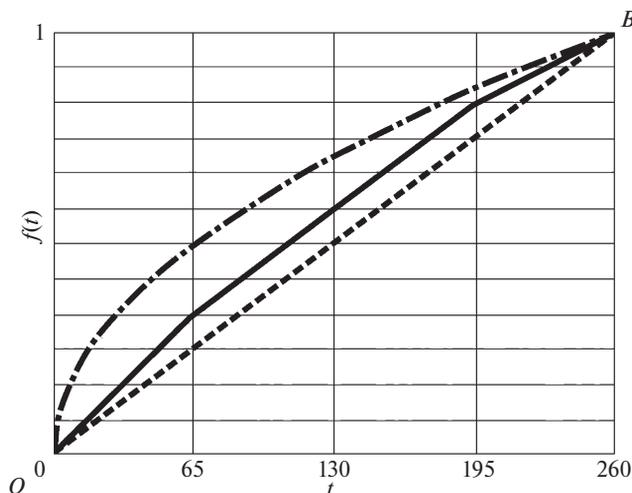


Рис. 4. Варианты законов движения контактных тел при $N = 4$, $M = 12$ и оптимальная функция.

растяжении (2.3), (2.4), и с законом установившейся ползучести для анизотропных сред, разносопротивляющихся растяжению и сжатию (2.3), (2.7), (2.8), (2.9), состоит из двух разных функций для групп контактных тел 1 и 2 (рис. 5, 6 соответственно).

Таким образом, оптимальная система траекторий движения стержней в реконфигурируемой оснастке зависит от материала, а разработанный численный метод позволяет определить движение каждого стержня из оснастки, обеспечивающей наименьшую поврежденность заготовки.

Однако использование данного численного метода требует значительных вычислительных ресурсов. Так, если обозначить через r – время расчета пластинки для произвольного пути деформирования, соединяющего соседние гиперплоскости, то можно

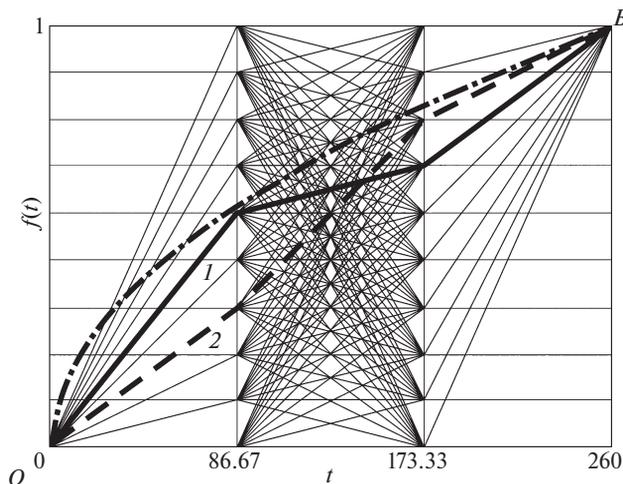


Рис. 5. Варианты законов движения контактных тел при $N = 3$, $M = 9$ и оптимальные функции для модели материала (2.3), (2.4).

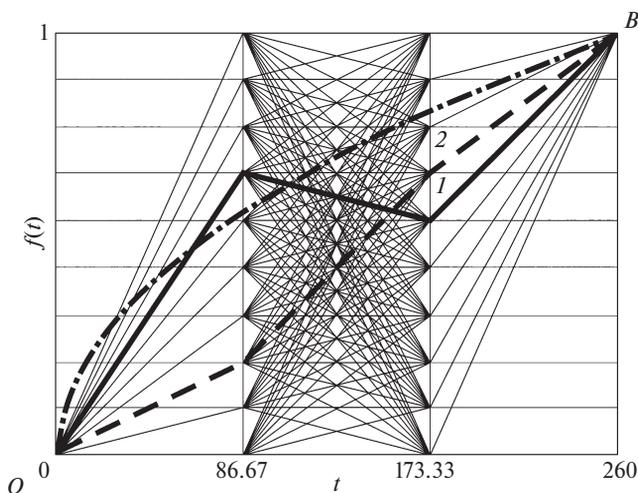


Рис. 6. Варианты законов движения контактных тел при $N = 3$, $M = 9$ и оптимальные функции для модели материала (2.7)–(2.9).

оценить время расчета методом динамического программирования и простым перебором всевозможных путей деформирования (табл. 3). При увеличении N , M время расчета сокращается значительно, например, при $N = 4$, $M = 9$, $d = 1$ время расчета методом динамического программирования $10 \cdot 10 \cdot 2\tau + 10 \cdot 10 \cdot 3\tau + 10 \cdot 4\tau = 540\tau$, а простым перебором траекторий $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 4\tau = 4000\tau$.

