ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2022, № 4, с. 114–129

УДК 539.3

УРАВНЕНИЯ СОВМЕСТНОСТИ И ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

С. А. Лурье[a,b,*], П. А. Белов[a]

[a] *Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия*
[b] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*
**e-mail: salurie@mail.ru*

Поступила в редакцию 17.01.2022 г.
После доработки 19.01.2022 г.
Принята к публикации 20.01.2022 г.

Рассмотрены две постановки задач теории упругости в напряжениях. Первая – на основе уравнений совместности Папковича. Вторая – на основе уравнений совместности Сен-Венана. Показано, что формулы Чезаро в обеих постановках позволяют ввести в качестве вектора неопределенных множителей Лагранжа вектор решений неоднородных уравнений равновесия, удовлетворяющих векторной задаче Неймана. С другой стороны показано, что уравнения совместности, вводимые как связи между дисторсиями (совместность по Папковичу) или деформациями (совместность по Сен-Венану), позволяют ввести соответствующие тензоры неопределенных множителей Лагранжа. Показано, что эти тензоры можно рассматривать как функции напряжений. В первой постановке тензор функций напряжений второго ранга имеет девять компонент так как в общем случае является несимметричным. Во второй постановке тензор функций напряжений является симметричным и обладает шестью компонентами. В частности, обсуждается и возможность введения трех функций напряжений.

Ключевые слова: теория упругости, функции напряжений, уравнения совместности Папковича, уравнения совместности Сен-Венана, принцип возможных перемещений, метод неопределенных множителей Лагранжа

DOI: 10.31857/S0572329922040079

1. Введение. Интерес к решению задач теории упругости в напряжениях возник достаточно давно и связан, вероятно, с попыткой расширить класс аналитических решений. Достаточно полный обзор исследований, связанных с построением общих представлений решений в напряжениях представлен в работе [1], где обсуждаются решения, полученные Максвеллом [2] и Морерой [3] и общее представление Бельтрами [4] для напряжений через тензорную функцию напряжений. Вопросы полноты таких представлений обсуждались в работах [5–8]. Как правило, в таких исследованиях рассматривался случай, когда нет объемных сил. Вопросы построения шести функций напряжений и краевых задач для их определения обсуждались в работах [9, 10]. Обобщение проблемы построения функций напряжений на n-мерное пространство и формулировка соответствующих краевых задач для них даны в работе [11]. Возможность представления напряжений через три функции напряжений обсуждалась в работах [12, 13]. В работе [13] показана неоднозначность и эквивалентность форм представлений напряжений через три функции напряжений. В недавней статье [14] утверждается, что уравнения совместности деформаций линейной теории упругости уравнения оказываются аналогичными общей теории относительности для пустого пространства.

В настоящей работе для сохранения равноправия всех кинематических переменных используется метод неопределенных множителей Лагранжа. Показано, что тензоры неопределенных множителей Лагранжа, на которых уравнения совместности вводятся как связи, являются тензорами функций напряжений и их ровно столько, сколько уравнений совместности. Дополнительно, в качестве связей между перемещениями и дисторсиями (постановка Папковича) и деформациями (постановка Сен-Венана) вводятся формулы Чезаро. Показано, что вектор неопределенных множителей Лагранжа, на котором формулы Чезаро вводятся как связи, в обеих постановках определяется из векторной задачи Неймана.

2. Кинематические соотношения упругости. Введем основные определения кинематических переменных и приведем последовательно кинематические соотношения линейной теории упругости. Рассмотрим произвольное точечное преобразование:

$$y_i = x_i + R_i \tag{2.1}$$

Здесь x_i, y_i — соответственно координаты произвольной точки среды до и после деформирования, соответственно; R_i — вектор перемещений в рассматриваемой точке.

Запишем произвольное точечное преобразование (2.1) в дифференциалах:

$$dy_k = \left(\delta_{ki} + \frac{\partial R_k}{\partial x_i}\right) dx_i \tag{2.2}$$

где δ_{ki} — тензор Кронекера.

Введем определение дифференциала линейного элемента и дадим, соответственно, определение метрического тензора g_{ij}. Учитывая равенство (2.2), найдем:

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= dy_k dy_k = \left(\delta_{ki} + \frac{\partial R_k}{\partial x_i}\right) dx_i \left(\delta_{kj} + \frac{\partial R_k}{\partial x_j}\right) dx_j = \\ &= \left(\delta_{ij} + \frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial R_j}{\partial x_i} + \frac{\partial R_k}{\partial x_i}\frac{\partial R_k}{\partial x_j}\right) dx_i dx_j = \\ &= g_{ij} dx_i dx_j\end{aligned} \tag{2.3}$$

здесь ds — дифференциал линейного элемента.

Определим тензор деформаций ε_{ij}. Учитывая (2.3), получим:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial R_j}{\partial x_i} + \frac{\partial R_k}{\partial x_i}\frac{\partial R_k}{\partial x_j}\right)$$

В линейном приближении записанное определение тензора деформаций дает систему симметричных соотношений Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial R_j}{\partial x_i}\right) \tag{2.4}$$

Наконец, дадим определение величин, определяющих антисимметричные кинематические переменные деформирования. Тензор поворотов ω_{ij} имеет вид:

$$\omega_{ij} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} - \frac{\partial R_j}{\partial x_i}\right) \tag{2.5}$$

Псевдовектор поворотов Ω_k определяется, в свою очередь, через тензор поворотов ω_{ij}:

$$\Omega_k = \frac{1}{2}\omega_{pq}e_{pqk} = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial R_p}{\partial x_q} - \frac{\partial R_q}{\partial x_p}\right)e_{pqk} = -\frac{1}{2}\frac{\partial R_p}{\partial x_q}e_{pqk} \tag{2.6}$$

Очевидно, что имеет место и обратное равенство, позволяющее записать тензор поворотов ω_{ij} через псевдовектор поворотов Ω_k:

$$\omega_{mn} = \Omega_k e_{mnk} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial R_m}{\partial x_n} - \frac{\partial R_n}{\partial x_m}\right) \tag{2.7}$$

Общие соотношения Коши, связывающие градиенты вектора перемещений с тензором деформаций и поворотов записываются с учетом (2.4), (2.5) и определений (2.6), (2.7) в следующем виде:

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij} - \omega_{ij} = \varepsilon_{ij} - \Omega_k Э_{ijk} \tag{2.8}$$

