ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2022, № 4, с. 70–84

УДК 539.3

ТЕРМОДЕФОРМИРОВАНИЕ ТЕЛА СО СЛОЖНОЙ РЕОЛОГИЕЙ В УСЛОВИЯХ СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

© 2022 г. **Д. А. Чернышов**[a,b,*], **А. В. Ковалев**[a,c,**]

[a] *Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*
[b] *Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия*
[c] *Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», Воронеж, Россия*
**e-mail: chernyshov.danil@gmail.com*
***e-mail: kav-mail@mail.ru*

Поступила в редакцию 15.04.2021 г.
После доработки 06.10.2021 г.
Принята к публикации 07.10.2021 г.

Для изучения влияния реологии тела на его напряженно-деформированное состояние под действием температуры используется модель А.Н. Спорыхина (упрочняющееся упруговязкопластическое тело). Предполагается квазистатическое деформирование при отсутствии массовых и поверхностных сил. Для данной постановки задачи определены компоненты напряжений и перемещений в упругой и пластической областях, зоне разгрузки и повторной пластичности и исследована их зависимость от учета конкретных реологических особенностей тела.

Ключевые слова: температурные напряжения, упругость, пластичность, вязкость, сплошной шар

DOI: 10.31857/S0572329922030059

1. Введение. Процессу деформирования материалов (как обратимого, так и необратимого) большое количество работ [1–11], в которых рассматриваются модели с различными свойствами. Наиболее исследованным является вопрос зависимости напряженно-деформированного состояния от выбора условий пластичности [1, 6, 10]. Однако не меньший интерес вызывает рассмотрение в рамках одной модели сразу нескольких механизмов деформирования. Следуя [5], введение в рассмотрение вязкости наделяет модель свойствами внутренней неконсервативности и связано с дополнительными вычислительными сложностями. В данной работе предложен подходов к решению задач с учетом вязких свойств материала, а также установлено влияние различных реологических свойств на процесс деформирования.

2. Постановка задачи. Сплошной шар радиуса R имеет начальную температуру T_0. В течение времени он нагревается таким образом, что в каждый момент на поверхности выполнено условие

$$\frac{T(R,t) - T_0}{T_m - T_0} = 1 - \mathrm{e}^{-xt} \tag{2.1}$$

где $T(r,t)$ – распределение температуры, r – пространственная координата точки, t – время, x – скорость нагрева, T_0 – начальная температура тела, T_m – максимальная температура нагрева. Примем, что внешняя поверхность шара свободна от усилий, массовые силы отсутствуют. Требуется определить напряженно-деформированное состояние тела. Аналогичная постановка задачи произведена в [6] для упругопластического материала.

3. Решение задачи. *3.1. Задача теплопроводности.* В условиях сферической симметрии уравнение теплопроводности принимает вид

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = \vartheta\left(\frac{2}{r}\frac{\partial T(r,t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial r^2}\right) \tag{3.1}$$

Здесь ϑ — коэффициент температуропроводности.

Начальное и граничные условия (включая (2.1)), а также условие симметрии записываются в виде:

$$\begin{gathered} T(r,0) = T_0 \\ \frac{T(R,t) - T_0}{T_m - T_0} = 1 - \mathrm{e}^{-xt} \\ T(0,t) \neq \infty \end{gathered} \tag{3.2}$$

Таким образом, получена замкнутая система уравнений (3.1)–(3.2).

Введем замену

$$\Psi(r,t) = r\frac{T(r,t) - T_m}{T_0 - T_m} \tag{3.3}$$

Будем искать решение в виде суммы

$$\Psi(r,t) = U(r,t) + V(r,t) \tag{3.4}$$

где функция $U(r,t)$ подбирается так, чтобы она удовлетворяла только граничным условиям.

Тогда для $V(r,t)$ получим систему уравнений

$$\begin{gathered} \frac{\partial V(r,t)}{\partial t} = \vartheta\frac{\partial^2 V(r,t)}{\partial r^2} - \left[\frac{\partial U(r,t)}{\partial t} - \vartheta\frac{\partial^2 U(r,t)}{\partial r^2}\right] \\ V(r,0) = r - U(r,0) \\ V(0,t) = V(R,t) = 0 \end{gathered} \tag{3.5}$$

Проведем рассмотрение с выбранной функцией

$$U(r,t) = re^{-xt}$$

Следуя [12], выпишем решение задачи (3.5)

$$V(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1}\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{R}r\right)}{\frac{\pi n}{R}}\frac{x}{x - \vartheta\frac{\pi^2 n^2}{R^2}}\left[e^{-\frac{\pi^2 n^2}{R^2}\vartheta t} - e^{-xt}\right]$$

