

УДК 539.37

ОРИЕНТАЦИЯ ТРЕЩИНОВАТОСТИ В ХРУПКОМ ТВЕРДОМ ТЕЛЕ ПРИ ТРАДИЦИОННОМ ТРЕХОСНОМ СЖАТИИ

© 2022 г. И. А. Пантелеев^{a,*}, В. А. Ляховский^{b,**}

^aИнститут механики сплошных сред УрО РАН, ПФИЦ УрО РАН, Пермь, Россия

^bГеологическая служба Израиля, Иерусалим, Израиль

*e-mail: pia@icmm.ru

**e-mail: vladimir.lyakhovsky@gmail.com

Поступила в редакцию 13.10.2021 г.

После доработки 12.12.2021 г.

Принята к публикации 13.12.2021 г.

Представлено обобщение скалярной нелинейной реологической модели деформирования хрупкого твердого тела на случай тензорного параметра поврежденности, главные значения которого описывают сокращение площади поперечного сечения материала в трех ортогональных направлениях. Введенный тензорный параметр поврежденности позволяет описать ортотропию упругих свойств материала, вызванную развитием микротрещиноватости в процессе его деформирования. Для случая традиционного трехосного сжатия рассмотрены две характерные задачи: определение ориентации поврежденности (микротрещиноватости) во всем материале и определение ориентации зоны локализованной поврежденности, обеспечивающие максимальную скорость ее роста. В результате решения первой задачи определена степень разориентировки исходной трещиноватости и скорости роста новой трещиноватости в зависимости от параметра анизотропии поврежденности. Решение второй задачи позволило показать, что оптимальным углом наклона зоны локализованной поврежденности является угол Кулона–Мора с микротрещиноватостью внутри зоны, ориентированной либо строго вертикально, либо под углом, близким к углу Кулона–Мора.

Ключевые слова: тензорная поврежденность, нелинейная механика, ориентационные эффекты, направленная трещиноватость, зона локализации разрушения, индуцированная поврежденностью анизотропия

DOI: 10.31857/S0572329922040092

1. Введение. В 1773 году Шарль-Огюстен де Кулон предложил критерий разрушения материала при сжатии, ставший впоследствии основополагающим в геомеханике [1]. Согласно этому критерию разрушение материала происходит вдоль плоскости, на которой действующее касательное напряжение превышает эффективное нормальное напряжение, складывающееся из сцепления C и произведения давления на коэффициент трения χ :

$$|\tau| = \chi\sigma_n + C \quad (1.1)$$

В свою очередь, сцепление C (или когезия) является собственной прочностью материала на сдвиг, а коэффициент трения определяется углом внутреннего трения $\varphi = \text{tg}^{-1}(\chi)$. Ориентация плоскости, по которой происходит разрушение материала, определяется максимумом кулоновских напряжений $|\tau| - \chi\sigma_n$ и задается углом Куло-

на—Мора относительно направления действия максимального главного сжимающего напряжения:

$$\theta_{\text{СМ}} = \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2} \right) \quad (1.2)$$

Коэффициент сцепления и угол внутреннего трения обуславливают прочностные характеристики породы, а для их определения проводятся испытания цилиндрических образцов на одноосное сжатие с боковым подпором (схема Кармана) [2], которое в зарубежной литературе носит название традиционного трехосного сжатия. Несмотря на недостатки способа определения механических и прочностных свойств горных пород в экспериментах по схеме Кармана, этот вид испытаний в настоящее время остается наиболее распространенным и лежит в основе соответствующих ГОСТов. Наиболее полный обзор по традиционному и истинному трехосному сжатию горных пород с анализом недостатков и преимуществ каждого из подходов представлен в [3]. Также необходимо отметить, что соотношение (1.2) легло в основу модели образования разломов в обстановке чистого сдвига Кулона—Андерсона [4], которая широко используется в тектонофизике для интерпретации ориентации вторичных разрывов и разломов в поле действующих тектонических сил [5, 6].

Неупругое поведение различных материалов и горных пород, включая хрупкое разрушение при низких давлениях и катакластическое течение при высоких давлениях, как правило, описывается упругопластическими соотношениями [7–10]. Бифуркационный анализ этих соотношений успешно предсказывает возникновение полос деформации, но не описывает их эволюцию, потому что кинетические уравнения в явном виде не включены в определяющие соотношения упругопластического тела [11]. Этот подход также не учитывает постепенную деградацию упругих свойств материала, вызванную развитием микроскопических повреждений. Следующей пионерской работе Качанова [12] было разработано множество моделей поврежденности хрупких и пластичных тел, учитывающих кинетику процесса разрушения [13–17]. Постепенное накопление повреждений и их локализация в узкой зоне, приводящая к макроскопическому разрушению, согласуется с общепризнанным представлением о разрушении как эволюционном многомасштабном процессе, характеризующемся несколькими стадиями развития от зарождения и роста микротрещин, до их взаимодействия, слияния в магистральную трещину [18–20]. Однако вопрос ориентации зоны локализованной поврежденности, предсказываемой различными моделями, все еще остается дискуссионным. Прямое численное моделирование упругих взаимодействий, слияния и локализации микрповреждений показало, что ориентация образующейся магистральной трещины (разлома) в хрупком материале в условиях традиционного трехосного сжатия не соответствует углу Кулона—Мора [21]. При моделировании использовались соотношения классической континуальной механики поврежденности для изотропного линейно-упругого материала с уменьшающимся модулем Юнга как функцией скалярного параметра поврежденности, d :

$$E(d) = (1 - d)E_0 \quad (1.3)$$

Степень поврежденности материала d варьируется от нуля для неповрежденного материала, до единицы при макроразрушении. E_0 — модуль Юнга неповрежденного образца. В этих моделях коэффициент Пуассона ν считается постоянным в независимости от уровня поврежденности.

Авторы работы [21] пришли к выводу, что несоответствие между углом разлома и углом, предсказанным моделью Кулона—Мора, указывает на то, что разрушение при сжатии является результатом коллективного развития повреждений внутри образца и их дальнедействующего упругого взаимодействия. Также они предположили, что критерий Кулона—Мора не позволяет оценить параметры материала, традиционно опре-

деляемые по углу магистральной трещины [22]. Полученные в [21] зависимости угла наклона зоны локализации разрушения от коэффициента Пуассона и других параметров модели, по мнению авторов настоящей статьи, не означают неспособность теории Кулона–Мора описывать ориентацию магистральных трещин при разрушении материала, а вместе с экспериментальными данными указывают на необходимость отказа от представлений идеального линейно-упругого тела. Горные породы, как и многие другие хрупкие тела, представляют собой неоднородную среду, содержащую микротрещины, поры и различные структурные неоднородности. Макроскопические свойства такой среды зависят от вида нагружения или вида деформирования. Это приводит к индуцированной дефектами анизотропии упругих свойств среды в процессе ее деформирования, взаимосвязи сдвигового и объемного деформирования, что проявляется в виде нелинейного отклика среды на приложенную нагрузку.

Настоящая работа посвящена обобщению скалярной нелинейной реологической модели [23–25] на случай тензорной поврежденности и ее применению для определения ориентации трещиноватости, возникающей на различных стадиях традиционного трехосного сжатия хрупкого твердого тела. Обобщение модели, основные принципы которой сформулированы в [26], осуществляется в рамках анизотропной континуальной механики поврежденности, вклад ансамблей разноориентированных микротрещин в упругие и прочностные свойства материала описывается тензором поврежденности второго ранга. Построенная модель позволяет описать основные свойства неоднородных сред с микротрещиноватостью: нелинейное упругое поведение, зависимость макроскопических свойств от вида напряженно-деформированного состояния, индуцированную дефектами ортотропию механических свойств. Предложенное обобщение позволяет описывать деформирование материала с исходной трещиноватостью при нагружении по произвольным трехмерным многозвенным траекториям.

В начале статьи кратко обсуждаются основные особенности нелинейной модели со скалярным параметром поврежденности. Затем обобщены основные определяющие и кинетические соотношения для нелинейной модели с анизотропной поврежденностью, полученные в [26] для частного случая соосной ориентировки нагружения и поврежденности. В заключение представлено решение двух задач, описывающее различные этапы развития поврежденности и ее ориентацию при традиционном трехосном сжатии.

2. Нелинейная реологическая модель деформирования хрупкого тела. Многочисленные экспериментальные исследования деформационного поведения материалов со структурными неоднородностями различного типа, показали, что их свойства зависят от вида нагружения или вида деформирования. Данная зависимость определяется вариативностью отклика микроскопических неоднородностей на внешние воздействия различной конфигурации. Еще одной особенностью деформационного поведения таких сред является взаимосвязь процессов сдвигового и объемного деформирования, приводящая, в частности, к дилатансии материала в условиях сдвиговых нагрузок.

В пионерской работе [27] Ю.Н. Работновым была предложена модель упругой среды с модулями упругости, зависящими от напряжений. Этот подход получил дальнейшее развитие в серии работ Е.В. Ломакина [28–31], в которых определяющие соотношения формулируются также в пространстве напряжений. Аналогичные разномодульные модели обсуждались также в работах [32–34].

Особенностью такого подхода является формулировка определяющих соотношений в напряжениях. Для моделей с изменяющейся степенью поврежденности (количества микротрещин, пустот или другого типа дефектов), приводящей к деградации упругих модулей, применение определяющих соотношений в напряжениях к описанию деформационного разупрочнения сталкивается с трудностями ввиду невозможности явного описания эволюции предела текучести [35]. Напротив, формулировка определяющих соотношений в деформациях показала свою эффективность в описа-

нии поведения материалов, переход к неупругому поведению и условие текучести которых зависят как от свойств самого материала (поврежденности), так и от истории нагружения [35–39]. Несмотря на схожесть формулировок определяющих соотношений в деформациях и напряжениях, они не эквивалентны, когда рассматривается разупрочнение материала [40–43].