В равенствах (2.6)–(2.8) e_{ijm} является псевдотензором Леви-Чивиты. Запишем известные соотношения для тензора Леви-Чивиты, которые будут использованы в дальнейшем:

$$\begin{gathered} e_{ijm}e_{pqn} = \delta_{ip}\left(\delta_{jq}\delta_{mn} - \delta_{jn}\delta_{mq}\right) - \delta_{iq}\left(\delta_{jp}\delta_{mn} - \delta_{jn}\delta_{mp}\right) + \delta_{in}\left(\delta_{jp}\delta_{mq} - \delta_{jq}\delta_{mp}\right) \\ e_{ijm}e_{pqm} = \left(\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}\right) \\ e_{ijm}e_{pjm} = 2\delta_{ip} \\ e_{ijm}e_{ijm} = 6 \end{gathered} \tag{2.9}$$

3. Общее решение уравнений Коши. Соотношения Коши (2. 8) интегрируются в квадратурах. Этими квадратурами являются формулы Чезаро, записанные относительно компонент тензора дисторсии $R_{i,j}$:

$$R_i = R_i^0 + \int\limits_{M_0}^{M_z} \frac{\partial R_i}{\partial x_j}dx_j = R_i^0 + \int\limits_{M_0}^{M_z} (\varepsilon_{ij} - \Omega_k e_{ijk})dx_j \tag{3.1}$$

Здесь x_i – координаты произвольной точки траектории интегрирования, R_i^0 – вектор перемещений в начальной точке траектории интегрирования.

Принимаем в дальнейшем, что z_i^0, z_i являются, соответственно, координатами начальной M_0 и конечной M_z точек траектории интегрирования. Формулы Чезаро, таким образом, связывают вектор перемещения R_i в конечной точке траектории с координатами z_i с вектором перемещений R_i^0 в начальной точке траектории интегрирования с координатами z_i^0.

Необходимыми условиями интегрируемости криволинейного интеграла в (3.1) являются уравнения совместности Папковича:

$$(\varepsilon_{ij} - \Omega_h e_{ijh})_{,k}e_{jkr} = 0 \tag{3.2}$$

Таким образом, соотношения Коши (2.8) эквивалентны системе формул Чезаро (3.1) и уравнений совместности Папковича (3.2). Иначе говоря, общее решение уравнений (2.8) записывается в форме (3.1) при выполнении дополнительных условий (3.2). Двенадцать кинематических переменных: компоненты вектора перемещений (три) и тензора дисторсии (девять) связаны двенадцатью связями: формулы Чезаро (3.1) дают три связи, уравнения совместности Папковича (3.2) дают девять связей. При этом формулы Чезаро (3.1) являются общим решением (квадратурами) соотношений Коши, а уравнения совместности Папковича (3.2) — являются условиями существования этих квадратур:

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij} - \Omega_h e_{ijh} \Leftrightarrow \begin{cases} R_i = R_i^0 + \int\limits_{M_o}^{M_z} \left(\varepsilon_{ij} - \Omega_h e_{ijh}\right) dx_j \\ \left(\varepsilon_{ij} - \Omega_h e_{ijh}\right)_{,k} e_{jkr} = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

4. Общее решение уравнений совместности Папковича. Уравнения совместности Папковича (3.2) можно привести к виду, пригодному к дальнейшему интегрированию в квадратурах. Действительно, девять первых производных от компонентов псевдовектора поворотов могут быть алгебраически выражены из (3.2) через компоненты тензора деформаций из девяти уравнений совместности Папковича с учетом свойств тензора Леви–Чивиты (2.9):

$$\Omega_{r,i} = -\varepsilon_{ij,k} e_{jkr} \tag{4.1}$$

Интегрируя в квадратурах уравнения совместности (4.1), получим:

$$\Omega_r = \Omega_r^0 - \int\limits_{M_0}^{M_z} \varepsilon_{ij,k} e_{jkr} dx_i \tag{4.2}$$

где Ω_i^0 — псевдовектор поворотов в начальной точке траектории интегрирования с координатами z_i^0.

Условиями интегрируемости криволинейного интеграла в (4.2) являются уравнения совместности Сен-Венана:

$$(\varepsilon_{ij,k} e_{jkr})_{,l} e_{ils} = \varepsilon_{mn,pq} e_{mpi} e_{nqj} = 0 \tag{4.3}$$

Таким образом, система квадратур расширена благодаря общему решению уравнений совместности Папковича. Формулы Чезаро (3.1) определяют квадратуры относительно перемещений, формулы (4.2) — квадратуры уравнений совместности Папковича относительно псевдовектора локальных поворотов и тензора поворотов. Условиями существования этих квадратур являются уравнения совместности Сен Венана:

$$\begin{gathered} R_i = R_i^0 + \int\limits_{M_o}^{M_z} (\varepsilon_{ij} - \omega_{ij}) dx_j \\ \Omega_r = \Omega_r^0 - \int\limits_{M_0}^{M_z} \varepsilon_{ij,k} e_{jkr} dx_i \\ \omega_{ij} = \Omega_k e_{ijk} = \left[\Omega_r^0 - \int\limits_{M_0}^{M_z} \varepsilon_{mn,k} e_{nkr} dx_m\right] e_{ijr} = \Omega_r^0 e_{ijr} - \int\limits_{M_0}^{M_z} (\varepsilon_{mi,j} - \varepsilon_{mj,i}) dx_m \\ \varepsilon_{mn,pq} e_{mpi} e_{nqj} = 0 \end{gathered} \tag{4.4}$$

Учитывая (4.1)–(4.4) подынтегральное выражение в формулах Чезаро (3.1) можно переписать только относительно деформаций, используя квадратуры уравнений совместности Папковича (4.2):

$$R_i = R_i^0 + \Omega_m^0 (z_n - z_n^0) e_{mni} + \int\limits_{M_o}^{M_z} [\varepsilon_{ij} + (z_r - x_r)(\varepsilon_{ji,r} - \varepsilon_{jr,i})] dx_j \tag{4.5}$$

Таким образом, если выполняются классические уравнения совместности Сен-Венана (4.3), существует непрерывное поле псевдовектора Ω_r в соответствии с (4.2). В свою очередь, Ω_r является общим решением уравнений совместности Папковича.

Следовательно, криволинейные интегралы в формулах Чезаро (3.1) существуют, и, более того, подынтегральное выражение в них можно выразить только через деформации в соответствии с (4.5). Следовательно система кинематических соотношений Сен–Венана имеет вид

$$
\begin{gathered}
R_i = R_i^0 + \frac{1}{2}\Omega_m^0(z_n - z_n^0)e_{mni} + \int\limits_{M_o}^{M_z} [\varepsilon_{ik} - (z_j - x_j)(\varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{kj,i})]dx_k \\
\omega_{ij} = \Omega_k e_{ijk} \\
\Omega_r = \Omega_r^0 - \int\limits_{M_0}^{M_z} \varepsilon_{ij,k} e_{jkr} dx_i \\
\varepsilon_{mn,pq} e_{mpi} e_{nqj} = 0
\end{gathered}
\tag{4.6}
$$

Следствие 1. Поле напряжений определяется через тензор деформаций с точностью до линейного полинома, а поле псевдовектора поворотов (и, следовательно, тензора поворотов) определяются с точностью до постоянного псевдовектора.