Возвращаясь к замене (3.3)–(3.4) и вводя безразмерную функцию, получим

$$\Theta(\xi,t) = \frac{T(\xi,t) - T_0}{T_m - T_0} = 1 - e^{-xt} + \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^n\frac{\sin(\pi n\xi)}{\pi n\xi}\frac{x}{x - \vartheta\frac{\pi^2 n^2}{R^2}}\left[e^{-\frac{\pi^2 n^2}{R^2}\vartheta t} - e^{-xt}\right] \tag{3.6}$$

где $\xi = \dfrac{r}{R}$ — безразмерная координата.

В случае рассмотрения мгновенного нагрева поверхности приходим к задаче, решение которой приводится в [13, с. 105].

3.2. Напряженно-деформированное состояние. Общие соотношения. В случае сферической симметрии все величины с индексами углов φ и θ считаются равными между собой. Кроме того, частные производные любой функции по координатам φ и θ будут равны нулю. Запишем основные уравнения, используемые для решения задач механики сплошной среды с учетом реологических свойств и температуры.

Уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0 \tag{3.7}$$

где $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_\theta$ — компоненты тензора напряжений.

В пластической зоне свойства материала будут описываться моделью среды, предложенной А.Н. Спорыхиным [5] и учитывающей упругий, вязкий и пластический механизмы деформирования:

$$(S_r - ce_r^p - \eta\dot{e}_r^p)^2 + 2(S_\varphi - ce_\varphi^p - \eta\dot{e}_\varphi^p)^2 = 2\tilde{k}^2(r,t) \tag{3.8}$$

где S_r, S_φ, S_θ — компоненты девиатора тензора напряжений, $e_r^p, e_\varphi^p, e_\theta^p$ — компоненты тензора пластических деформаций, c — коэффициент упрочнения, η — коэффициент вязкости, $\tilde{k}(r,t)$ — предел текучести.

Ассоциированный закон пластического течения:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}e_r^p &= \frac{4}{3}d\psi(\sigma_r - \sigma_\varphi - c(e_r^p - e_\varphi^p) - \eta(\dot{e}_r^p - \dot{e}_\varphi^p)) \\ \mathrm{d}e_\varphi^p = \mathrm{d}e_\theta^p &= -\frac{2}{3}d\psi(\sigma_r - \sigma_\varphi - c(e_r^p - e_\varphi^p) - \eta(\dot{e}_r^p - \dot{e}_\varphi^p)) \end{aligned} \tag{3.9}$$

где ψ — скалярный положительный множитель. Из (3.9) следует пластическая несжимаемость материала

$$\mathrm{d}e_r^p + 2\mathrm{d}e_\varphi^p = 0 \tag{3.10}$$

Следуя [6], будем считать, что $\mathrm{d}e_{ij}^p = e_{ij}^p - \breve{e}_{ij}^p$, где $\breve{e}_{ij}^p$ — пластические деформации в предыдущий момент времени, и существует некоторый начальный момент, для которого $\breve{e}_{ij}^p = 0$. Тогда (3.10) примет вид

$$e_r^p + 2e_\varphi^p = 0 \tag{3.11}$$

Преобразовывая (3.8) с учетом (3.11), получим

$$[(\sigma_r - ce_r^p - \eta\dot{e}_r^p) - (\sigma_\varphi - ce_\varphi^p - \eta\dot{e}_\varphi^p)]^2 = 3\tilde{k}^2(r,t)$$

После замены $\tilde{k}(r,t) = \frac{2}{\sqrt{3}}k(r,t)$ условие пластичности запишется в форме

$$|(\sigma_r - ce_r^p - \eta\dot{e}_r^p) - (\sigma_\varphi - ce_\varphi^p - \eta\dot{e}_\varphi^p)| = 2k(r,t) \tag{3.12}$$

Аналогичное соотношение можно получить при использовании условий пластичности Треска и Ивлева.

Аналогично [6], будем рассматривать материал, предел текучести которого линейно зависит от температуры $k(r,t) = k_0(1 - \gamma\Delta(r,t))$, где k_0 — предел текучести при начальной температуре, γ — некоторая константа, определяемая из экспериментов, $\Delta(r, t) = \alpha(T(r,t) - T_0)$, α — коэффициент температурного расширения.