Экспериментальные исследования деформационного поведения хрупких материалов, в частности горных пород, показали, что нелинейное поведение проявляется уже при малых деформациях [44–47]. В работе [48] на основе анализа множества экспериментальных данных авторами предложен общий вид упругой энергии (в деформациях) в предположении, что это функция второго порядка инвариантов тензора деформации. Их выводы обеспечили математическую основу для формулировки энергии упругой деформации, обсуждавшейся ранее в [49–54]:

$$U = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 - \gamma I_1 \sqrt{I_2} \right) \quad (2.1)$$

где λ , μ – параметр Ламе, γ – дополнительный упругий модуль, определяющий степень нелинейности материала, $I_1 = \varepsilon_{ij}$, $I_2 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$ – первый и второй инвариант тензора деформации соответственно. В отличие от традиционных моделей нелинейной упругости, которые базируются на включении в выражение для упругой энергии слагаемых более высоких порядков по деформации [55], эта модель оперирует только слагаемыми второго порядка. Особенностью традиционных моделей является проявление нелинейного отклика только при высоком уровне приложенных усилий. Описание нелинейного отклика при малых нагрузках в данной модели обеспечивается нелинейной связью компонент тензора напряжения и компонент тензора деформации:

$$\sigma_{ij} = \left(\lambda - \frac{\gamma}{\xi} \right) I_1 \delta_{ij} + 2 \left(\mu - \frac{\gamma \xi}{2} \right) \varepsilon_{ij} \quad (2.2)$$

с упругими модулями $\lambda_{\text{eff}} = \lambda - \frac{\gamma}{\xi}$, $\mu_{\text{eff}} = \mu - \frac{\gamma \xi}{2}$, зависящими от вида напряженно-деформированного состояния, определяемого параметром $\xi = \frac{I_1}{\sqrt{I_2}}$. Параметр ξ меняется

от $-\sqrt{3}$ для всестороннего сжатия до $\sqrt{3}$ при всестороннем растяжении; $\xi = \pm 1$ соответствует одноосному сжатию/растяжению, а $\xi = 0$ – чистому сдвигу. Нелинейное слагаемое позволяет описывать разномодульность, т.е. скачкообразное изменение упругих модулей при переходе от растяжения к сжатию [32, 33]. Оно также позволяет описывать дилатансию материала при чистом сдвиге [24], являющуюся неотъемлемым свойством многих хрупких тел с микроструктурными неоднородностями.

В работах [25, 50] в модель введена зависимость упругих свойств от скалярного параметра поврежденности α , описывающего плотность микротрещин, в виде $\mu = \mu_0 + \mu_1 \alpha$, $\gamma = \gamma_1 \alpha$, где μ_1, γ_1 – материальные параметры. Кинетическое уравнение для роста поврежденности при этом имеет вид:

$$\frac{d\alpha}{dt} = C_d I_2 (\xi - \xi_0) \quad (2.3)$$

где $C_d > 0$ описывает скорость роста поврежденности при заданном уровне деформации, ξ_0 – материальный параметр, контролирующий переход от залечивания микротрещин к их росту. Параметр ξ_0 связан с упругими модулями и углом внутреннего трения соотношением:

$$\xi_0 = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{9 + 2k^2 \left(2 + 3 \frac{\lambda_0}{\mu_0}\right)}} \quad (2.4)$$

где $k = \frac{\sin \varphi}{1 - \frac{\sin \varphi}{3}}$ и определяется по результатам традиционных испытаний материала

по схеме Кармана. В следующем разделе будет представлено обобщение нелинейно упругой модели на случай тензорной поврежденности.

3. Нелинейная модель деформирования твердого тела с анизотропией, индуцированной поврежденностью. *3.1. Тензор поврежденности и определяющие соотношения.* Несмотря на широкое использование моделей со скалярным параметром поврежденности, отражающем изменение площади поперечного сечения материала при росте микротрещин или деградацию его соответствующих упругих модулей [56–58], многочисленные эксперименты указывают на тензорную природу явления разрушения. Для описания ориентационных эффектов развития поврежденности вводятся тензорные параметры второго или четвертого рангов [59–61]. Следуя классической теории анизотропной поврежденности [62, 63], в работе [26] предложена модель, в которой поврежденность материала определяется симметричным тензором второго ранга Ω_{ij} . Главные направления этого тензора задают направления ортотропии материала, а главные значения $\{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ определяют изменение эффективной площади поперечных сечений, перпендикулярных к каждой из осей ортотропии (рис. 1.):

$$\Omega_i = \frac{(A_i - A_i^*)}{A_i} \quad (3.1)$$

где A_i и A_i^* – площади поперечного сечения неповрежденного и поврежденного материала в плоскости с нормалью n_i .

Ранее в работе авторов [26] было показано, что использование методологии континуальной механики анизотропной поврежденности, в частности, принципа эквивалентности энергии поврежденного и фиктивного неповрежденного состояния [64], приводит к следующему выражению для упругой энергии:

$$W(\{\tilde{\epsilon}^*, \tilde{\Omega}\}) = \frac{1}{2} \{\tilde{\epsilon}^*\}^T \{C_0\} \{\tilde{\epsilon}^*\} = W(\tilde{\epsilon}, 0) = \frac{1}{2} \{\tilde{\epsilon}\}^T \{C(\tilde{\Omega})\} \{\tilde{\epsilon}\} \quad (3.2)$$

где $\{\tilde{\epsilon}\}$ – тензор деформации, $\{\tilde{\epsilon}^*\}$ – тензор эффективных деформаций, $\{C_0\}$ и $\{C(\tilde{\Omega})\}$ – матрица жесткости неповрежденного и поврежденного материала соответственно.

Анализируя соотношение (3.2), можно сформулировать основные особенности и недостатки классического подхода к построению энергии упругой деформации. Во-первых, ввиду несимметричности тензора эффективных деформаций для определения энергии поврежденного анизотропного материала требуется использование того или иного способа симметризации этого тензора. Основные способы симметризации и их последствия разобраны в [63], обобщенная форма симметризации, содержащая классические аддитивную и мультипликативную схемы как частные случаи, приведена в [65]. Во-вторых, такая формулировка не подходит для описания деформационного поведения хрупких материалов с разноориентированными микротрещинами, которым присуща зависимость упругих свойств от вида напряженно-деформированного состояния.

Для преодоления сформулированных недостатков, прежде всего, введем симметризованный тензор фиктивной деформации, представляющий собой разность между де-

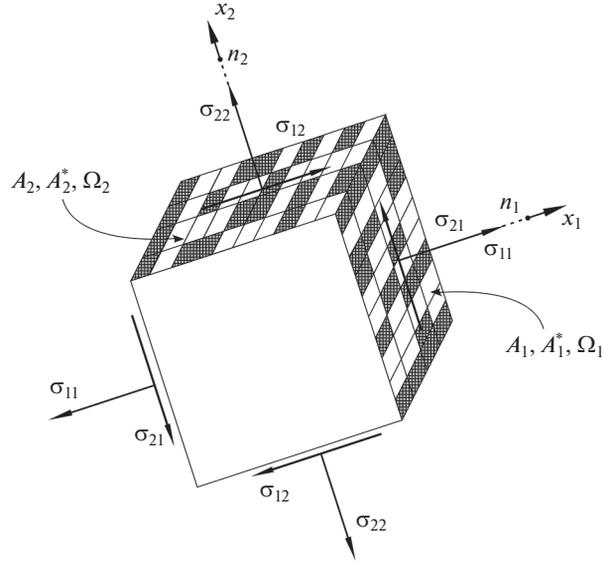


Рис. 1. Представительный объем материала с ортотропной поврежденностью.

формацией в фиктивном неповрежденном состоянии и эффективной деформацией в поврежденном состоянии, в виде:

$$\varepsilon_{ij}^{(\Omega)} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ik} \Omega_{kj} + \varepsilon_{jk} \Omega_{ki}) \quad (3.3)$$

характеризующий деформацию поврежденного материала. Инварианты тензора фиктивной деформации определяются как:

$$\begin{aligned} I_1^{(\Omega)} &= \varepsilon_{ij}^{(\Omega)} \delta_{ij} \\ I_2^{(\Omega)} &= \varepsilon_{ij}^{(\Omega)} \varepsilon_{ij} \end{aligned} \quad (3.4)$$

В частном случае в главных осях тензора поврежденности инварианты имеют вид:

$$\begin{aligned} I_1^{(\Omega)} &= \varepsilon_{11} \Omega_1 + \varepsilon_{22} \Omega_2 + \varepsilon_{33} \Omega_3 \\ I_2^{(\Omega)} &= (\varepsilon_{11} \Omega_1)^2 + (\varepsilon_{22} \Omega_2)^2 + (\varepsilon_{33} \Omega_3)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon_{12}^2 (\Omega_1 + \Omega_2)^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_{13}^2 (\Omega_1 + \Omega_3)^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_{23}^2 (\Omega_2 + \Omega_3)^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

По аналогии с энергией скалярной модели (2.1), представим энергию упругой деформации анизотропного поврежденного материала в виде трех слагаемых (см. также [26]):

$$W(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\Omega}) = \left[\frac{\lambda_0}{2} I_1^2 + \mu_0 I_2 \right] + [\lambda_1 (I_1^{(\Omega)})^2 + \mu_1 I_2^{(\Omega)}] - \gamma I_1^{(\Omega)} \sqrt{I_2^{(\Omega)}} \quad (3.6)$$

где λ_0 , μ_0 – параметры Ламе исходного неповрежденного изотропного материала, λ_1 , μ_1 – параметры, характеризующие деградацию упругих модулей при росте поврежденности, γ – дополнительный модуль, ответственный за нелинейность при накоплении повреждений. Первое слагаемое в (3.6) представляет собой энергию деформирования исходного неповрежденного изотропного материала, второе слагаемое – энергию деформации материала с анизотропией, индуцированной поврежденностью, а третье

слагаемое отвечает за нелинейность и разномодульность деформационного отклика материала, зависимость его свойств от вида напряженно-деформированного состояния. В случае нулевой поврежденности $\tilde{\Omega} = 0$ выражение (3.6) сводится к классической гуконской энергии упругого изотропного тела. В случае изотропной поврежденности, $\Omega_{ij} = \Omega \delta_{ij}$ и линейно-упругого изотропного тела ($\gamma = 0$) выражение для энергии будет иметь вид:

$$W(\tilde{\xi}, \tilde{\Omega}) = (1 - \Omega^2) \left[\frac{\lambda_0}{2} I_1^2 + \mu_0 I_2 \right] \quad (3.7)$$

Из (3.7) следует, что эффективные упругие модули, например модуль Юнга, будут определяться как $E(\Omega) = (1 - \Omega^2)E_0$, что аналогично модели Качанова (1.3). В случае нелинейной модели изотропной поврежденности соотношение (3.6) редуцируется к нелинейной реологической модели (2.1) с модулями λ , μ , γ , линейно зависимиыми от скалярного параметра поврежденности $\alpha = \Omega^2$. Различие в степенях α и Ω является спецификой анизотропной формулировки и обусловлено использованием гипотезы эквивалентности энергии.