Следствие 2. Формулы Чезаро (4.5) позволяют трактовать первое слагаемое как перемещение, порожденное трансляцией системы координат R_i^0, второе – как перемещение, порожденное вращением системы координат Ω_i^0. Тогда третье слагаемое в (4.5) можно трактовать как перемещение, связанное с деформированием среды, которое является инвариантным относительно трансляции и поворота системы координат, т.е. не зависящим от R_i^0 и Ω_i^0.

5. Тензор-функции напряжений Папковича. Рассмотрим принцип возможных перемещений в общем случае, когда не заданы уравнения закона Гука и связь между напряжениями и деформациями может быть произвольной. Дадим на его основе вариационную постановку определения функций напряжения. Учитывая, что кинематические переменные определяются компонентами вектора перемещений и тензора дисторсий (тензора деформаций и тензора поворотов), запишем принцип возможных перемещений в виде

$$
\int\limits_V P_i^V \delta R_i dV + \int\limits_F P_i^F \delta R_i dF - \int\limits_V \sigma_{ij}\delta\left(\varepsilon_{ij} - \Omega_k e_{ijk}\right) dV = 0 \tag{5.1}
$$

Аргументами этой, в общем случае неинтегрируемой относительно вариаций кинематических переменных линейной вариационной формы (5.1), являются вариации компонентов перемещений (три) и вариации компонентов тензора дисторсии (девять), представленного в виде разложения на симметричную (деформации – шесть) и антисимметричную (повороты – три) части. Между ними имеются кинематические связи, которые следует учесть. Например, если в качестве связей выбрать соотношения Коши, то все компоненты тензора дисторсии выражаются через первые производные от вектора перемещений. Девять соотношений Коши позволяют выразить девять компонент тензора дисторсии через производные от трех компонент вектора перемещений. В результате основными (независимыми) кинематическими переменными становятся компоненты вектора перемещений. Отметим, что все кинематические переменные в некотором смысле равноправны, поэтому формально любые три переменные могут быть выбраны за основные. Остальные, в таком случае, являются зависимыми в соответствии со связями, обусловленными соотношениями Коши. Однако выбор связей не всегда является тривиальным. Например, в отличие от компонент вектора, компоненты тензора дисторсии не образуют некого тензорного объекта, содержащего три компоненты. Действительно, тензор деформаций можно разложить на шаровой (одна компонента) и девиатор (пять компонент). Тензор поворотов, имеющий три компоненты, также не подходит, так как через его компоненты нельзя определить потенциальные поля перемещений. Чтобы избежать субъективного выбора независимых кинематических переменных, воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа, сохраняющего равноправие всех кинематических переменных. Для этого последовательно учтем три связи, задаваемые формулами Чезаро (3.1) и девять связей, задаваемых уравнениями совместности Папковича (3.2).

В соответствии с методом неопределенных множителей Лагранжа учтем связи между перемещениями и дисторсиями в виде формул Чезаро (3.1), умноженных на вектор соответствующих неопределенных множителей Лагранжа λ_i — реактивных силовых факторов, которые удобно представить как лапласиан от другого неопределенного вектора $\lambda_i = \sigma_{i,kk}$:

$$
\begin{gathered}
0 = \delta\left\{\int\limits_V \sigma_{i,kk}\left[R_i - R_i^0 - \int\limits_{M_o}^{M_z}(\varepsilon_{ij} - \Omega_k e_{ijk})dx_j\right]dV\right\} = \\
= \int\limits_V \left\{\sigma_{i,kk}\delta\left[R_i - R_i^0 - \int\limits_{M_o}^{M_z}(\varepsilon_{ij} - \Omega_k e_{ijk})dx_j\right] + \right. \\
\left. + \left[R_i - R_i^0 - \int\limits_{M_o}^{M_z}(\varepsilon_{ij} - \Omega_k e_{ijk})dx_j\right]\delta\sigma_{i,kk}\right\}dV = \\
= \int\limits_V \left\{\sigma_{i,kk}\delta R_i + \sigma_{i,j}\delta(\varepsilon_{ij} - \Omega_k e_{ijk}) + \left[R_i - R_i^0 - \int\limits_{M_o}^{M_z}(\varepsilon_{ij} - \Omega_k e_{ijk})dx_j\right]\delta\sigma_{i,kk}\right\}dV + \\
+ \int\limits_F (-\sigma_{i,k} n_k)\,\delta R_i dF = 0
\end{gathered}
\tag{5.2}
$$

Здесь принято во внимание, что $\left[\int\limits_{M_o}^{M_z}(\varepsilon_{ip} - \Omega_k e_{ipk})dx_p\right]_{,j} = \varepsilon_{ij} - \Omega_k e_{ijk}$, а также $R_{i,\,j} =$ $= \varepsilon_{ij} - \Omega_h e_{ijh}$ и $\delta\int\limits_{M_o}^{M_z}(\varepsilon_{ij} - \Omega_h e_{ijh})dx_j dV = \delta\int\limits_{M_o}^{M_z} R_{i,j}dx_j dV = \delta R$.

Связи, отражающие требование выполнения условий интегрируемости соотношений Коши (3.2), (см. уравнения совместности Папковича (3.3)) вводятся на несимметричном тензоре множителей Лагранжа λ_{im}:

$$
\begin{gathered}
\delta\int\limits_V \lambda_{im}(\varepsilon_{ij} - \Omega_r e_{ijr})_{,k} e_{jkm} dV = \\
= \int\limits_V \left[(\varepsilon_{ij} - \Omega_r e_{ijr})_{,k} e_{jkm}\delta\lambda_{im} + \lambda_{im}\delta(\varepsilon_{ij} - \Omega_r e_{ijr})_{,k} e_{jkm}\right]dV = \\
= \int\limits_V \left[(\varepsilon_{ij} - \Omega_r e_{ijr})_{,k} e_{jkm}\delta\lambda_{im} - \lambda_{im,k} e_{jkm}\delta(\varepsilon_{ij} - \Omega_r e_{ijr})\right]dV + \\
+ \int\limits_F \lambda_{im} n_k e_{jkm}\delta(\varepsilon_{ij} - \Omega_r e_{ijr})]dF = 0
\end{gathered}
\tag{5.3}
$$