Закон Дюамеля-Неймана:

$$\begin{gathered}\sigma_r = \lambda(e_r^e + 2e_\varphi^e) + 2\mu e_r^e - (3\lambda + 2\mu)\,\Delta \\ \sigma_\varphi = \sigma_\theta = \lambda(e_r^e + 2e_\varphi^e) + 2\mu e_\varphi^e - (3\lambda + 2\mu)\,\Delta\end{gathered} \tag{3.13}$$

где $e_r^e, e_\varphi^e, e_\theta^e$ – компоненты тензора упругих деформаций.

Уравнения для полных деформаций и соотношения Коши:

$$\begin{gathered}e_r^e + e_r^p = e_r = u_{r,r} \\ e_\varphi^e + e_\varphi^p = e_\theta^e + e_\theta^p = e_\varphi = e_\theta = \frac{u_r}{r}\end{gathered} \tag{3.14}$$

где e_r, e_φ, e_θ – компоненты тензора полных деформаций.

3.3. Построение общего алгоритма определения напряженно-деформированного состояния. Поскольку безразмерное решение для поля температур имеет вид (3.6), то все величины будем искать в форме

$$F(r,t) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty} F^{[n,j]}(r)\,e^{-h[n,j]t} \tag{3.15}$$

где $h^{[n,1]} = \dfrac{\pi^2 n^2}{R^2}\vartheta$, $h^{[n,2]} = x$; $[n,j]$ – индексы членов ряда.

Очевидно, что $\Delta(r,t) = \Delta_m \Theta\left(\dfrac{r}{R}, t\right)$, где $\Delta_m = \alpha(T_m - T_0)$. Кроме того, можно разложить предел текучести в ряд:

$$k(r,t) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty} k_0(\delta^{[n,j]} - \gamma\Delta^{[n,j]}(r))\mathrm{e}^{-h[n,j]t}$$

Здесь

$$\delta^{[0,1]} = 1; \quad \delta^{[0,2]} = 0; \quad \forall n > 0 \quad \delta^{[n,1]} = \delta^{[n,2]} = 0 \tag{3.16}$$

Подставив (3.15) в (3.7), (3.11), (3.12)–(3.14), получим полную систему уравнений. Очевидно, что все величины в ней представляют собой ряды, и каждое из уравнений имеет вид $\sum_{j=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty} G^{[n,j]}(r)\,e^{-h[n,j]t} = 0$. Поскольку данное условие выполняется в любой точке $0 \le r \le R$ и для любого момента времени $t \ge 0$, то из него следует условие равенства нулю каждого члена ряда. В дальнейшем для удобства будем опускать индексы $[n, j]$. Таким образом, получим полную систему уравнений для определения всех членов разложения искомых величин в форме:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0 \tag{3.17}$$

$$|(\sigma_r - (c - \eta h)\,e_r^p) - (\sigma_\varphi - (c - \eta h)\,e_\varphi^p)| = 2k(r) \tag{3.18}$$

$$e_r^p + 2e_\varphi^p = 0 \tag{3.19}$$

$$\begin{gathered}\sigma_r = \lambda(e_r^e + 2e_\varphi^e) + 2\mu e_r^e - (3\lambda + 2\mu)\,\Delta(r) \\ \sigma_\varphi = \sigma_\theta = \lambda(e_r^e + 2e_\varphi^e) + 2\mu e_\varphi^e - (3\lambda + 2\mu)\,\Delta(r)\end{gathered} \tag{3.20}$$

$$\begin{gathered}e_r^e + e_r^p = e_r = u_{r,r} \\ e_\varphi^e + e_\varphi^p = e_\theta^e + e_\theta^p = e_\varphi = e_\theta = \frac{u_r}{r}\end{gathered} \tag{3.21}$$

Предположим, что в начальный момент времени тело полностью находилось в упругом состоянии, и по мере нагревания на его поверхности возникают и двигаются по направлению к центру зоны пластического и остаточного деформирования. Для определения напряженно-деформированного состояния будем осуществлять следующую последовательность действий:

1. Из соотношений Коши (3.21) получить

$$e_r^e + e_r^p = [r(e_\varphi^e + e_\varphi^p)]_{,r}$$

2. Подставляя закон Дюамеля—Неймана (3.20) и учитывая условие пластической несжимаемости (3.19) и уравнение равновесия (3.17), записать соотношение

$$\left(r\sigma_{r,r}\right)_{,r} + 3\sigma_{r,r} + 2\omega\left[2\Delta_{,r} - e_{r,r}^p - \frac{3e_r^p}{r}\right] = 0$$

3. Решая полученное уравнение, выписать выражение напряжений через пластические деформации;

4. В случае пластического деформирования подставить формулы для напряжений в условие пластичности (3.18) и решить его относительно пластических деформаций;

5. Возвращаясь к закону Дюамеля—Неймана и соотношениям Коши, получить формулу для перемещений;

6. Из граничных условий и условий сопряжения найти константы интегрирования.