Следуя [26], примем $\lambda_1 = 0$ и, используя соотношения Мурнагана [55], получим выражение для компонент тензора напряжений Коши для общего случая недиагональных тензоров деформации и поврежденности:

$$\sigma_{lm} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{lm}} = [\lambda_0 I_1 \delta_{lm} + 2\mu_0 \varepsilon_{lm}] - \gamma \frac{\partial I_1^{(\Omega)}}{\partial \varepsilon_{lm}} \sqrt{I_2^{(\Omega)}} + \left(\mu_1 - \frac{\gamma}{2} \frac{I_1^{(\Omega)}}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} \right) \frac{\partial I_2^{(\Omega)}}{\partial \varepsilon_{lm}} \quad (3.8)$$

где производные от инвариантов (3.4) равны:

$$\frac{\partial I_1^{(\Omega)}}{\partial \varepsilon_{lm}} = \Omega_{lm}$$

$$\frac{\partial I_2^{(\Omega)}}{\partial \varepsilon_{lm}} = \frac{1}{2} (\Omega_{li} \varepsilon_{ik} \Omega_{km} + \Omega_{mi} \varepsilon_{ik} \Omega_{kl}) + \frac{1}{2} (\Omega_{ij} \varepsilon_{mk} \Omega_{kj} + \Omega_{mj} \varepsilon_{lk} \Omega_{kl})$$

Здесь необходимо отметить особенность, присущую всем анизотропным моделям. Из выражения (3.8) следует, что в случае несоосных тензора поврежденности и тензора деформации тензор напряжений будет не соосен им обоим. Так, например, в случае диагонального тензора поврежденности в условиях деформации сдвига (когда заданы только недиагональные компоненты), тензор напряжений будет иметь как недиагональные компоненты, связанные с характером приложенной деформации, так и диагональные компоненты, связанные с дилатансией за счет роста поврежденности. В частном случае соосности тензоров деформации и поврежденности в главных осях этих тензоров, который рассмотрен в [26], выражение (3.8) редуцируется к:

$$\sigma_n = \lambda_0 I_1 - \frac{\gamma \Omega_n I_1^{(\Omega)}}{\xi^{(\Omega)}} + (2\mu_0 + 2\mu_1 \Omega_n^2 - \gamma \Omega_n^2 \xi^{(\Omega)}) \varepsilon_n \quad (3.9)$$

где σ_n , ε_n — главные напряжения и деформации соответственно, $\xi^{(\Omega)} = \frac{I_1^{(\Omega)}}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}}$ — параметр, характеризующий тип напряженно-деформированного состояния поврежденного материала по аналогии с параметром $\xi = \frac{I_1}{\sqrt{I_2}}$ для неповрежденного материала.

При $\Omega_1 \neq \Omega_2 \neq \Omega_3$ поврежденный материал будет ортотропным с упругими модулями,

зависящими от главных поврежденностей, вида напряженно-деформированного состояния и величины приложенных главных деформаций:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \lambda_0 + 2\mu_0 + 2\mu_1\Omega_1^2 - \gamma\Omega_1^2\xi^{(\Omega)} - \frac{2\gamma\varepsilon_1\Omega_1^3}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} + \frac{\gamma\Omega_1^4\varepsilon_1^2\xi^{(\Omega)}}{I_2^{(\Omega)}} \\
C_{22} &= \lambda_0 + 2\mu_0 + 2\mu_1\Omega_2^2 - \gamma\Omega_2^2\xi^{(\Omega)} - \frac{2\gamma\varepsilon_2\Omega_2^3}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} + \frac{\gamma\Omega_2^4\varepsilon_2^2\xi^{(\Omega)}}{I_2^{(\Omega)}} \\
C_{33} &= \lambda_0 + 2\mu_0 + 2\mu_1\Omega_3^2 - \gamma\Omega_3^2\xi^{(\Omega)} - \frac{2\gamma\varepsilon_3\Omega_3^3}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} + \frac{\gamma\Omega_3^4\varepsilon_3^2\xi^{(\Omega)}}{I_2^{(\Omega)}} \\
C_{12} &= \lambda_0 - \frac{\gamma(\varepsilon_2\Omega_1\Omega_2^2 + \varepsilon_1\Omega_2\Omega_1^2)}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} + \frac{\gamma\Omega_1^2\Omega_2^2\varepsilon_1\varepsilon_2\xi^{(\Omega)}}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} \\
C_{13} &= \lambda_0 - \frac{\gamma(\varepsilon_3\Omega_1\Omega_3^2 + \varepsilon_1\Omega_3\Omega_1^2)}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} + \frac{\gamma\Omega_1^2\Omega_3^2\varepsilon_1\varepsilon_3\xi^{(\Omega)}}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} \\
C_{23} &= \lambda_0 - \frac{\gamma(\varepsilon_3\Omega_2\Omega_3^2 + \varepsilon_2\Omega_3\Omega_2^2)}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} + \frac{\gamma\Omega_2^2\Omega_3^2\varepsilon_2\varepsilon_3\xi^{(\Omega)}}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} \\
C_{44} &= 2\mu_0 + \frac{\mu_1(\Omega_3 + \Omega_2)^2}{2} - \frac{\gamma(\Omega_3 + \Omega_2)^2\xi^{(\Omega)}}{4} \\
C_{55} &= 2\mu_0 + \frac{\mu_1(\Omega_1 + \Omega_3)^2}{2} - \frac{\gamma(\Omega_1 + \Omega_3)^2\xi^{(\Omega)}}{4} \\
C_{66} &= 2\mu_0 + \frac{\mu_1(\Omega_1 + \Omega_2)^2}{2} - \frac{\gamma(\Omega_1 + \Omega_2)^2\xi^{(\Omega)}}{4}
\end{aligned}$$

В отличие от классических моделей континуальной механики поврежденности максимальное значение компонент тензора поврежденности не всегда равно единице. Допустимые максимальные значения определяются из условия выпуклости потенциала (3.6). Для скалярной модели условия выпуклости приведены в [50].

3.2. Кинетика поврежденности. Ранее в работе [26] на основе уравнения баланса энергии и энтропии было предложено выражение для локального производства энтропии, вызванного ростом поврежденности:

$$\Gamma = -\frac{\partial W}{\partial \Omega_{lm}} \frac{\partial \Omega_{lm}}{\partial t} > 0 \quad (3.10)$$

Согласно принципу Онзагера [66] линейная связь между вынуждающей силой и термодинамическим потоком приводит к кинетическому уравнению для эволюции поврежденности:

$$\frac{d\Omega_{lm}}{dt} = -L_{ijlm} \frac{\partial W}{\partial \Omega_{ij}} \quad (3.11)$$

где L_{ijlm} – матрица кинетических коэффициентов, положительно определенная функция параметров состояния системы, описывающая эволюцию компонент тензора поврежденности. Уравнение (3.11) позволяет описать не только процесс роста поврежденности в поле внешних приложенных напряжений, но и залечивание микротрещин, наблюдающееся при высоком уровне бокового давления и высокой температуре. На основе имеющихся экспериментальных результатов [67] примем гипотезу об от-

существовании взаимного влияния компонент тензора поврежденности на рост друг друга, тогда матрица L_{ijlm} может быть представлена в виде:

$$L_{ijlm} = \frac{L}{\sqrt{\Omega_{kn}\Omega_{kn}}} (\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}) \quad (3.12)$$

где параметр L , как было показано в [26], является функцией среднего напряжения. Необходимо отметить, что отказ от гипотезы взаимного влияния требует дополнительных истинно трехосных экспериментальных подтверждений, которые в настоящее время отсутствуют. Нормирование производных компонент тензора поврежденности на $\sqrt{\Omega_{kn}\Omega_{kn}}$ связано с необходимостью устранения зависимости правой части соотношения (3.11) от поврежденности, приводящей к экспоненциальному росту поврежденности при постоянном уровне приложенных деформаций.

С использованием (3.6) получим общее выражение для производной компонент тензора поврежденности по времени:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_{lm}}{dt} &= \frac{L}{\sqrt{\Omega_{kn}\Omega_{kn}}} \gamma \left[\frac{\partial I_1^{(\Omega)}}{\partial \Omega_{lm}} \sqrt{I_2^{(\Omega)}} - \left(\frac{\mu_1}{\gamma} - \frac{1}{2} \frac{I_1^{(\Omega)}}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} \right) \frac{\partial I_2^{(\Omega)}}{\partial \Omega_{lm}} \right] \\ \frac{\partial I_1^{(\Omega)}}{\partial \Omega_{lm}} &= \varepsilon_{lm}; \quad \frac{\partial I_2^{(\Omega)}}{\partial \Omega_{lm}} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{li}\Omega_{ik}\varepsilon_{km} + \varepsilon_{mi}\Omega_{ik}\varepsilon_{kl}) + \frac{1}{2} (\varepsilon_{lj}\Omega_{mk}\varepsilon_{kj} + \varepsilon_{mj}\Omega_{lk}\varepsilon_{kj}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Из выражения (3.13) следует, что начало роста поврежденности определяется взаимным соотношением между скоростью изменения второго инварианта тензора эффективных деформаций, его квадратным корнем, параметром вида напряженно-деформированного состояния $\frac{I_1^{(\Omega)}}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}}$ и модулем μ_1 . В случае исходного изотропного состояния

$\Omega_{11} = \Omega_{22} = \Omega_{33} = \sqrt{\alpha}$ выражение для первого инварианта скорости роста поврежденности редуцируется к кинетическому уравнению (2.3) с $L = C_d$, откуда следует определение дополнительного материального параметра $\mu_1 = \gamma \xi_0$.