С учетом выбранных связей (5.2), (5.3), путем формального суммирования (5.1)–(5.3), принцип возможных перемещений (5.1) приводит к следующему вариационному равенству:

$$\int_V \Big\{ (\sigma_{i,kk} + P_i^V)\delta R_i + \big(\sigma_{i,j} - \lambda_{im,r}e_{jrm} - \sigma_{ij}\big)\delta(\varepsilon_{ij} - \Omega_k e_{ijk}) + \\ + (\varepsilon_{ij} - \Omega_r e_{ijr})_{,k} e_{jkm}\delta\lambda_{im} + \left[R_i - R_i^0 - \int_{M_o}^{M_z} (\varepsilon_{ij} - \Omega_k e_{ijk})dx_j \right] \delta\sigma_{i,kk} \Big\} dV + \\ + \int_F [(P_i^F - \sigma_{i,j}n_j)\delta R_i + \lambda_{im}n_r e_{jrm}\delta(\varepsilon_{ij} - \Omega_k e_{ijk})]dF = 0 \tag{5.4}$$

Девять компонент тензора множителей Лагранжа λ_{im} и три компоненты вектора множителей Лагранжа σ_i позволяют считать все двенадцать кинематических переменных независимыми. В результате удается свести исходную вариационную задачу к первой основной задаче, когда вариационное равенство выполняется при условии, что все двенадцать статических множителей равны нулю. Это удается сделать за счет множителей Лагранжа.

Таким образом из (5.4) вытекают уравнения Эйлера, которые в совокупности определяют формулы Чезаро (3.1), уравнения совместности Папковича (3.2) и соотношения, отражающие зависимость напряжений от компонентов тензоров неопределенных множителей Лагранжа σ_i, λ_{ij}:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{i,j} + \lambda_{im,n}e_{mnj} \tag{5.5}$$

Из (5.4) также следует, что проблема определения вектора σ_i решается отдельно, так как на вектор неопределенных множителей Лагранжа σ_i формулируется краевая задача, определяемая неоднородными уравнениями равновесия и неоднородными статическими граничными условиями:

$$\begin{gathered} \Delta\sigma_i + P_i^V = 0 \\ \int_F (P_i^F - \sigma_{i,k}n_k)\delta R_i dF = 0 \end{gathered} \tag{5.6}$$

Тензор неопределенных множителей Лагранжа λ_{ij} в соответствии с (5.5) таков, что напряжения, выраженные только через него, удовлетворяют однородным уравнениям равновесия тождественно:

$$\sigma_{ij,j} = \lambda_{im,nj}e_{njm} \equiv 0,$$

где $\sigma_{ij} = \lambda_{im,n}e_{jmn}$.

Таким образом, следуя общепринятому определению, компоненты тензора неопределенных множителей Лагранжа λ_{ij} являются компонентами тензора функций напряжений.

Будем называть этот тензор второго ранга λ_{ij} функциями напряжений Папковича, поскольку они введены как множители Лагранжа при условиях совместности Папковича. При этом, для любого конкретного выбора уравнений закона Гука, девять компонент тензора функций напряжений λ_{ij} будут удовлетворять соответствующим девяти уравнениям совместности Папковича. Они записаны в терминах λ_{ij} в виде неоднородных уравнений в частных производных, правые части которых выражены через вектор σ_i, являющийся решением задачи (5.6).

Если ввести дополнительно уравнения закона Гука, которые по определению устанавливают однозначную связь между компонентами тензора дисторсий и напряжений, то получим уравнения совместности Папковича, записанные в напряжениях. С учетом (5.5) эти уравнения записываются и через компоненты тензора функций напряжений. Напомним, что векторное поле σ_i определяется краевой задачей Неймана (5.6) и всегда может быть построено.

Обратим внимание на то, что связь между напряжениями и функциями напряжений в общем случае не требует симметрии тензора напряжений. В результате, парность касательных напряжений определяется только выбором тех или иных уравнений закона Гука. Поэтому предложенный способ построения функций напряжения является достаточно общим и может быть распространён и на обобщенные модели сред с несимметричным тензором напряжений.

Разрешающими уравнениями для функций напряжений являются уравнения совместности, которые могут быть записаны с помощью уравнений закона Гука. В качестве примера рассмотрим классический линейный закон Гука:

$$\begin{gathered}\sigma_{ij} = C_{ijmn}\varepsilon_{mn} \\ C_{ijmn} = \lambda\delta_{ij}\delta_{mn} + \mu(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}) = C_{mnij} = C_{jimn} = C_{ijnm}\end{gathered} \tag{5.7}$$

Обратим соотношения (5.7), выразив деформации через напряжения:

$$\varepsilon_{pq} = (\varepsilon_{pq} + \varepsilon_{qp})/2 = C^{-1}_{pqij}\sigma_{ij} = C^{-1}_{pqij}C_{ijmn}\varepsilon_{mn} = (\delta_{pm}\delta_{qn} + \delta_{pn}\delta_{qm})\varepsilon_{mn}/2 \tag{5.8}$$

Очевидно, что обратный тензор модулей упругости C^{-1}_{pqij} в (5.8) определяется равенством

$$C^{-1}_{pqij}C_{ijmn} = (\delta_{pm}\delta_{qn} + \delta_{pn}\delta_{qm})/2 \tag{5.9}$$

Учитывая (5.9), компоненты обратного тензора модулей упругости в (5.7) можно записать в следующем виде:

$$\begin{gathered}C^{-1}_{pqij}C_{ijmn} = (\delta_{pm}\delta_{qn} + \delta_{pn}\delta_{qm})/2 \\ C_{ijmn} = \lambda\delta_{ij}\delta_{mn} + \mu(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}) \\ C^{-1}_{pqij} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\delta_{pq}\delta_{ij} + \frac{1}{4\mu}(\delta_{pi}\delta_{qj} + \delta_{pj}\delta_{qi})\end{gathered} \tag{5.10}$$

В результате, с учетом (5.8)–(5.10) уравнения совместности Папковича (4.1) представляются в напряжениях в следующем виде:

$$\Omega_{r,i} = -C^{-1}_{ijmn}\sigma_{mn,k}e_{jkr} \tag{5.11}$$

С другой стороны напряжения σ_{ij} с помощью равенств (5.5) определяются через функции напряжений λ_{ij} и уравнения совместности Папковича (5.11) записываются в функциях напряжений в следующем виде:

$$\Omega_{r,i} = -C^{-1}_{ijmn}(\sigma_{m,nk} + \lambda_{ma,bk}e_{nab})e_{jkr} \tag{5.12}$$

В результате, в классической упругости с законом Гука (5.7)–(5.10) уравнения Папковича (5.11), (5.12) позволяют определить псевдовектор поворотов в квадратурах:

$$\Omega_r = \Omega_r^0 - \int\limits_{M_0}^{M_z} C^{-1}_{ijmn}(\sigma_{m,nk} + \lambda_{ma,bk}e_{nab})e_{jkr}dx \tag{5.13}$$