3.4. Решения для каждой зоны. В начальный момент времени тело находится в состоянии упругого равновесия. Поэтому во всем шаре решение записывается в виде

$$\begin{gathered}
\sigma_r = -\frac{4\omega}{r^3}\int_0^r \rho^2\Delta(\rho)\,d\rho + A_1 + \frac{B_1}{r^3} \\
\sigma_\varphi = \frac{2\omega}{r^3}\int_0^r \rho^2\Delta(\rho)\,d\rho - 2\omega\Delta(r) + A_1 - \frac{B_1}{2r^3} \\
u = \frac{\omega}{\mu r^2}\int_0^r \rho^2\Delta(\rho)\,d\rho + \frac{rA_1}{3\lambda + 2\mu} - \frac{B_1}{4\mu r^2}
\end{gathered} \tag{3.22}$$

где $\omega = \dfrac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu}$.

Неизвестные постоянные определяются из условий свободной от усилий поверхности и отсутствия перемещений в центре:

$$A_1 = \frac{4\omega}{R^3}\int_0^R \rho^2\Delta(\rho)\,d\rho, \quad B_1 = 0.$$

В некоторый момент $t = t_p$ на поверхности шара $r = R$ начинает выполняться условие пластичности

$$(\sigma_r - (c - \eta h)e_r^p) - (\sigma_\varphi - (c - \eta h)e_\varphi^p) = 2k(r) \tag{3.23}$$

В связи с этим при $t > t_p$ в шаре одновременно существуют область $0 \le r < a(t)$ обратимого и $a(t) \le r \le R$ необратимого деформирования. $a(t)$ — упругопластическая граница.

В упругой зоне напряжения и перемещение определяются по формулам (3.22) с точностью до новых констант интегрирования. В пластической зоне решение принимает вид

$$\sigma_r = \left\{-\frac{4\omega}{r^3}\int_a^r \rho^2\Delta(\rho,t)\,d\rho + A_2 + \frac{B_2}{r^3}\right\} - \frac{8\omega}{3\eta(\Omega-h)}\int_a^r \frac{k(\rho)}{\rho}\,d\rho +$$
$$+\frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega-h)}\frac{1}{r^3}\int_a^r \rho^2\Delta(\rho)\,d\rho - \frac{2\omega}{3\eta(\Omega-h)}\frac{B_2}{r^3}$$
$$\sigma_\varphi = \left\{\frac{2\omega}{r^3}\int_a^r \rho^2\Delta(\rho)\,d\rho - 2\omega\Delta(r) + A_2 - \frac{B_2}{2r^3}\right\} - \frac{8\omega}{3\eta(\Omega-h)}\int_a^r \frac{k(\rho)}{\rho}\,d\rho -$$
$$-\frac{4\omega^2}{3\eta(\Omega-h)}\frac{1}{r^3}\int_a^r \rho^2\Delta(\rho)\,d\rho - \frac{4\omega}{3\eta(\Omega-h)}k(r) + \frac{4\omega^2}{3\eta(\Omega-h)}\Delta(r) + \frac{\omega}{3\eta(\Omega-h)}\frac{B_2}{r^3} \tag{3.24}$$
$$u = \left\{\frac{\omega}{\mu r^2}\int_a^r \rho^2\Delta(\rho,t)\,d\rho + \frac{rA_2}{3\lambda+2\mu} - \frac{B_2}{4\mu r^2}\right\} - \frac{8\omega}{3\eta(\Omega-h)(3\lambda+2\mu)}r\int_a^r \frac{k(\rho)}{\rho}\,d\rho +$$
$$+\frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega-h)(3\lambda+2\mu)}\frac{1}{r^2}\int_a^r \rho^2\Delta(\rho)\,d\rho - \frac{2\omega}{3\eta(\Omega-h)(3\lambda+2\mu)}\frac{B_2}{r^2},$$

где $\Omega = \dfrac{2\omega+3c}{3\eta}$.