В случае соосности тензора деформации и тензора поврежденности в системе координат главных осей тензоров кинетическое уравнение (3.13) будет иметь вид:

$$\frac{d\Omega_k}{dt} = \frac{L}{\sqrt{\Omega_l\Omega_l}} \gamma \left[\varepsilon_k \sqrt{I_2^{(\Omega)}} - \left(2\xi_0 - \frac{I_1^{(\Omega)}}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} \right) \varepsilon_k^2 \Omega_k \right] \quad (3.14)$$

Необходимо отметить, что в случае вращения тензора деформации относительно тензора эффективных деформаций (поврежденности), например для криволинейной траектории нагружения, скорость изменения компонент тензора поврежденностей будет определяться коротационной производной Зарембы–Яуманна [68]:

$$\overset{\nabla}{\Omega} = \dot{\Omega} - \Omega^T S - S^T \Omega, \quad (3.15)$$

где S – тензор спина, описывающий вращение базисных векторов.

Важными аспектами, определяющими возможность использования кинетических уравнений (3.13) и (3.14) в прикладных задачах, являются информация об исходной (начальной) поврежденности материала и оценка кинетических коэффициентов, определяющих скорость изменения компонент тензора поврежденности. Калибровка кинетических уравнений и входящих в них коэффициентов осуществляется на основе данных лабораторных экспериментов по трехосному деформированию образцов горных пород с непрерывной регистрацией акустической эмиссии. В работе [26] было показано, что для калибровки кинетического уравнения (3.14) для главных компонент

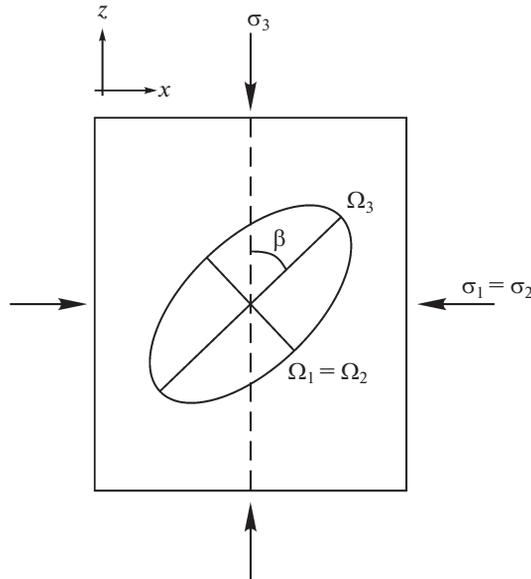


Рис. 2. Ориентация эллипсоида поврежденности относительно оси активного сжатия.

тензора поврежденности достаточными являются данные об изменении упругих модулей и скорости акустической эмиссии в процессе деформирования образца горной породы. На лабораторном масштабе в вопросе определения начальной поврежденности материала наиболее информативным является метод компьютерной микротомографии, позволяющий получить количественные оценки трещиноватой структуры образца. На геологическом масштабе в задачах оценки состояния горного массива можно говорить о некоторой текущей конфигурации напряженно-деформированного состояния среды, для которой с использованием полевых измерений могут быть получены данные о природных напряжениях. Оценка компонент тензора поврежденности в этом случае может быть получена сейсмическими методами из данных о пространственных вариациях скоростей продольных и поперечных волн различной поляризации (сейсмотомографии), зависящих как от вида напряженно-деформированного состояния, так и от текущей поврежденности среды.

4. Ориентация микротрещиноватости при традиционном трехосном сжатии. Рассмотрим задачу развития поврежденности при одноосном сжатии с боковым подпором материала, имеющем в исходном состоянии определенно ориентированную микротрещиноватость. Исходная трещиноватость задается главными значениями тензора поврежденности $\Omega_3 = \Omega > \Omega_1 = \Omega_2 = q\Omega$, $q \in [0, 1]$. Параметр q определяет степень анизотропии поврежденности материала. Такой вид тензора поврежденности соответствует материалу с ансамблем одинаково ориентированных микротрещин. Ориентация трещиноватости определяется эллипсоидом поврежденности. Вращение эллипсоида поврежденности допускается только вокруг оси OY , а его ориентация задается углом $\beta \in [0^\circ, 90^\circ]$ между осью активного сжатия и главной осью, соответствующей максимальной главной поврежденности Ω_3 (рис. 2).

Будем работать в системе координат главных осей тензора напряжений $\{x, y, z\}$. Компоненты тензора напряжений и производные компонент тензора поврежденности по времени задаются соотношениями (3.8) и (3.13) соответственно. В табл. 1 пред-

Таблица 1. Материальные параметры и параметры нагружения

Упругие модули, ГПа			Угол внутреннего трения, град.	Критический параметр	Кинетический коэффициент	Параметры нагружения, МПа	
λ_0	μ_0	γ	φ	ξ_0	L, c^{-1}	$\sigma_1 = \sigma_2$	σ_3
1.0	1.0	1.16	40	-0.794	1	-50	-229.5

ставлены материальные параметры и параметры нагружения, использованные для расчета деформаций, и скоростей изменения компонент тензора поврежденности. Критический параметр ξ_0 , отвечающий за рост поврежденности, для заданного угла внутреннего трения и упругих свойств в соответствии с (2.4) равен $\xi_0 = -0.794$. Будем решать задачу для бокового подпора $\sigma_1 = \sigma_2 = 50$ МПа, а осевую нагрузку определим из критерия Кулона–Мора $\sigma_3 = \sigma_1 \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$. Примем также, что степень исходной анизотропии поврежденности составляет либо 10% ($q = 0.1$), либо 50% ($q = 0.5$). Квадрат средней поврежденности или ее скалярный эквивалент равен 0.1 (т.е. $\frac{1}{3}(\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3) = \sqrt{\alpha} = \sqrt{0.1}$).

Из (3.8) найдем компоненты тензора деформации, соответствующие приложенным напряжениям и построим скорости изменения компонент тензора поврежденности, а также среднюю скорость изменения поврежденности от угла β . Полученные зависимости представлены на рис. 3. Видно, что компонента $\frac{d\Omega_{xx}}{dt}$ всегда положительная, что отражает рост вертикально ориентированной трещиноватости вдоль направления осевой нагрузки (рис. 2) или, другими словами, рост трещиноватости перпендикулярно направлению минимального главного напряжения. Компонента $\frac{d\Omega_{zz}}{dt}$ при любом угле β отрицательная, что также закономерно, так как в направлении активного сжатия будет наблюдаться только закрытие или “залечивание” существующих трещин в не зависимости от ориентации исходной трещиноватости.

Средняя скорость роста поврежденности $tr\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)$, начиная с угла 55° , становится положительной. Также необходимо отметить, что степень анизотропии влияет на амплитуду указанных компонент тензора скорости роста поврежденности (сплошные и пунктирные линии на рис. 3), но не меняет форму их зависимости от угла β . Существенное влияние параметра q наблюдается лишь для недиагональной компоненты $\frac{d\Omega_{xz}}{dt}$. При стремлении $q \rightarrow 1$ (изотропной исходной трещиноватости) величина $\frac{d\Omega_{xz}}{dt} \rightarrow 0$ для любого β .

Особенностью деформирования материала с исходной анизотропной трещиноватостью является генерация новых микротрещин с ориентацией, не совпадающей с имеющейся трещиноватостью. Математически это выражается в несоосности тензора скорости изменения поврежденности и тензора поврежденности. Построим зависимости максимального $\dot{\Omega}_{pv+}$ и минимального $\dot{\Omega}_{pv-}$ собственных значений тензора скорости изменения поврежденности от угла ориентации исходной поврежденности (рис. 4,а). При вариации угла ориентации исходной трещиноватости минимальное собственное значение тензора скорости роста поврежденности $\dot{\Omega}_{pv-}$ меняется более

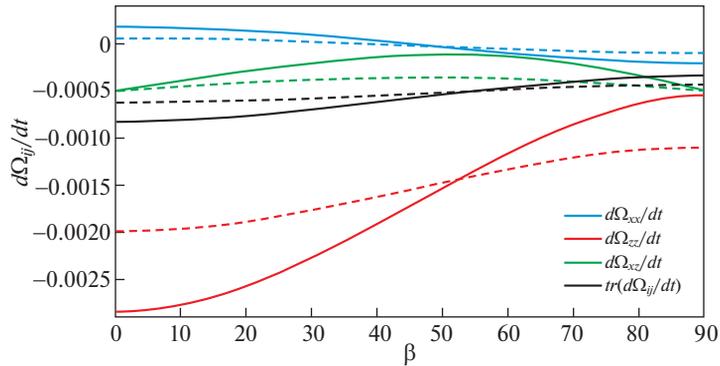


Рис. 3. Зависимости компонент тензора скорости поврежденности от угла ориентации поврежденности β для $q = 0.1$ (сплошные линии), $q = 0.5$ (пунктирные линии).

значительно, чем положительное $\dot{\Omega}_{pv+}$. Вектора, соответствующие этим главным собственным значениям, указывают направления максимального раскрытия и закрытия берегов существующих микротрещин, а также, в случае $\dot{\Omega}_{pv+}$, ориентацию новых микротрещин, рост которых инициирован приложенными напряжениями. На рис. 4, b построены зависимости углов между направлением активного сжатия и направлениями $\dot{\Omega}_{pv+}$ (угол ψ_{pv+}), $\dot{\Omega}_{pv-}$ (угол ψ_{pv-}).

Из рис. 4, b видно, что направление минимального главного значения тензора скорости роста поврежденности ψ_{pv-} (синяя линия) не превышает 18° при вариациях угла ориентации исходной поврежденности. При этом максимальное отклонение от направления активного сжатия соответствует $\beta = 73.7^\circ$, а при $\beta = 0^\circ$ и $\beta = 90^\circ$ направление минимального главного значения тензора скорости в точности совпадает с направлением активного сжатия. Аналогичная ситуация наблюдается для направления максимального главного значения. При $\beta = 73.7^\circ$ наблюдается максимальное отклонение от направления минимального главного сжимающего напряжения σ_1 в 18° , при $\beta = 0^\circ$ и $\beta = 90^\circ$ направление максимального роста поврежденности в точности ему соответствует.