При этом следует выполнить условия существования криволинейного интеграла (5.13):

$$C^{-1}_{ijmn}(\sigma_{m,nk} + \lambda_{ma,bk}e_{nab})_{,p}e_{jkr}e_{ips} = 0 \tag{5.14}$$

Соответственно, формулы Чезаро (3.1) с учетом (5.13), (5.14) приобретут вид:

$$R_i = R_i^0 + \int_{M_o}^{M_z} [C^{-1}_{ijmn}(\sigma_{m,n} + \lambda_{ma,b}e_{nab}) - \Omega_k e_{ijk}]dx_j$$

Таким образом, формулировка уравнений теории упругости в функциях напряжений Папковича λ_{im} записывается с помощью следующей совокупности равенств:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{i,j} + \lambda_{im,n}e_{jmn} \tag{5.15}$$

$$C^{-1}_{ijmn}(\sigma_{m,nk} + \lambda_{ma,bk}e_{nab})_{,p}e_{jkr}e_{ipr} = 0 \tag{5.16}$$

и

$$\begin{aligned} \varepsilon_{pq} &= C^{-1}_{pqij}(\sigma_{i,j} + \lambda_{im,n}e_{jmn}) \\ \Omega_r &= \Omega_r^0 - \int_{M_0}^{M_z} C^{-1}_{ijmn}(\sigma_{m,nk} + \lambda_{ma,bk}e_{nab})e_{jkr}dx \\ R_i &= R_i^0 + \int_{M_o}^{M_z} [C^{-1}_{ijmn}(\sigma_{m,n} + \lambda_{ma,b}e_{nab}) - \Omega_k e_{ijk}]dx_j \end{aligned} \tag{5.17}$$

Равенство (5.15) дает определение тензора напряжений σ_{ij} через тензор функций напряжений λ_{im}. Уравнение (5.16) имеет смысл уравнения совместности (условие существования контурного интеграла (5.15)) и является разрешающим уравнением для функции напряжений λ_{im}. Система уравнений (5.17) позволяет найти в квадратурах поля деформаций, локальных поворотов и перемещений через вектор-функцию σ_i и тензор-функции напряжений Папковича λ_{im}. Вектор функция σ_i в выражениях (5.15)–(5.17) считается известной, так как следуя принципу возможных перемещений (5.4) эта вектор–функция определяется по заданным в объёме и на поверхности тела силам из отдельной краевой задачи (5.6).

Принцип возможных перемещений (5.4) позволяет формулировать и граничные условия на функцию напряжений λ_{ma} в форме вариационного равенства:

$$\int_F \lambda_{im}n_k e_{jkm}\delta[C^{-1}_{ijmn}(\sigma_{m,n} + \lambda_{ma,b}e_{nab}) - \Omega_k e_{ijk}]dF = 0 \tag{5.18}$$

Следуя (5.18) граничные условия для функций напряжений λ_{ma} записываются как “статические” условия

$$\lambda_{im}n_k e_{jkm} = 0, \quad x_i \in F \tag{5.19}$$

Сформулируем некоторые следствия, касающиеся определения функций напряжений λ_{im} и постановки в напряжениях (5.15)–(5.19).

Следствие 1. Уравнения Папковича в функциях напряжений разрешены относительно всех первых производных от псевдовектора поворотов Ω_r. Поэтому их можно проинтегрировать в квадратурах.

Следствие 2. Если тензор модулей упругости в уравнениях закона Гука является симметричным (тензор податливостей также симметричный), то имеет место парность касательных напряжений (симметрия тензора напряжений), и симметричный тензор деформаций ε_{ij} будет выражаться с помощью соответствующих сверток через компоненты тензора функций напряжений Папковича λ_{im} и компоненты тензора $\sigma_{m,n}$.

Следствие 3. В общем случае при решении в напряжениях девять уравнений совместности Папковича (5.16), записанные через компоненты тензора функций напряжений λ_{ij}

$$C^{-1}_{ijmn}\lambda_{ma,bkp}e_{nab}e_{jkr}e_{ips} = -C^{-1}_{ijmn}\sigma_{m,nkp}e_{jkr}e_{ips}$$

всегда являются неоднородными, так как правые части этих уравнений зависят от дифференциальных операторов над вектором σ_i, определяемым краевой задачей (5.6).

Следствие 4. Если объемные и поверхностные силы равны нулю, то непосредственно из (5.6) следует тривиальное решение для вектор-функции σ_i. В таком случае краевая задача (5.18), (5.19) для функции напряжения λ_{im} также является однородной. Следовательно, при отсутствии объемных и поверхностных сил имеет место только тривиальная функция напряжений $\lambda_{im} = 0$. Отсюда, в частности, следует единственность решения задачи в напряжениях, записанного через тензор функцию второго ранга λ_{im} – функцию напряжений Папковича.

Следствие 5. Разрешающее уравнение на функцию напряжений Папковича λ_{im} является условием существования криволинейного интеграла при определении псевдовектора поворотов (5.13) и в точности совпадает с уравнением Бельтрами–Митчелла $C^{-1}_{ijmn}\sigma_{mn,kp}e_{jkr}e_{ips} = 0$, будучи записанным в напряжениях σ_{mn}, если тензор податливостей C^{-1}_{ijmn} является симметричным по первой и второй парам индексов. При решении в напряжениях обычно эти уравнения решаются с учетом краевых условий на поверхности, сформулированных для напряжений $\sigma_{ij}n_j - P_i^F = 0$, где P_i^F – силы заданные на поверхности тела. Покажем, что краевая задача, сформулированная на функции напряжений Папковича λ_{im} на основе принципа возможных перемещений хотя и является решением этого же уравнения, но удовлетворяет иным краевым условиям. Действительно, рассмотрим уравнение (5.15), определяющее тензор напряжений через функцию напряжений, и перепишем его в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{i,j} + \lambda_{im,n}e_{jmn} = \sigma_{i,j} + \sigma_{ijn,n}$$