Константы интегрирования для обеих зон находятся из граничных условий, а также условий сопряжения напряжений и перемещений на границе $a(t)$:

$$A_1 = \frac{8\omega}{3\eta(\Omega-h)}\int_a^R \frac{k(\rho)}{\rho}\,d\rho - \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega-h)}\left\{\frac{1}{R^3}\int_0^R \rho^2\Delta(\rho)\,d\rho - \frac{1}{a^3}\int_0^a \rho^2\Delta(\rho)\,d\rho\right\} +$$
$$+\frac{4\omega}{R^3}\int_0^R \rho^2\Delta(\rho)\,d\rho$$
$$A_2 = \frac{8\omega}{3\eta(\Omega-h)}\int_a^R \frac{k(\rho)}{\rho}\,d\rho - \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega-h)}\left\{\frac{1}{R^3}\int_0^R \rho^2\Delta(\rho)\,d\rho\right\} + \frac{4\omega}{R^3}\int_0^R \rho^2\Delta(\rho)\,d\rho$$
$$B_1 = 0,\quad B_2 = -4\omega\int_0^a \rho^2\Delta(\rho)\,d\rho$$

Положение $a(t)$ определяется из отсутствия на ней пластических деформаций, выполнения условия пластичности (3.23) для напряжений (3.22) или непрерывности окружных напряжений на границе (данные условия являются эквивалентными):

$$e_r^p(a,t) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\omega}{3\eta(\Omega-h^{[n,j]})}\left\{2\Delta^{[n,j]}(a) - \frac{2k^{[n,j]}(a)}{\omega} - \frac{6}{a^3}\int_0^a \rho^2\Delta^{[n,j]}(\rho)\,d\rho\right\}e^{-h[n,j]t} = 0$$

По мере нагревания температурные напряжения в теле уменьшаются. Это приводит к снижению уровня пластических деформаций. Согласно ассоциированному закону, их скорость не может быть отрицательной. Пусть в некоторый момент $t = t_u$ на поверхности шара выполняется условие разгрузки материала

$$\dot{e}_r^p = 0$$

Тогда при $t > t_u$ возникает новая область с границей $b(t)$. Следует заметить, что в каждой точке области $b(t) \le r \le R$ сохраняется уровень накопленной деформации $\hat{e}^p$, равный пластической деформации в этой точке в момент прохождения через нее границы $b(t)$.

В зонах упругости и пластичности решение записывается по уже известным формулам (3.22) и (3.24). Выражения в зоне разгрузки имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \left\{-\frac{4\omega}{r^3}\int_b^r \rho^2\Delta(\rho)\,d\rho + A_3 + \frac{B_3}{r^3}\right\} + 2\omega\int_b^r \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho}d\rho \\
\sigma_\varphi &= \left\{\frac{2\omega}{r^3}\int_b^r \rho^2\Delta(\rho)\,d\rho - 2\omega\Delta(r) + A_3 - \frac{B_3}{2r^3}\right\} + 2\omega\int_b^r \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho}d\rho + 2\omega\hat{e}_r^p(r) \\
u &= \left\{\frac{\omega}{\mu r^2}\int_b^r \rho^2\Delta(\rho)\,d\rho + \frac{rA_3}{3\lambda+2\mu} - \frac{B_3}{4\mu r^2}\right\} + \frac{2\omega}{3\lambda+2\mu}r\int_b^r \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho}d\rho
\end{aligned} \qquad (3.25)$$

Далее необходимо воспользоваться граничными условиями и условиями сопряжения на упругопластических границах и определить из них неизвестные константы:

$$A_1 = -2\omega\int_b^R \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho}d\rho + \frac{8\omega}{3\eta(\Omega-h)}\int_a^b \frac{k(\rho)}{\rho}d\rho -$$

$$-\frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega-h)}\left\{\frac{1}{b^3}\int_0^b \rho^2\Delta(\rho)\,d\rho - \frac{1}{a^3}\int_0^a \rho^2\Delta(\rho)\,d\rho\right\} + \frac{4\omega}{R^3}\int_0^R \rho^2\Delta(\rho)\,d\rho$$

$$A_2 = -2\omega\int_b^R \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho}d\rho + \frac{8\omega}{3\eta(\Omega-h)}\int_a^b \frac{k(\rho)}{\rho}d\rho -$$

$$-\frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega-h)}\left\{\frac{1}{b^3}\int_0^b \rho^2\Delta(\rho)\,d\rho\right\} + \frac{4\omega}{R^3}\int_0^R \rho^2\Delta(\rho)\,d\rho$$

$$A_3 = -2\omega\int_b^R \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho}d\rho + \frac{4\omega}{R^3}\int_0^R \rho^2\Delta(\rho)\,d\rho$$

$$B_1 = 0, \quad B_2 = -4\omega\int_0^a \rho^2\Delta(\rho)\,d\rho, \quad B_3 = -4\omega\int_0^b \rho^2\Delta(\rho)\,d\rho$$