Вычисления рекуррентных соотношений выполняются путем построения итераций и решения уравнений (3.1) в системе MSC.Марс. Ввод граничных условий и вывод значения критерия оптимизации выполняется с помощью пользовательских про-

Таблица 3. Сравнение времени расчета методом динамического программирования при $N = 3$, $M = 9$ с перебором траекторий

Размерность, d	Время расчета методом динамического программирования	Время расчета простым перебором траекторий
1	$10*10*2r + 10*3r = 230r$	$10*10*3r = 300r$
2	$10*10*10*10*2r + 10*10*3r = 20300r$	$10*10*10*10*3r = 30000r$
4	$(10*10)^4 * 2r + (10)^4 * 3r = 20003*10^4r$	$(10*10)^4 * 3r = 30000*10^4r$

Таблица 4. Сравнение времени расчета методом динамического программирования при $N = 2$, $M = 9$, $d = 2$ в зависимости от количества потоков на сервере

Время расчета методом динамического программирования	Время расчета при заданном количестве потоков, мин				
	1	2	10	18	20
$10*10*2r = 200r$ (или 100 задач)	1644	877	291	217	197

грамм. Программная реализация метода оптимизации выполнена с учетом алгоритма распределенных вычислений в Visual C, в которой удаленная связь между машинами и потоками устанавливается с помощью протокола распределенной модели СОМ (Distributed СОМ). Программа позволяет распределять вычисления на потоки и вычислительные машины.

Результаты параллельного многопоточного конечно-элементного расчета на многопроцессорной вычислительной машине (Core i5-10400F), в зависимости от заданного количества потоков, представлены в табл. 4. Фактические значения времени расчета свидетельствуют о перспективности увеличения вычислительных потоков.

5. Заключение. В результате разработан численный метод оптимизации деформирования тонкостенных конструкций, учитывающий немонотонные траектории и размерность задачи. Данным методом проанализировано влияние таких свойств материала, как разносопротивляемость и анизотропия в ползучести, на оптимальную систему траекторий деформирования для разных точек пластины. Так для изотропного материала с одинаковыми характеристиками сжатия и растяжения при ползучести оптимальное изменение прогиба пластины будет осуществляться с одинаковой функцией для разных точек.

Данный метод уменьшает объем вычислений в сравнении с перебором всевозможных путей деформирования, так как в процессе расчета исключаются неоптимальные траектории. Несмотря на это, незначительное увеличение параметров метода, в частности размерности, приводит к требованию достаточно больших вычислительных ресурсов.

В рассмотренном методе сходимость зависит от сетки, причем шаги по пространственным переменным зависят от размера шагов по переменной времени, и сама структура сетки зависит от природы задачи [23], в данном случае от свойств материала. Поэтому данный способ нужно рассматривать как возможность получения грубого приближения, а затем уточнять решение, например, методом локальных вариаций или методом блуждающих трубок [22, 23].