где $\sigma_{ijn} = \lambda_{im}e_{jmn}$ иное, эквивалентное представление для функции напряжений Папковича, а $\sigma_{i,j}$ предполагается известной функцией, так как полностью определяется краевой задачей (5.6). Тогда краевая задача в классической интерпретации определяется неоднородным уравнением Бельтрами–Митчелла, записанным в терминах функции напряжений Папковича σ_{ijn} ($\sigma_{i,j}$ предполагается известной функцией являющейся решением краевой задачи (5.6)) с граничным однородным условием типа Неймана

$$\sigma_{ijn,n}n_j = P_i^F - \sigma_{i,j}n_j = 0$$

С другой стороны, вариационное равенство (5.4), полученное на основе принципа возможных перемещений, требует краевой задачи с однородным граничным условием типа Дирихле

$$\sigma_{ijn}n_n = 0$$

6. Тензор функции напряжений Сен-Венана. Используя тот же алгоритм, что был применен для построения функций напряжений Папковича, построим функции напряжений в случае условий совместности Сен-Венана. Эти функции будем называть функциями напряжений Сен-Венана. Запишем принцип возможных перемещений, полагая, что в качестве системы кинематических связей выбрана система (4.6). Учитываем, что список аргументов включает в этом случае вектор перемещений R_i и симметричный тензор деформаций $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$. Вариационное равенство принципа возможных перемещений имеет вид

$$\int\limits_V P_i^V \delta R_i dV + \int\limits_F P_i^F \delta R_i dF - \int\limits_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} dV = 0 \qquad (6.1)$$

В постановке (6.1) тензор напряжений является симметричным, так как совершает возможную работу на симметричном тензоре деформаций. Псевдовектор поворотов (как и тензор поворотов) не входит в формулировку вариационного принципа через выражение возможной работы внутренних сил. Следовательно, только работа внешних сил зависит от трансляции R_i^0 и поворота Ω_m^0 системы координат. Отсюда следует, что условиями независимости (6.1) от трансляций и поворотов системы координат является условие глобального равновесия внешних сил:

$$\int_V P_i^V \delta R_i^0 dV + \int_F P_i^F \delta R_i^0 dF = \left[\int_V P_i^V dV + \int_F P_i^F dF\right]\delta R_i^0 = 0 \tag{6.2}$$

а также условие глобального равновесия моментов внешних сил:

$$\begin{aligned}&\int_V P_i^V \delta\Omega_m^0 (z_n - z_n^0) e_{mni} dV + \int_F P_i^F \delta\Omega_m^0 (z_n - z_n^0) e_{mni} dF = \\ &= \left[\int_V P_i^V (z_n - z_n^0) e_{inm} dV + \int_F P_i^F (z_n - z_n^0) e_{inm} dF\right]\delta\Omega_m^0 = 0\end{aligned} \tag{6.3}$$

Условия (6.2), (6.3) являются условиями глобального равновесия внешних сил и моментов внешних сил, а по построению являются условиями инвариантности работы внешних сил относительно трансляции и поворотов исходной системы координат.

В результате, принцип возможных перемещений (6.1) может быть записан только относительно вариаций “упругих” перемещений (см (4.5))

$$r_i = \int_{M_o}^{M_z} [\varepsilon_{ij} + (z_r - x_r)(\varepsilon_{ji,r} - \varepsilon_{jr,i})] dx_j$$

зависящих от деформаций и не зависящих от трансляции и поворота системы координат:

$$\int_V P_i^V \delta r_i dV + \int_F P_i^F \delta r_i dF - \int_V \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} dV = 0 \tag{6.4}$$

Система кинематических связей (4.6) может быть представлена в виде обобщенных формул Чезаро и уравнений совместности Сен-Венана, которые являются условиями существования квадратур для уравнений совместности Папковича относительно псевдовектора локальных поворотов и тензора поворотов (см (4.5)):

$$\begin{aligned} r_i &= \int_{M_o}^{M_z} [\varepsilon_{ij} + (z_r - x_r)(\varepsilon_{ji,r} - \varepsilon_{jr,i})] dx_j \\ &\varepsilon_{ij,mn} e_{jmp} e_{inq} = 0 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Введем обобщенные формулы Чезаро в (6.5) как связи на векторе неопределенных множителей Лагранжа $\Lambda_i = \Phi_{i,kk}$:

$$\begin{aligned}&\delta\int_V \Phi_{i,ll}\left[r_i - \int_{M_o}^{M_z}[\varepsilon_{ij} + (z_r - x_r)(\varepsilon_{ji,r} - \varepsilon_{jr,i})]dx_j\right]dV = \\ &= \int_V\left\{\Phi_{i,ll}\delta\left\{r_i - \int_{M_o}^{M_z}[\varepsilon_{ij} + (z_r - x_r)(\varepsilon_{ji,r} - \varepsilon_{jr,i})]dx_j\right\} + \right. \\ &\left. + \left[r_i - \int_{M_o}^{M_z}[\varepsilon_{ij} + (z_r - x_r)(\varepsilon_{ji,r} - \varepsilon_{jr,i})]dx_j\right]\delta\Phi_{i,ll}\right\}dV = 0\end{aligned} \tag{6.6}$$

Возьмем по частям второй интеграл в (6.6), содержащий вариацию формул Чезаро:

$$\int_V \Phi_{i,ll}\delta\left\{r_i - \int_{M_o}^{M_z}[\varepsilon_{ij} + (z_r - x_r)(\varepsilon_{ji,r} - \varepsilon_{jr,i})]dx_j\right\}dV =$$
$$= \int_V [\Delta\Phi_i\delta r_i + (\Phi_{i,j} + \Phi_{j,i} - \Phi_{k,k}\delta_{ij})\delta\varepsilon_{ij}]dV - \qquad (6.7)$$
$$- \int_F [\Phi_{i,j}n_j\delta r_i + (\Phi_j n_i - \Phi_k n_k\delta_{ij})\delta\varepsilon_{ij}]dF + \int_F \Phi_i n_l \delta\int_{M_o}^{M_z}(\varepsilon_{ji,l} - \varepsilon_{jl,i})dx_j dF$$

$$\int_F \Phi_i n_l\delta\int_{M_o}^{M_z}(\varepsilon_{ji,l} - \varepsilon_{jl,i})dx_j dF = \int_F \Phi_i\delta\left[n_l\int_{M_o}^{M_z}(\varepsilon_{ji,l} - \varepsilon_{jl,i})dx_j\right]dF = -\int_F \Phi_i n_j e_{ijk}\delta\Omega_k dF$$

При выводе (6.7) принято во внимание, что имеет место равенство $e_{ijk}\Omega_r = e_{ijr}\Omega_r^0 - \int_{M_0}^{M_z}(\varepsilon_{ji,l} - \varepsilon_{jl,i})dx_j$, полученное с учетом свойств тензора Леви-Чивита (2.9).