Положение границы $b(t)$ при $t > t_u$ определяется из условия равенства нулю скорости пластических деформаций на ней

$$\dot{e}_r^p(b,t) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\omega(-h^{[n,j]})}{3\eta(\Omega - h^{[n,j]})}\left\{2\Delta^{[n,j]}(b) - \frac{2k^{[n,j]}(b)}{\omega} - \frac{6}{b^3}\int_0^b \rho^2\Delta^{[n,j]}(\rho)\,d\rho\right\}e^{-h[n,j]t} = 0 \qquad (3.26)$$

Определим уровень накопленной деформации $\hat{e}_r^p$. Поскольку $b(t)$, вычисляемая из (3.26), непрерывна и монотонно убывает, то существует обратная ей функция $s(b)$. Тогда накопленные деформации имеют вид

$$\hat{e}_r^p(r) = e_r^p(r, s(r)) \qquad (3.27)$$

что эквивалентно поиску огибающей семейства пластических деформаций с параметром t. Так как $\hat{e}_r^p$ не зависит от времени, то будем считать, что она состоит только из одного ненулевого слагаемого вида $\hat{e}_r^{p[0,1]}(r) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty} e_r^{p[n,j]}(r)\,e^{-h[n,j]s(r)}$. Поэтому (3.25) справедливы только для напряжений и перемещений с индексом [0, 1], а для всех остальных следует делать подстановку $\hat{e}_r^{p[n,j]}(r) = 0$.

В зависимости от уровня накопленных деформаций возможно существование момента $t = t_r$, при котором происходит выход на условие пластичности (3.23) с противоположным знаком:

$$(\sigma_r - (c - \eta h)\, e_r^p) - (\sigma_\varphi - (c - \eta h)\, e_\varphi^p) = -2k(r)$$

Решение в новой области совпадает с решением (3.24) в зоне $a(t) \le r < b(t)$ с точностью до новых постоянных и знака перед пределом текучести:

$$\begin{gathered}
\sigma_r = \left\{-\frac{4\omega}{r^3}\int_c^r \rho^2\Delta(\rho,t)\,d\rho + A_4 + \frac{B_4}{r^3}\right\} + \frac{8\omega}{3\eta(\Omega-h)}\int_c^r \frac{k(\rho)}{\rho}d\rho + \\
+\frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega-h)}\frac{1}{r^3}\int_c^r \rho^2\Delta(\rho)\,d\rho - \frac{2\omega}{3\eta(\Omega-h)}\frac{B_4}{r^3} \\
\sigma_\varphi = \left\{\frac{2\omega}{r^3}\int_c^r \rho^2\Delta(\rho)\,d\rho - 2\omega\Delta(r) + A_4 - \frac{B_4}{2r^3}\right\} + \frac{8\omega}{3\eta(\Omega-h)}\int_c^r \frac{k(\rho)}{\rho}d\rho - \\
-\frac{4\omega^2}{3\eta(\Omega-h)}\frac{1}{r^3}\int_c^r \rho^2\Delta(\rho)\,d\rho + \frac{4\omega}{3\eta(\Omega-h)}k(r) + \frac{4\omega^2}{3\eta(\Omega-h)}\Delta(r) + \frac{\omega}{3\eta(\Omega-h)}\frac{B_4}{r^3} \\
u = \left\{\frac{\omega}{\mu r^2}\int_c^r \rho^2\Delta(\rho,t)\,d\rho + \frac{rA_4}{3\lambda+2\mu} - \frac{B_4}{4\mu r^2}\right\} + \frac{8\omega}{3\eta(\Omega-h)(3\lambda+2\mu)}r\int_c^r \frac{k(\rho)}{\rho}d\rho + \\
+\frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega-h)(3\lambda+2\mu)}\frac{1}{r^2}\int_c^r \rho^2\Delta(\rho)\,d\rho - \frac{2\omega}{3\eta(\Omega-h)(3\lambda+2\mu)}\frac{B_4}{r^2}
\end{gathered} \tag{3.28}$$