Полученные решения показывают, что в случае материала с исходной анизотропией упругих свойств, вызванной поврежденностью, одноосное сжатие с боковым подпором приводит к росту вторичной трещиноватости, ориентированной квазивертикально. Степень отклонения определяется степенью исходной анизотропии. Стоит отметить, что ранее в экспериментах по истинному трехосному сжатию песчаника Darley Dale [67] было показано, что в процессе деформирования происходит формирование микротрещин, ориентированных перпендикулярно направлению оси минимального главного напряжения. Оценки отклонения от этого направления дают величину до $\sim 18^\circ$.

5. Ориентация зоны локализованной поврежденности при традиционном трехосном сжатии. Множественные экспериментальные наблюдения показывают, что процесс накопления повреждений при достижении некоторой критической плотности микротрещин приводит к формированию зоны локализованной поврежденности, ориентированной под острым углом к направлению активного сжатия. Согласно критерию Кулона–Мора этот угол определяется углом внутреннего трения (1.2). Как было сказано ранее, прямое численное моделирование традиционного трехосного сжатия с ис-

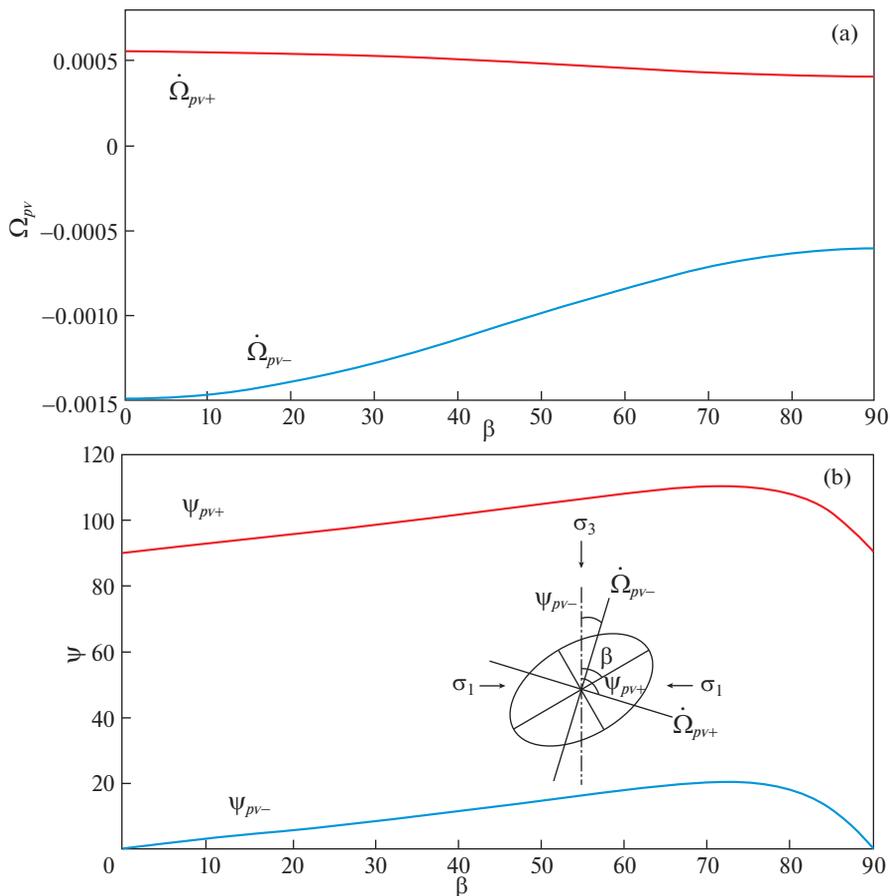


Рис. 4. Зависимости максимального $\dot{\Omega}_{pv+}$, минимального $\dot{\Omega}_{pv-}$ главных значений тензора скорости изменения поврежденности (а) и углов Ψ_{pv+} , Ψ_{pv-} (б) от угла ориентации β для $q = 0.1$.

пользованием модели линейной упругости не позволило подтвердить это утверждение [21].

Рассмотрим задачу о традиционном трехосном сжатии материала в поле напряжений $\sigma_{zz} = \sigma_3 > \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_1 = \sigma_2$ с зоной локализованной поврежденности, ориентированной по отношению к оси активного сжатия Oz под углом θ (рис. 5).

В случае упругого изотропного неповрежденного тела определяющие соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} = \varepsilon_3 &= \frac{1}{2\mu_0} \left[\sigma_3 - \frac{\lambda_0}{3\lambda_0 + 2\mu_0} (2\sigma_3 + \sigma_1) \right] \\ \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 &= \frac{1}{2\mu_0} \left[\sigma_1 - \frac{\lambda_0}{3\lambda_0 + 2\mu_0} (2\sigma_3 + \sigma_1) \right] \end{aligned} \quad (5.1)$$

Зона представляет собой сплошной материал с заниженными из-за поврежденности упругими свойствами. Условие непрерывности перемещений и усилий на границах

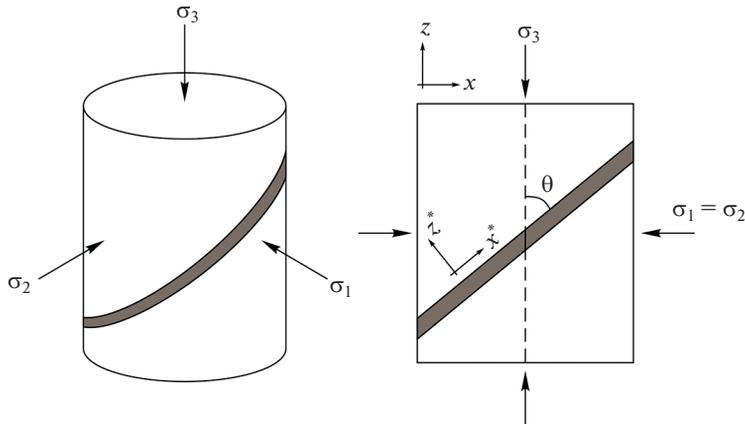


Рис. 5. Геометрия образца с зоной локализованной поврежденности при одноосном сжатии с боковым подпором.

зоны (проскальзывание отсутствует) приводит к следующей системе равенств для напряжений:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz}^* &= \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta \\
 \sigma_{xz}^* &= (\sigma_3 - \sigma_1) \sin \theta \cos \theta \\
 \sigma_{yy}^* &= \sigma_2 \\
 \sigma_{xx}^* &= \sigma_3 \cos^2 \theta + \sigma_1 \sin^2 \theta
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

Аналогичные равенства имеют место для компонент тензора деформации. С использованием первых двух равенств в (5.2) для заданного уровня поврежденности в локализованной зоне найдем ϵ_{zz}^* и ϵ_{xz}^* , а потом построим зависимость скорости роста поврежденности (средней поврежденности) от угла, чтобы определить оптимальный угол наклона зоны с точки зрения эффективности диссипации энергии в соответствии с кинетическими уравнениями (3.12).

5.1. Нелинейная модель со скалярным параметром поврежденности. Для расчета скорости роста поврежденности в зависимости от угла наклона (θ) зоны локализованной поврежденности (рис. 5) в реологической нелинейной модели со скалярным параметром поврежденности используем выражения (2.2) для компонент $\sigma_{zz}^*(\alpha)$, $\sigma_{xz}^*(\alpha)$ и (2.3) для скорости изменения поврежденности. Величину приложенных напряжений и материальные константы примем такими же, как в задаче об ориентации микротрещиноватости (см. табл. 1).

На рис. 6 представлена зависимость скорости роста поврежденности от угла наклона зоны для $\alpha = 0.1$. Модель со скалярным параметром поврежденности предсказывает, что максимальная величина скорости роста поврежденности достигается при угле наклона $\theta = 25^\circ$, что в точности соответствует критерию Кулона–Мора $\theta_{CM} = \frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}$. Для других значений поврежденности α оптимальный угол наклона зоны несколько отличается от угла Кулона–Мора. Аналогичный результат получен для материала с другими значениями угла внутреннего трения.

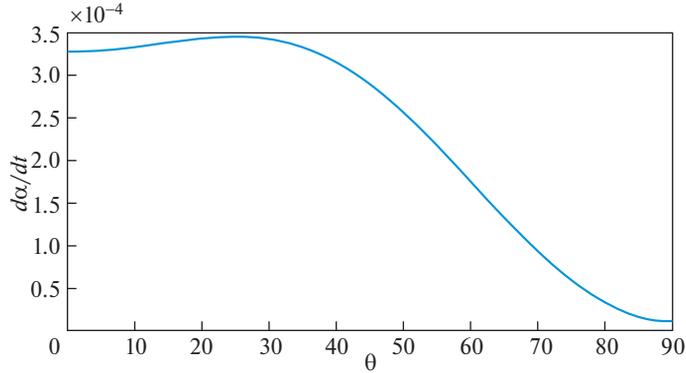


Рис. 6. Зависимость скорости роста поврежденности от угла наклона зоны локализованной поврежденности.

Полученный результат не является тривиальным, так как ранее в [21] было показано, что линейно-упругие модели не позволяют получить ориентацию зоны локализованной поврежденности, соответствующую критерию Кулона–Мора, хотя и результат закономерен, так как пороговый параметр определяется именно углом внутреннего трения.

5.2. Модель с тензорным параметром поврежденности. Как и в задаче об ориентации трещиноватости в материале при традиционном трехосном сжатии примем следующее соотношение между главными поврежденностями $\Omega_3 = \Omega > \Omega_1 = \Omega_2 = q\Omega$, $q \in [0, 1]$. Параметр q определяет степень анизотропии поврежденности. Ориентация эллипсоида поврежденности определена углом $\beta \in [0^\circ, 90^\circ]$ между осью активного нагружения и главным направлением, соответствующим Ω_3 (рис. 7). Величину приложенных напряжений и материалы константы примем такими же, как в задаче об ориентации микротрещиноватости (см. табл. 1).