Дополнительно следует учесть и кинематические связи между компонентами тензора деформаций определяемые уравнениями совместности Сен-Венана. Используя тензор множителей Лагранжа Λ_{pq}

$$\delta\int_V \Lambda_{pq}\varepsilon_{ij,mn}e_{jmp}e_{inq}dV =$$
$$= \int_V [\Lambda_{pq}\delta\varepsilon_{ij,mn}e_{jmp}e_{inq} + \varepsilon_{ij,mn}e_{jmp}e_{inq}\delta\Lambda_{pq}]dV \qquad (6.8)$$

Принцип возможных перемещений (6.4), запишем с учетом связей (6.7) и (6.8), что обеспечивает независимость всех кинематических переменных. Используя технику интегрирования по частям, в случае гладкой поверхности можно получить следующее вариационное равенство:

$$\int_V \left\{(\Delta\Phi_i + P_i^V)\delta r_i + (\Phi_{i,j} + \Phi_{j,i} - \Phi_{k,k}\delta_{ij} + \Lambda_{pq,mn}e_{jmp}e_{inq} - \sigma_{ij})\delta\varepsilon_{ij} + \right.$$
$$\left. + \left[r_i - \int_{M_o}^{M_z}[\varepsilon_{ij} + (z_r - x_r)(\varepsilon_{ji,r} - \varepsilon_{jr,i})]dx_j\right]\delta\Phi_{i,ll} + \varepsilon_{ij,mn}e_{jmp}e_{inq}\delta\Lambda_{pq}\right\}dV + \qquad (6.9)$$
$$+ \int_F \{(P_i^F - \Phi_{i,j}n_j)\delta r_i - [(\Phi_j n_i - \Phi_k n_k\delta_{ij}) + \Psi_{ijpq}(\Lambda_{pq})]\delta\varepsilon_{ij\,j}\}dF = 0$$

где $\Psi_{ijpq}(\Lambda_{pq})$ некоторый оператор от тензор-функции напряжений Сен-Венана, вид которого для краткости не расшифровывается.

Требование стационарности вариационной формы (6.9) полностью определяет вектор-функцию Φ_i, тензор второго ранга Λ_{pq}-функцию напряжений Сен-Венана, позволяет записать уравнения, связывающие симметричный тензор напряжений σ_{ij} с функцией напряжений Сен-Венана Λ_{pq} и дает краевую задачу на функцию напряжений Λ_{pq}.

Действительно, требование стационарности линейной вариационной формы (6.9) приводит к шести уравнениям, устанавливающим связь между напряжениями и компонентами тензора неопределенных множителей Лагранжа:

$$\sigma_{ij} = (\Phi_{i,j} + \Phi_{j,i} - \Phi_{k,k}\delta_{ij}) + \Lambda_{pq,mn}e_{jmp}e_{inq} \qquad (6.10)$$

трем формулам Чезаро:

$$r_i - \int_{M_o}^{M_z} [\varepsilon_{ij} + (z_r - x_r)(\varepsilon_{ji,r} - \varepsilon_{jr,i})]dx_j = 0$$

и шести уравнениям совместности Сен-Венана:

$$\varepsilon_{ij,mn}e_{jmp}e_{inq} = 0$$

Из (6.9) также следует, что вектор неопределенных множителей Лагранжа Φ_i определяется как решение векторной задачи Неймана:

$$\begin{gathered} \Delta\Phi_i + P_i^V = 0 \\ \int_F (P_i^F - \Phi_{i,k}n_k)\delta R_i dF = 0 \end{gathered} \tag{6.11}$$

Зависимость тензора напряжений от тензора неопределенных множителей Лагранжа Λ_{ij} в соответствии с (6.10) такова, что однородные уравнения равновесия тождественно удовлетворяются. Действительно, полагаем, что

$$\sigma_{ij} = \Lambda_{pq,mn}e_{jmp}e_{inq}$$

Тогда нетрудно убедиться, что выполняются тождественно и однородные уравнения равновесия уравнения

$$\sigma_{ij,j} = \Lambda_{pq,jmn}e_{jmp}e_{inq} \equiv 0$$

Таким образом, следуя определению функций напряжений, компоненты тензора неопределенных множителей Лагранжа Λ_{ij} могут служить функциями напряжений Сен-Венана. Нетрудно убедиться, что если следовать вариационному равенству (6.9) и определять связь напряжений с функциями напряжений равенствами (6.10), то будут тождественно удовлетворяться и неоднородные уравнения равновесия. Достаточно учесть равенства (6.11). При этом, вне зависимости от выбора уравнений закона Гука, шесть компонент тензора функций напряжений Сен-Венана Λ_{ij} будут удовлетворять соответствующим шести уравнениям совместности Сен-Венана, записанных относительно Λ_{ij} с правыми частями, выраженными через вектор неопределенных множителей Лагранжа Φ_i. Это векторное поле, так же, как и в предыдущем случае, определяется краевой задачей Неймана (6.11) и всегда может быть построено.

В качестве примера рассмотрим случай, когда связь между напряжениями и деформациями определяется классическими уравнениями закона Гука:

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}\varepsilon_{mn}, \qquad \varepsilon_{pq} = C^{-1}_{pqij}\sigma_{ij}$$

Подставив деформации, выраженные через напряжения, в уравнения совместности Сен-Венана, получим уравнения Бельтрами–Митчелла:

$$C^{-1}_{ijab}\sigma_{ab,mn}e_{jmp}e_{inq} = 0$$

Подставив в уравнения Бельтрами–Митчелла вместо напряжений функции напряжений в соответствии с (6.10), получим систему шести дифференциальных уравнений (уравнений совместности Сен-Венана) записанных относительно шести компонентов тензора функций напряжений Λ_{ij}:

$$C^{-1}_{ijab}[(\Phi_{a,b} + \Phi_{b,a} - \Phi_{k,k}\delta_{ab}) + \Lambda_{gh,cd}e_{bcg}e_{adh}]_{,mn}e_{jmp}e_{inq} = 0$$

7. О возможности введения трех функций напряжений. Покажем, что не только компоненты тензора неопределенных множителей Лагранжа, с помощью которых вводятся уравнения совместности как кинематические связи, подпадают под определение функций напряжений. Рассмотрим несимметричный в общем случае тензор напряжений и вариационное равенство, полученное для случая уравнений совместности Папковича.