Для определения констант интегрирования следует исходить из граничных условий, а также условий сопряжения напряжений и перемещений на упругопластических границах. Возможны различные варианты одновременного существования зон. Рассмотрим случай, при котором в теле присутствует каждая из рассмотренных областей. Тогда неизвестные постоянные принимают вид

$$\begin{gathered}
A_1 = -\frac{8\omega}{3\eta(\Omega-h)}\int_c^R \frac{k(\rho)}{\rho}d\rho - \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega-h)}\left\{\frac{1}{R^3}\int_0^R \rho^2\Delta(\rho)d\rho - \frac{1}{c^3}\int_0^c \rho^2\Delta(\rho)d\rho\right\} - 2\omega\int_b^c \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho}d\rho + \\
+\frac{8\omega}{3\eta(\Omega-h)}\int_a^b \frac{k(\rho)}{\rho}d\rho - \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega-h)}\left\{\frac{1}{b^3}\int_0^b \rho^2\Delta(\rho)d\rho - \frac{1}{a^3}\int_0^a \rho^2\Delta(\rho)d\rho\right\} + \frac{4\omega}{R^3}\int_0^R \rho^2\Delta(\rho)d\rho \\
A_2 = -\frac{8\omega}{3\eta(\Omega-h)}\int_c^R \frac{k(\rho)}{\rho}d\rho - \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega-h)}\left\{\frac{1}{R^3}\int_0^R \rho^2\Delta(\rho)d\rho - \frac{1}{c^3}\int_0^c \rho^2\Delta(\rho)d\rho\right\} - 2\omega\int_b^c \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho}d\rho + \\
+\frac{8\omega}{3\eta(\Omega-h)}\int_a^b \frac{k(\rho)}{\rho}d\rho - \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega-h)}\left\{\frac{1}{b^3}\int_0^b \rho^2\Delta(\rho)d\rho\right\} + \frac{4\omega}{R^3}\int_0^R \rho^2\Delta(\rho)d\rho \\
A_3 = -\frac{8\omega}{3\eta(\Omega-h)}\int_a^b \frac{k(\rho)}{\rho}d\rho - \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega-h)}\left\{\frac{1}{R^3}\int_0^R \rho^2\Delta(\rho)d\rho - \frac{1}{c^3}\int_0^c \rho^2\Delta(\rho)d\rho\right\} - 2\omega\int_b^c \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho}d\rho + \\
+\frac{4\omega}{R^3}\int_0^R \rho^2\Delta(\rho)d\rho
\end{gathered}$$

$$A_4 = -\frac{8\omega}{3\eta(\Omega - h)}\int_a^b \frac{k(\rho)}{\rho}\mathrm{d}\rho - \frac{8\omega^2}{3\eta(\Omega - h)}\left\{\frac{1}{R^3}\int_0^R \rho^2\Delta(\rho)\mathrm{d}\rho\right\} - 2\omega\int_b^c \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho}\mathrm{d}\rho + \frac{4\omega}{R^3}\int_0^R \rho^2\Delta(\rho)\mathrm{d}\rho$$

$$B_1 = 0, \quad B_2 = -4\omega\int_0^a \rho^2\Delta(\rho)\mathrm{d}\rho, \quad B_3 = -4\omega\int_0^b \rho^2\Delta(\rho)\mathrm{d}\rho, \quad B_4 = -4\omega\int_0^c \rho^2\Delta(\rho)\mathrm{d}\rho$$

Положение границы $c(t)$ находится аналогично $a(t)$ из уравнения

$$e_r^p(c,t) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\omega}{3\eta(\Omega - h^{[n,j]})}\left\{2\Delta^{[n,j]}(c) + \frac{2k^{[n,j]}(c)}{\omega} - \frac{6}{c^3}\int_0^c \rho^2\Delta^{[n,j]}(\rho)\,\mathrm{d}\rho\right\}\cdot e^{-h[n,j]t} = \hat{e}_r^p(c)$$

В процесс деформирования существует момент времени $t = t_k$, при котором положение границ $a(t_k)$ и $b(t_k)$ совпадает, то есть первая зона пластического деформирования перестает существовать. Тогда в зоне $0 \le r \le c(t)$ устанавливается состояние разгрузки, а упругопластические границы достигают своего предельного положения $a(t_k) = b(t_k) = b'$. В зависимости от температурного воздействия момент $t = t_k$ может наступить как до, так и после возникновения зоны повторного пластического течения.