Выражение для компонент σ_{zz}^* , σ_{xz}^* в случае тензорного параметра поврежденности в системе координат зоны локализации имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^* &= \lambda_0 I_1 + 2\mu_0 \varepsilon_{zz}^* - \gamma \Omega_{zz}^* \sqrt{I_2^{(\Omega)}} + \gamma \left[\xi_0 - \frac{I_1^{(\Omega)}}{2\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} \right] D_1 \\ \sigma_{xz}^* &= 2\mu_0 \varepsilon_{xz}^* - \gamma \Omega_{xz}^* \sqrt{I_2^{(\Omega)}} + \gamma \left[\xi_0 - \frac{I_1^{(\Omega)}}{2\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} \right] D_2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$D_1 = \varepsilon_{xx}^* \Omega_{xz}^{*2} + \varepsilon_{zz}^* (\Omega_{xz}^{*2} + 2\Omega_{zz}^{*2}) + \varepsilon_{xz}^* \Omega_{xz}^* (\Omega_{xx}^* + 3\Omega_{zz}^*)$$

$$D_2 = \frac{1}{2} (4\varepsilon_{xz}^* \Omega_{xz}^{*2} + \varepsilon_{zz}^* (\Omega_{xx}^* + \Omega_{zz}^*)^2 + \varepsilon_{xx}^* \Omega_{xz}^* (3\Omega_{xx}^* + \Omega_{zz}^*) + \varepsilon_{zz}^* \Omega_{xz}^* (\Omega_{xx}^* + 3\Omega_{zz}^*))$$

где инварианты (3.4а) имеют вид $I_1^{(\Omega)} = \varepsilon_{xx}^* \Omega_{xx}^* + \varepsilon_{yy}^* \Omega_{yy}^* + \varepsilon_{zz}^* \Omega_{zz}^* + 2\varepsilon_{xz}^* \Omega_{xz}^*$, $I_2^{(\Omega)} = (\varepsilon_{xx}^* \Omega_{xx}^* + \varepsilon_{zz}^* \Omega_{zz}^*)^2 + (\varepsilon_{yy}^* \Omega_{yy}^*)^2 + (\varepsilon_{zz}^* \Omega_{zz}^* + \varepsilon_{xz}^* \Omega_{xz}^*)^2 + \frac{1}{2} (\Omega_{xz}^* (\varepsilon_{xx}^* + \varepsilon_{zz}^*) + \varepsilon_{xz}^* (\Omega_{xx}^* + \Omega_{zz}^*))^2$.

Компоненты тензора поврежденности в системе координат зоны локализации определяются поворотом исходного диагонального тензора Ω_{ij} на угол $\theta - \beta$ ($\beta - \theta$, при $\beta > \theta$) соответственно.

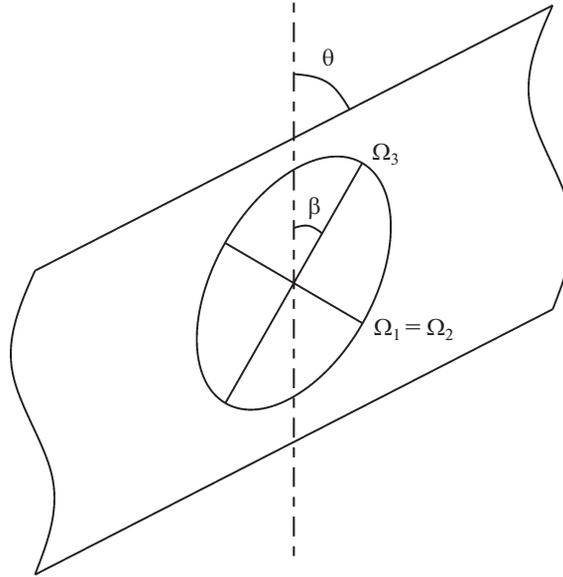


Рис. 7. Ориентация и форма эллипсоида поврежденности.

Будем анализировать изменение средней скорости роста поврежденности $\frac{1}{3} \left(\frac{d\Omega_{xx}^*}{dt} + \frac{d\Omega_{yy}^*}{dt} + \frac{d\Omega_{zz}^*}{dt} \right) = tr \left(\frac{d\tilde{\Omega}^*}{dt} \right)$ в зоне, отражающей изменение объема материала, так как экспериментально было показано, что при невысоких уровнях бокового давления зона локализации характеризуется повышенным разуплотнением [18, 22].

Согласно (3.12), средняя скорость роста поврежденности определяется как:

$$tr \left(\frac{d\tilde{\Omega}^*}{dt} \right) = \frac{L}{\sqrt{I_2(\tilde{\Omega}^*)}} \left[I_1 \sqrt{I_2^{(\Omega)}} - \left(2\xi_0 - \frac{I_1^{(\Omega)}}{\sqrt{I_2^{(\Omega)}}} \right) A \right] \quad (5.4)$$

$$A = \Omega_{xx}^* (\varepsilon_{xx}^{*2} + \varepsilon_{xz}^{*2}) + \Omega_{yy}^* \varepsilon_{yy}^{*2} + \Omega_{zz}^* (\varepsilon_{zz}^{*2} + \varepsilon_{xz}^{*2}) + 2\Omega_{xz}^* \varepsilon_{xz}^* (\varepsilon_{xx}^* + \varepsilon_{zz}^*)$$

Построим зависимость средней скорости изменения поврежденности от углов наклона зоны локализации и ориентации тензора поврежденности соответственно для случая $q = 0.1$ и $\frac{1}{3}(\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3) = \sqrt{\alpha} = \sqrt{0.1}$. Полученное решение (рис. 8) определяет оптимальные с точки зрения скорости диссипации энергии и нежелательные ориентации микротрещин внутри зоны локализации. Из рисунка видно, что в случае $\beta = \theta$ и $\beta = \theta - 90^\circ$ средняя скорость роста поврежденности либо отрицательная, либо близка к нулю. Эти случаи соответствуют трещиноватости, ориентированной либо поперек зоны, либо параллельно ей.

Построенная зависимость $tr \left(\frac{d\tilde{\Omega}^*}{dt} \right)$ (рис. 8) имеет два локальных максимума, совпадающих по амплитуде и соответствующих одному наклону зоны локализованной поврежденности $\theta_1 = \theta_2 = 31^\circ$. Первый максимум наблюдается при $\beta_1 = \pm 90^\circ$, второй максимум при $\beta_2 = -29^\circ$. Вариация степени анизотропии показывает, что положение максимумов зависит от нее по-разному. Так, оптимальный наклон зоны локализован-

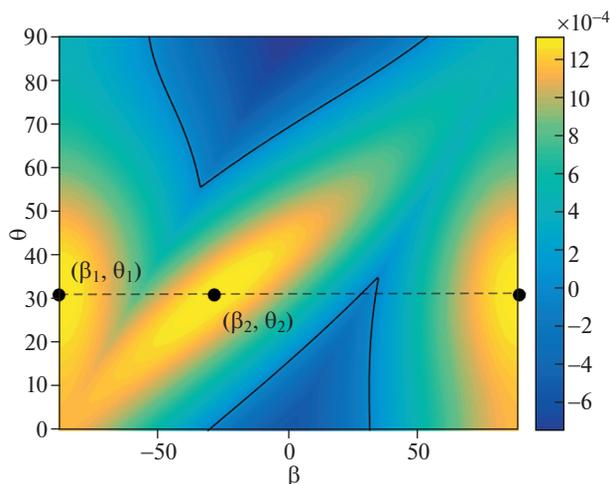


Рис. 8. Зависимость средней скорости роста поврежденности от угла наклона зоны локализации θ и ориентации тензора поврежденности β (точки – локальные максимумы, черная линия – изолиния $\text{tr}\left(\frac{d\tilde{\Omega}^*}{dt}\right) = 0$).

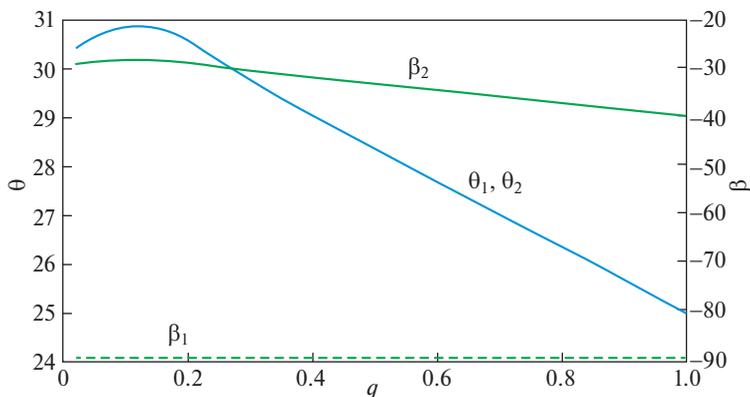


Рис. 9. Зависимости оптимального угла ориентации зоны локализации θ и поврежденности внутри нее β от степени анизотропии поврежденности q .

ной поврежденности, соответствующий и первому и второму максимуму, при $q \rightarrow 1$ (изотропная поврежденность) стремится к углу Кулона–Мора, т.е. $\theta_1, \theta_2 \rightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}$ (рис. 9).

При этом угол ориентации поврежденности внутри зоны в случае первого максимума не меняется с изменением параметра q и составляет $\beta_1 = \pm 90^\circ$. Оптимальный угол ориентации поврежденности внутри зоны, соответствующий второму максимуму, уменьшается с ростом параметра q и при $q = 1$ (изотропная поврежденность) равен $\beta_2 = -40^\circ$ (рис. 9).

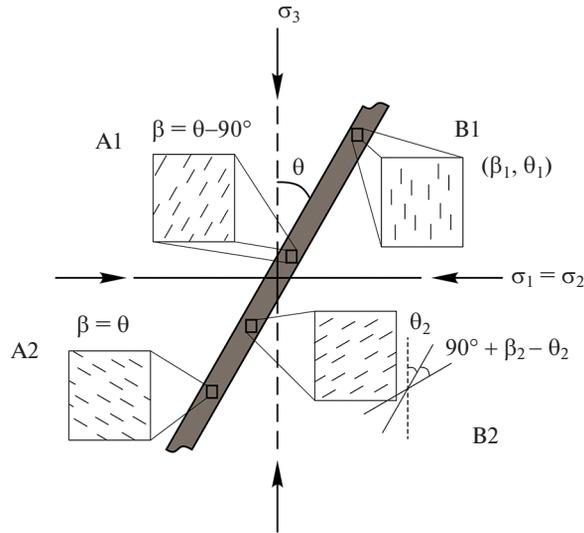


Рис. 10. Оптимальные (B1, B2) и нежелательные (A1, A2) ориентации микротрещиноватости с точки зрения скорости роста средней поврежденности при традиционном трехосном сжатии.