Пусть объемные силы отсутствуют. В этом случае, из уравнений (5.4), (5.6) следует, что вектор–функция σ_i является гармонической

$$\Delta\sigma_i = \sigma_{i,kk} = 0 \tag{7.1}$$

Будем рассматривать несжимаемое тело. Нетрудно убедиться, что для случая несжимаемого тела векторная функция σ_i может рассматриваться как вектор-функция напряжений. Действительно, полагаем, что в (5.4), (5.5) $\lambda_{mp} = 0$. Тогда, следуя (5.15) имеем

$$\sigma_{ij} = \sigma_{i,j} \tag{7.2}$$

Для несжимаемого тела, в случае отсутствия объемных сил $P_i^V = 0$ шаровой тензор напряжений является постоянной величиной в объеме тела. В результате, как нетрудно проверить, уравнение совместности Сен-Венана будет выполняться из-за того, что σ_i является гармонической функцией. В результате, вектор функция σ_i обладает всеми свойствами функции напряжений, удовлетворяя уравнению равновесия по определению. Она также удовлетворяет уравнениям совместности Папковича (5.16). Более того, для вектор-функции напряжений (5.18) сформулирована краевая задача Неймана, которая является следствием принципа возможных перемещений (5.4) ($P_i^V = 0$). По известной вектор-функции напряжений σ_i определяются и псевдовектор поворотов и вектор перемещений:

$$\Omega_r = \Omega_r^0 - \int_{M_0}^{M_z} C_{ijmn}^{-1}\sigma_{m,nk}e_{jkr}dx, \quad R_i = R_i^0 + \int_{M_o}^{M_z} [C_{ijmn}^{-1}\sigma_{m,n} - \Omega_k e_{ijk}]dx_j$$

Рассмотрим вновь случай несжимаемого тела и покажем, что для симметричного тензора напряжений σ_{ij} вектор-функция Φ_i является функцией напряжений, если объёмные внешние силы отсутствуют. В соответствии с (6.11) Φ_i является гармонической вектор-функцией. Тогда вектор-функция Φ_i является вектор-функцией напряжений. Действительно, полагая $\Lambda_{ij} = 0$ в соответствии с равенством (6.10) имеем следующую связь этой вектор-функции с тензором напряжений $\sigma_{ij} = \Phi_{i,j} + \Phi_{j,i} - \Phi_{k,k}\delta_{ij}$. Нетрудно проверить, что при отсутствии объемных сил, когда шаровой тензор напряжений для несжимаемого тела, является постоянным в объеме тела, тензор напряжений σ_{ij} удовлетворяет уравнениям совместности Сен-Вненана в силу гармоничности Φ_i. Таким образом, для несжимаемого тела в классической упругости, для симметричного тензора напряжений σ_{ij} имеется три функции напряжений – три компоненты вектор-функции Φ_i.

Таким образом, в случае несжимаемого тела установлен класс явных решений Φ_i задач теории упругости в напряжениях, если на поверхности тела заданы внешние силы. В классической теории это точное решение дается равенствами

$$\sigma_{ij} = \Phi_{i,j} + \Phi_{j,i} - \Phi_{k,k}\delta_{ij}$$
$$\Delta\Phi_i + P_i^V = 0$$
$$\int_F (P_i^F - \Phi_{i,k}n_k)\delta R_i dF = 0$$

8. Заключение. Рассмотрены две постановки задач теории упругости в напряжениях. Первая – на основе уравнений совместности Папковича. Вторая – на основе уравнений совместности Сен-Венана. Показано, что формулы Чезаро в обеих постановках позволяют ввести вектор-функции в качестве вектора неопределенных множителей Лагранжа. Задачи на вектор-функции всегда отделяются и сводятся к векторной задаче Неймана. С другой стороны уравнения совместности, вводятся как связи между дисторсиями или деформациями с помощью техники неопределенных множителей Лагранжа – тензоров второго порядка. Эти тензоры подпадают под определение функций напряжений, так как определяют напряжения, тождественно удовлетворяющие однородным уравнениям равновесия. В первой постановке, в случае уравнений совместности Папковича, тензор функций напряжений является несимметричным и обладает девятью компонентами. Во второй постановке, когда уравнениями совместности являются уравнения Сен-Венана, тензор функций напряжений является симметричным и обладает шестью компонентами. В обеих постановках число функций напряжений равно числу уравнений совместности. Показывается, что для случая несжимаемых тел, через вектор-функции могут быть введены три функции напряжений, которые определяют класс решений задач теории упругости при отсутствии объемных сил. Указываются конечные соотношения, которые при решении в напряжениях после определения функций напряжений позволяют найти деформации, псевдовектор поворотов и напряжения.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 20-41-04404, выданного Институту прикладной механики РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kozak I, Szeidl Gy.* Complete Solution for Stresses in Terms of Stress Functions Part I: Derivation from the Principle of Virtual Work // Technische Mechanik. 1996. V. 16. № 3. P. 147–168.
2. *Maxwell J.C.* On Reciprocal Figures, Frames, and Diagrams of Forces // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. 1870. V. 26. № 1. P. 1–40.
https://doi.org/10.1017/S0080456800026351
3. *Morera G.* Soluzione generale delle equazioni indefinite dell equilibrio di un corpo continuo // Atti Reale Accad. naz. Lincei Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur. 1892. V. 5. № 1/1. P. 137–141.
4. *Beltami E.* Osservazioni sulla Nota precedents // Atti Reale Accad. naz. Lincei. 1982. № 5. P. 141–142.
5. *Günther W.* Spannungsfunktionen und Vertraglichkeitsbedingungen der Kontinuumsmechanik // Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 1954. № 6. P. 207–219.
6. *Dorn W.S., Schild A.* A converse of virtual work theorem for deformable solids // Quart. Appl. Math. 1956. V. 14. № 2. P. 209–213.
https://doi.org/10.1090/QAM/79418
7. *Schaefer H.* Die Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums und des elastischen Körpers // Z. Angew. Math. Mech. 1953. № 33. P. 356–362.
https://doi.org/10.1002/zamm.19530331006
8. *Gurtin M.E.* A generalization of the Beltrami stress functions // Arch. Rational Mech. Anal. 1963. № 13. P. 321–329.
https://doi.org/10.1007/BF01262700
9. *Georgievskii D.V., Pobedrya B.E.* The number of independent compatibility equations in the mechanics of deformable solids // J. Appl. Math. Mech. 2004. V. 68. № 6. P. 1043–1048.
https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2004.11.015

10. *Pobedrya B.E.* Static problem in stresses // Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. 2003. № 3. P. 61–67.
11. *Georgievskii D.V., Pobedrya B.E.* On the compatibility equations in terms of stresses in many-dimensional elastic medium // Rus. J. Math. Phys. 2015. V. 22. № 1. P. 6–8. https://doi.org/10.1134/S1061920815010021
12. *Gurtin M.E.* The Linear Theory of Elasticity // Handbuch der Physik, Festkorpermechanik. B.: Springer-Verlag, 1972. P. 54–59.
13. *Остросаблин Н.И.* Условия совместности малых деформаций и функции напряжений // ПМТФ. 1997. Т. 7. № 5. С. 136–145.
14. *Васильев В.В., Федоров Л.В.* Об одной аналогии между уравнениями теории упругости и общей теории относительности // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 3. С. 143–154. https://doi.org/10.31857/S0572329921030120