С учетом развития вычислительных технологий разработанный метод позволяет на стадии подготовки производства оптимизировать параметры технологического процесса, в частности для формообразования деталей в реконфигурируемом стержневом пуансоне.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 21-11-00165).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аннин Б.Д., Олейников А.И., Бормотин К.С. Моделирование процессов формообразования панелей крыла самолета SSJ-100 // ПМТФ. 2010. Т. 51. № 4. С. 155–165.
<https://doi.org/10.1007/s10808-010-0074-2>
2. Ribeiro F.C., Marinho E.P., Inforzato D.J., Costa P.R., Batalha G.F. Creep age forming: a short review of fundamentals and applications // J. Achiev. Mater. Manuf. Eng. 2010. V. 43. № 1. P. 353–361.
3. Adachi T., Kimura S., Nagayama T., Takehisa H., Shimanuki M. Age forming technology for aircraft wing skin // Proc. of the 9th Int. Conf. on Aluminium Alloys. Ed. by J.F. Nie, A.J. Morton and B.C. Muddle. Melbourne: Inst. of Mater. Eng. Australasia Ltd., 2004. P. 202–207.
4. Кривенок А.А. Моделирование в системе MSC.Marc процесса формообразования деталей в режиме термомодеформационного старения с учетом усадки материала // Уч. зап. КнАГТУ. 2013. № III-1(15). С. 4–10.
[https://doi.org/10.17084/2013.III-1\(15\).1](https://doi.org/10.17084/2013.III-1(15).1)
5. Simon D., Kern L., Wagner J., Reinhart G. A reconfigurable tooling system for producing plastic shields // Proc. CIRP. 2014. V. 17. P. 853–858.
<https://doi.org/10.1016/j.procir.2014.01.095>
6. Walczyk D.F., Lakshminathan J., Kirk D.R. development of a reconfigurable tool for forming aircraft body panels // J. Manuf. Sys. 1998. V. 17. № 4. P. 287–296.
[https://doi.org/10.1016/S0278-6125\(98\)80076-9](https://doi.org/10.1016/S0278-6125(98)80076-9)
7. Su S.Z., Li M.Z., Liu C.G., Ji C.Q., Setchi R., Larkiola J., Panteleev I., Stead I., Lopez R. Flexible tooling system using reconfigurable multi-point thermoforming technology for manufacturing freeform panels // Key Eng. Mater. 2012. V. 504–506. P. 839–844.
<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.504-506.839>
8. Цвелодуб И.Ю. Об оптимальных путях деформирования в условиях ползучести. Некоторые приложения к задачам обработки материалов давлением // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 6. С. 128–136.
9. Цвелодуб И.Ю. Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1991. 133 с.
10. Бормотин К.С., Олейников А.И. Вариационные принципы и оптимальные решения обратных задач изгиба пластин при ползучести // ПМТФ. 2012. Т. 53. № 5. С. 136–146.
<https://doi.org/10.1134/S0021894412050148>
11. Горев Б.В., Масанов И.Ж. Особенности деформирования листовых конструкционных алюминиевых сплавов и плит в режимах ползучести // Технол. машиностр. 2009. № 7. С. 13–20.
12. Соснин О.В., Горев Б.В., Рубанов В.В. Кручение квадратной пластинки из материала, разносопротивляющегося растяжению и сжатию при ползучести // Расчеты прочности судовых конструкций и механизмов. Сборник трудов НИИВТа № 117. Новосибирск: Новосиб. ин-т инженеров вод. трансп., 1976. С. 78–88.
13. Банищикова И.А. Ползучесть изотропных и ортотропных сплавов и длительная прочность элементов конструкций. Дисс. ... доктора физ.-мат. наук. Новосибирск, 2020. 338 с.
14. Банищикова И.А. Построение определяющих уравнений для ортотропных при ползучести материалов с различными свойствами при растяжении и сжатии // ПМТФ. 2020. № 1. С. 102–117.
<https://doi.org/10.15372/PMTF20200110>
15. Соснин О.В. Об анизотропной ползучести материалов // ПМТФ. 1965. № 6. С. 99–104.
16. Yuhao Guo, Gang Liu, Yi Huang. A complemented multiaxial creep constitutive model for materials with different properties in tension and compression // Eur. J. Mech. A/Solids. 2022. V. 93. P. 104510.
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104510>
17. Yan Yu, Wan Min, Wang Haibo, Huang Lin. Design and optimization of press bend forming path for producing aircraft integral panels with compound curvatures // Chinese J. Aeronaut. 2010. V. 23(2). P. 274–282.
[https://doi.org/10.1016/S1000-9361\(09\)60216-8](https://doi.org/10.1016/S1000-9361(09)60216-8)
18. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.

19. *Бормотин К.С.* Итеративный метод решения геометрически нелинейных обратных задач формообразования элементов конструкций в режиме ползучести // Ж. выч. мат. мат. физ. 2013. Т. 53. № 12. С. 145–153.
<https://doi.org/10.1134/S0965542513120026>
20. *Коробейников С.Н., Олейников А.И., Горев Б.В., Бормотин К.С.* Математическое моделирование процессов ползучести металлических изделий из материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии // Выч. мет. программ. 2008. Т. 9. № 1. С. 346–365.
21. *Wriggers P.* Computational contact mechanics. Heidelberg: Springer, 2006. 518 p.
<https://doi.org/10.1007/978-3-540-32609-0>
22. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
23. *Моисеев Н.Н.* Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975. 526 с.
24. *Бормотин К.С., Вин Аунг.* Метод динамического программирования в задачах оптимального деформирования панели в режиме ползучести // Выч. мет. программ. 2018. Т. 19. С. 470–478.
<https://doi.org/10.26089/NumMet.v19r442>
25. *Бормотин К.С., Герасимов К.Е., Романютин М.И.* Численный метод оптимизации кинематической схемы формообразования панелей двойной кривизны // Уч. зап. КНАГТУ. 2020. № VII-1(47). С. 59–69.
26. Marc 2021, Vol A: Theory and User Information, MSC.Software Corporation URL: <http://www.mssoftware.com/product/marc>.