Найденные локальные максимумы и минимумы (рис. 8) определяют ориентацию трещиноватости, приводящей к ее максимальному росту или залечиванию (закрытию трещин). Рис. 10 схематически показывает ориентацию четырех групп микротрещин. Первому максимуму соответствуют микротрещины, ориентированные вертикально вне зависимости от степени анизотропии поврежденности (B1). Второму максимуму соответствуют микротрещины, ориентированные наклонно под углом $(90^\circ + \beta_2 - \theta_2)$ к направлению зоны локализованной поврежденности (B2). Важно отметить, что в случае изотропной поврежденности $q = 1$ эти микротрещины будут располагаться под углом Кулона–Мора к направлению зоны локализации поврежденности, тогда как сама зона также будет располагаться под углом Кулона–Мора к оси активного сжатия. Микротрещины, ориентированные параллельно (A1) или перпендикулярно (A2) к направлению зоны локализации поврежденности, не растут. Эти трещины закрываются и залечиваются.

Важно отметить, что полученные оптимальные и нежелательные ориентации микротрещиноватости, показанные на рисунке 10, с точки зрения скорости роста средней поврежденности в зоне локализации определены относительно ориентации самой зоны. Наклон зоны локализации в соответствии с (1.2) определяется углом внутреннего трения, и при его изменении взаимные ориентации зоны локализации и микротрещиноватости внутри нее не изменяются.

6. Заключение. В работе представлено обобщение скалярной нелинейной реологической модели на случай тензорного параметра поврежденности. Тензор поврежденности второго ранга вводится в рамках устоявшихся представлений континуальной механики поврежденности, главные значения которого описывают сокращение площади поперечного сечения материала в трех ортогональных направлениях. Преимущество такого представления заключается в возможности определения компонент тензора для любого набора разноориентированных ансамблей микротрещин, полученного по томографическим или петрофизическим данным. Соответствующие алгоритмы можно найти, например, в [51]. Введенный тензор позволяет описать индуци-

рованную поврежденностью анизотропию упругих свойств. В общем случае в процессе деформирования исходный изотропный материал становится ортотропным, а его упругие свойства зависят как от вида текущего напряженно-деформированного состояния, так и от уровня поврежденности в трех ортогональных направлениях.

Разработанная модель в отличие от многих современных моделей деформирования и разрушения горных пород не требует соосности тензоров поврежденности, деформации и напряжения. Эта особенность открывает новые возможности для описания деформационного поведения трещиноватых сред при сложных криволинейных трехмерных траекториях нагружения и позволяет описать ориентационные эффекты при развитии поврежденности в поле приложенных напряжений. Ранее для случая соосных тензоров поврежденности и деформации модель была успешно идентифицирована и апробирована на экспериментальных данных по традиционному и истинному трехосному сжатию песчаника Darley Dale [26].

Для случая одноосного сжатия материала с боковым подпором рассмотрены две характерные задачи: определение ориентации поврежденности (микротрещиноватости) во всем материале и определение ориентации зоны локализованной поврежденности, обеспечивающие максимальную скорость ее роста. Решение первой задачи с использованием разработанной модели позволило определить степень разориентировки исходной трещиноватости и скорости роста новой трещиноватости в зависимости от параметра анизотропии поврежденности. Показано, что максимальная разориентировка составляет до $\sim 18^\circ$, а в случае исходного ансамбля вертикальных или горизонтальных микротрещин ориентация новых микротрещин в точности совпадает с направлением минимального главного напряжения. Полученные величины разориентировки совпадают с оценками, полученными в результате истинных трехосных испытаний песчаника Darley Dale [67].

В результате решения второй задачи показано, что использование нелинейной реологической модели со скалярным параметром поврежденности позволило получить точное соответствие найденного оптимального угла наклона локализованной зоны поврежденности с углом Кулона–Мора. Использование тензорного параметра поврежденности позволило конкретизировать внутреннее строение зоны с позиции скорости диссипации энергии. Показано, что оптимальным углом наклона зоны локализованной поврежденности является угол, близкий к углу Кулона–Мора. Степень близости определяется уровнем анизотропии исходной поврежденности. При этом внутри зоны оптимальными являются две ориентации микротрещин: вертикальная ориентация трещиноватости, которая не зависит от степени анизотропии исходной поврежденности, ориентация относительно направления зоны локализованной поврежденности под углом, близким к углу Кулона–Мора. Степень близости также определяется степенью анизотропии поврежденности в материале. Необходимо отметить, что первое найденное решение соответствует механизму образования магистральных трещин в горных породах при традиционном трехосном сжатии, предложенному в [69] по результатам обобщения большего количества экспериментальных наблюдений. Второе найденное решение описывает возможность появления вторичных микротрещин, аналогичных R-сколам в модели Риделя [70]. Так в модели формирования сдвиговых зон Риделя предполагается, что зона основного сдвига располагается под углом $\frac{\pi}{4}$ к направлению действия максимального сжимающего напряжения, а R-сколы под углом $\frac{\Phi}{2}$ к этой зоне. В случае традиционного трехосного сжатия и изотропной поврежденности, построенная модель предсказывает формирование основной зоны локализованной поврежденности под углом $\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}$ к направлению действия максимального

сжимающего напряжения и формирование вторичной трещиноватости под этим же углом.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта (№ 19-77-3008). В.А. Ляховский благодарит за частичную финансовую поддержку Мегагрант Минобрнауки РФ 14.W03.31.0033 “Геофизические исследования, мониторинг и прогноз развития катастрофических геодинамических процессов на Дальнем Востоке РФ”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Coulomb C.A.* Essai sur une application des r`egles de maximis et minimis `a quelques probl`emes de statique relatifs a l'`architecture // *M`em. Math. Phys.* 1773. V. 7. 343 p.
2. ГОСТ 21153.8-88 Породы горные. Метод определения предела прочности при объемном сжатии. М.: Изд-во стандартов, 1988. 15 с.
3. *Карев В.И., Химуля В.В., Шевцов Н.И.* Экспериментальные исследования процессов деформирования, разрушения и фильтрации в горных породах // *Изв. РАН. МТТ.* 2021. № 5. С. 3–26.
<https://doi.org/10.31857/S0572329921050056>
4. *Anderson E.M.* The dynamics of faulting // *Trans. Edinburgh Geol. Soc.* 1905. V. 8. P. 387–402.
<https://doi.org/10.1144/SP367.1>
5. *Schulson E.M.* Compressive shear faults within arctic sea ice: Fractures on scales large and small // *J. Geophys. Res.* 2004. V. 109. P. C07016.
<https://doi.org/10.1029/2003JC002108>
6. *Reches Z.* Determination of the tectonic stress tensor from slip along faults that obey the coulomb yield condition // *Tectonics.* 1987. V. 6. № 6. P. 849–861.
<https://doi.org/10.1029/TC006i006p00849>
7. *Rudnicki J.W., Rice J.R.* Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials // *J. Mech. Phys. Solids.* 1975. V. 23. P. 371–394.
[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(75\)90001-0](https://doi.org/10.1016/0022-5096(75)90001-0)
8. *Rice J.R., Rudnicki J.W.* A note on some features of the theory of localization of deformation // *Int. J. Solids Struct.* 1980. V. 16. № 7. P. 597–605.
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(80\)90019-0](https://doi.org/10.1016/0020-7683(80)90019-0)
9. *Issen K.A., Rudnicki J.W.* Conditions for compaction bands in porous rock // *J. Geophys. Res. Solid Earth.* 2000. V. 105. № B9. P. 21529–21536.
<https://doi.org/10.1029/2000JB900185>
10. *Rudnicki J.W.* Models for compaction band propagation // *Rock Physics and Geomechanics in the Study of Reservoirs and Repositories* / Eds. *C. David, M. Le Ravelec-Dupin.* London: Geological Society of London, 2007. Ch. 8. P. 107–125.
<https://doi.org/10.1144/SP284.1>
11. *Hill R.* The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford University Press, 1998. 368 p.
12. *Качанов Л.М.* О времени разрушения в условиях ползучести // *Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук.* 1958. С. 26–31.
13. *Krajcinovic D.* Damage Mechanics. Elsevier, 1996. 774 p.
14. *Работнов Ю.Н.* О механизме длительного разрушения // *Вопросы прочности материалов и конструкций.* М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5–7.
15. *Работнов Ю.Н.* Избранные труды. Проблемы механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1991. 196 с.
16. *Lemaitre J.A.* Course on Damage Mechanics. Berlin: Springer Verlag. 1996. 228 p.
17. *Кукуджанов В.Н.* Компьютерное моделирование деформирования, повреждаемости и разрушения неупругих материалов и конструкций. М.: МФТИ, 2008. 215 с.
18. *Lockner D.A., Byerlee J.D., Kuksenko V., Ponomarev A., Sidorin A.* Quasi-static fault growth and shear fracture energy in granite // *Nature.* 1991. V. 350. P. 39–42.
19. *Rock Physics and Natural Hazards* / Ed. by *J. Fortin, S. Stanchits, G. Dresen, Y. Gueguen.* Basel: Birkhäuser, 2009. 823 p.

20. *Renard F., Cordonnier B., Kobchenko M., Kandula N., Weiss J., Zhu W.* Microscale characterization of rupture nucleation unravels precursors to faulting in rocks // *Earth Planet. Sci. Lett.* 2017. V. 476. P. 69–78.
<https://doi.org/10.1016/j.epsl.2017.08.002>
21. *Dansereau V., Démercy V., Berthier E., Weiss J., and Ponson L.* Collective Damage Growth Controls Fault Orientation in Quasibrittle Compressive Failure // *Phys. Rev. Lett.* 2019. V. 122. P. 085501.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.085501>
22. *Jaeger J.C., Cook N.G.W.* *Fundamentals of Rock Mechanics.* Cambridge: Chapman and Hall, 1979. 593 p.
23. *Lyakhovskiy V., Reches Z., Weinberger R., Scott T.* Non-linear elastic behavior of damaged rocks // *Geophys. J. Int.* 1997. V. 130. P. 157–166.
<https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1997.tb00995.x>
24. *Hamiel Y., Lyakhovskiy V., Agnon A.* Rock dilation, nonlinear deformation, and pore pressure change under shear // *Earth Planet. Sci. Lett.* 2005. V. 237. P. 577–589.
<https://doi.org/10.1016/j.epsl.2005.06.028>
25. *Agnon A., Lyakhovskiy V.* Damage distribution and localization during dyke intrusion // *The physics and chemistry of dykes* / Eds. *G. Baer, A. Heimann.* Rotterdam: Balkema, 1995. P. 65–78.
26. *Panteleev I., Lyakhovskiy V., Browning J., Meredith P.G., Healy D., Mitchell T.* Non-linear anisotropic damage rheology model: theory and experimental verification // *Eur. J. Mech.: A. Solids.* 2021. V. 85. P. 104085.
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2020.104085>
27. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
28. *Ломакин Е.В.* Нелинейная деформация материалов, сопротивление которых зависит от вида напряженного состояния // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1980. № 4. С. 92–99.
29. *Ломакин Е.В.* Зависимость предельного состояния композитных и полимерных материалов от вида напряженного состояния. I. Экспериментальные зависимости и определяющие соотношения // *Мех. комп. матер.* 1988. № 1. С. 3–9.
30. *Ломакин Е.В.* Механика сред с зависящими от вида напряженного состояния свойствами // *Физ. мезомех.* 2007. Т. 10. № 5. С. 41–52.
31. *Lomakin E.V., Shchendrigna O.P.* Stresses and strains in a disk of physically nonlinear material with stress state dependent properties // *Mech. Solids.* 2020. V. 55. № 4. P. 475–481.
<https://doi.org/10.3103/S0025654420040081>
32. *Амбарцумян С.А.* Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982. 320 с.
33. *Chaboche J.* Damage induced anisotropy: on the difficulties associated with the active/passive unilateral condition // *Int. J. Damage Mech.* 1992. V. 1. P. 148–171.
<https://doi.org/10.1177/105678959200100201>
34. *Lemaitre J., Desmorat R.* *Engineering damage mechanics.* Berlin: Springer-Verlag, 2005. 380 p.
<https://doi.org/10.1007/b138882>
35. *Han D.J., Chen W.F.* Strain-space plasticity formulation for hardening-softening materials with elastoplastic coupling // *Int. J. Solids Struct.* 1986. V. 22. P. 935–950.
36. *Naghdi P.M., Trapp J.A.* The significance of formulating plasticity theory with reference to loading surfaces in strain space // *Int. J. Eng. Sci.* 1975. V. 13. P. 785–797.
[https://doi.org/10.1016/0020-7225\(75\)90080-4](https://doi.org/10.1016/0020-7225(75)90080-4)
37. *Yoder P.J., Iwan W.D.* On the formulation of strain space plasticity with multiple loading surfaces // *J. Appl. Mech.* 1981. V. 48. P. 773–778.
38. *Lehane B.M., Simpson B.* Modelling glacial till under triaxial conditions using a BRICK soil model // *Can. Geotech. J.* 2000. V. 37. P. 1078–1088.
39. *Puzrin A.M., Houlsby G.T.* Fundamentals of kinematic hardening hyperplasticity // *Int. J. Solids Struct.* 2001. V. 38. P. 3771–3794.
40. *Casey J., Naghdi P.M.* On the nonequivalence of the stress space and strain space formulations of plasticity theory // *J. Appl. Mech.* 1983. V. 50. P. 350–354.
<https://doi.org/10.1115/1.3167043>
41. *Einav I.* Thermo-mechanical relations between stress-space and strain-space models // *Geotechnique.* 2004. V. 54. № 5. P. 315–318.

42. *Einav I.* Energy and variational principles for piles in dissipative soil // *Geotechnique*. 2005. V. 55. P. 515–525.
<https://doi.org/10.1680/geot.2005.55.7.515>
43. *Einav I.* A second look at strain space plasticity and latest applications // 18th Australasian Conference on the Mechanics of Structures and Materials, Perth, 2005. V. 1. CRC Press/Balkema, 2005. P. 225–231.
44. *Lockner D.A., Stanchits S.A.* Undrained poroelastic response of sandstones to deviatoric stress change // *J. Geophys. Res.* 2002. V. 107. № B12. P. 2353.
<https://doi.org/10.1029/2001JB001460>
45. *Basaran C., Nie S.* An irreversible thermodynamics theory for damage mechanics of solids // *Int. J. Damage*. 2004. V. 13. № 3. P. 205–223.
<https://doi.org/10.1177/1056789504041058>
46. *Tencate J.A., Pasqualini D., Habib S., Heitmann K., Higdon D., Johnson P.A.* Nonlinear and non-equilibrium dynamics in geomaterials // *Phys. Rev. Lett.* 2004. V. 93. № 6. P. 065501.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.065501>
47. *Pasqualini D., Heitmann K., Tencate J.A., Habib A., Higdon D., Johnson P.A.* Nonequilibrium and nonlinear dynamics in Berea and Fontainebleau sandstones: Low-strain regime // *J. Geophys. Res.* 2007. V. 112. P. B01204.
<https://doi.org/10.1029/2006JB004264>
48. *Hamiel Y., Lyakhovsky V., Ben-Zion Y.* The elastic strain energy of damaged solids with applications to nonlinear deformation of crystalline rocks // *Pure Appl. Geophys.* 2011. V. 168. P. 2199–2210.
<https://doi.org/10.1007/S00024-011-0265-7>
49. *Ляховский В.А., Мясников В.П.* О поведении упругой среды с микронарушениями // *Изв. АН СССР. Физика Земли*. 1984. № 10. С. 71–75.
50. *Lyakhovsky V., Ben-Zion Y., Agnon A.* Distributed damage, faulting, and friction // *J. Geophys. Res.* 1997b. V. 102. № B12. P. 27635–27649.
51. *Lyakhovsky V., Myasnikov V.P.* Acoustics of theologically non-linear solids // *PEPIAM*. 1988. V. 50. P. 60–64.
52. *Ляховский В.А., Мясников В.П.* Поведение вязкоупругой среды с микронарушениями при растяжении и сдвиге // *Изв. АН СССР. Физика Земли*. 1985. № 4. С. 28–35.
53. *Lyakhovsky V., Reches Z., Weinberger R., Scott T.* Non-linear elastic behavior of damaged rocks // *Geophys. J. Int.* 1997. V. 130. P. 157–166.
<https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1997.tb00995.x>
54. *Ben-Zion Y., Lyakhovsky V.* Analysis of aftershocks in a lithospheric model with seismogenic zone governed by damage rheology // *Geophys. Int. J.* 2006. V. 165. P. 197–210.
<https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2006.02878.x>
55. *Murnaghan F.D.* *Finite Deformation of an Elastic Solid*. New York: John Wiley, Chapman, 1951. 140 p.
56. *Kachanov L.M.* *Introduction to Continuum Damage Mechanics*. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers, 1986. 135 p.
57. *Kachanov L.M.* Effective elastic properties of cracked solids; critical review of some basic concepts // *Appl. Mech. Rev.* 1992. V. 45. P. 304–335.
<https://doi.org/10.1115/1.3119761>
58. *Степанова Л.В., Игонин С.А.* Параметр поврежденности Ю.Н. Работнова и описание длительного разрушения: результаты, современное состояние, приложение к механике трещин и перспективы // *ПМТФ*. 2015. Т. 56. № 2. С. 133–145.
59. *Leckie F.A., Onat E.T.* Tensorial nature of damage measuring internal variables // *Physical Non-linearities in Structural Analysis* / Eds. *J. Hult, J. Lemaitre*. Berlin: Springer, 1981. P. 140–155.
60. *Krajcinovic D.* Continuous damage mechanics revisited: basic concepts and definitions // *J. Appl. Mech.* 1985. V. 52. P. 829–834.
61. *Lemaitre J., Desmorat R., Sauzay M.* Anisotropic damage law of evolution // *Eur. J. Mech. Solid.* 2000. V. 19. P. 187–208.
[https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(00\)00161-3](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(00)00161-3)
62. *Voyiadjis G.Z., Kattan P.I., Yousef M.A.* Some basic issues of isotropic and anisotropic continuum damage mechanics // *Handbook of Damage Mechanics*. Berlin: Springer, 2015. P. 3–42.
https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8968-9_1-1

63. *Zhang W., Cai Y.* Continuum Damage Mechanics and Numerical Applications. Berlin: Springer, 2010. 1000 p.
<https://doi.org/10.1007/978-3-642-04708-4>
64. *Lee U., Lesieutre G.A., Fang L.* Anisotropic damage mechanics based on strain energy equivalence and equivalent elliptical microcracks // *Int. J. Solid Struct.* 1997. V. 34. P. 4.377–4.397.
65. *Семенов А.С.* Симметризация тензора эффективных напряжений для сред с анизотропной поврежденностью // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2017. Т. 10. № 2. С. 82–98.
66. *DeGroot S.R., Mazur P.* Nonequilibrium thermodynamics. Amsterdam: North Holland, 1962. 510 p.
67. *Browning J., Meredith P.G., Stuart C.E., Healy D., Harland S., Mitchell T.M.* Acoustic characterization of crack damage evolution in sandstone deformed under conventional and true triaxial loading // *J. Geophys. Res. Solid Earth.* 2017. V. 122. P. 4395–4441.
<https://doi.org/10.1002/2016JB013646>
68. *Skrzypek J.J., Ganczarski A.* Modeling of Material Damage and Failure of Structures. Berlin: Springer-Verlag, 1999. 326 p.
69. *Reches Z., Lockner D.* Nucleation and growth of faults in brittle rocks // *J. Geophys. Res. Solid Earth.* 1994. V. 99. № B9. P. 18159–18173.
70. *Hills E.S.* Elements of Structural Geology. London: Methuen, 1972. 502 p.
<https://doi.org/10.1007/978-94-009-5843-2>