При полном нагреве до температуры T_m в момент времени $t = t_m$ положение границы $c(t)$ достигает предельного положения c', а скорость пластического деформирования становится равной нулю. Тогда в области $c' \le r \le R$ имеют место остаточные деформации $\tilde{e}_r^p$. Выражение для них записывается в виде

$$\tilde{e}_r^p(r) = e_r^p(r,t_m) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4k_0(\delta^{[n,j]} - \gamma\Delta_m^{[n,j]})}{3\eta(\Omega - h^{[n,j]})}e^{-h[n,j]t_m} = 0$$

Так как при полном нагреве $\Theta\left(\frac{r}{R},t_m\right) = 1$, то $\Delta_m^{[0,1]} = 1$; $\Delta_m^{[0,2]} = 0$; $\forall n > 0\ \Delta_m^{[n,1]} = \Delta_m^{[n,2]} = 0$. С учетом (3.16), выражение для остаточных деформаций принимает вид

$$\tilde{e}_r^p(r) = \frac{4k_0(1 - \gamma\Delta_m)}{3\eta\Omega}$$

Для простоты введем функцию остаточных деформаций

$$E_r^p(r) = \begin{cases} 0, & 0 \le r < b' \\ \hat{e}_r^p(r), & b' \le r < c' \\ \tilde{e}_r^p(r), & c' \le r \le R \end{cases} \tag{3.29}$$

Охладим теперь шар до начальной температуры. Запишем условие полного остывания:

$$\Delta(r,t) = 0$$

Данный процесс представляет собой разгрузку материала. С учетом (3.25) и (3.29), получим выражения для остаточных напряжений и деформаций

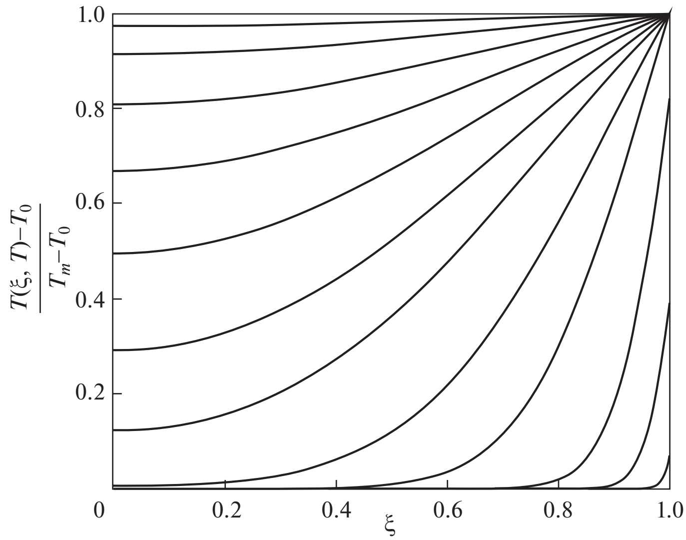

Рис. 1. Распределение температуры шара в различные моменты времени.

$$\sigma_r = 2\omega\int_R^r \frac{E_r^p(\rho)}{\rho}\mathrm{d}\rho$$
$$\sigma_\varphi = 2\omega\int_R^r \frac{E_r^p(\rho)}{\rho}\mathrm{d}\rho + 2\omega E_r^p(r) \tag{3.30}$$
$$u = \frac{2\omega}{3\lambda + 2\mu} r\int_R^r \frac{E_r^p(\rho)}{\rho}\mathrm{d}\rho$$

4. Анализ решения. Обоснование применимости метода решения задачи теплопроводности приводится в [12]. Однако дополнительно необходимо проверить, что все полученные величины достаточное количество раз непрерывно дифференцируемы и интегрируемы, чтобы удовлетворять уравнениям задачи. Этот вопрос (как и выбор оптимального количества членов ряда и скорость сходимости при малых t) представляет собой отдельную тему исследования и не приводится в рамках данной работы. В дальнейшем будем рассматривать постоянное количество членов каждого из рядов. С целью определения достаточности подобранного числа членов на примере задачи теплопроводности было проведено численное интегрирование краевой задачи в программной системе конечно-элементного анализа с последующей визуальной оценкой графических зависимостей. На рис. 1 и 2 представлено распределение поля безразмерной температуры, полученное аналитически и с применением численных методов решения дифференциальных уравнений, в одни и те же моменты времени.

Для сравнения моделей, учитывающих различные свойства материала, необходимо совершить предельный переход. Для рассмотрения модели без упрочнения материала, необходимо в полученном решении задаться $c = 0$. Чтобы в общем случае исключить из рассмотрения вязкость, следует положить $\eta = 0$. Тогда во всех выражениях следует заменить коэффициенты вида $3\eta(\Omega - h)$ на $3c + 2\omega$. Если дополнительно приравнять

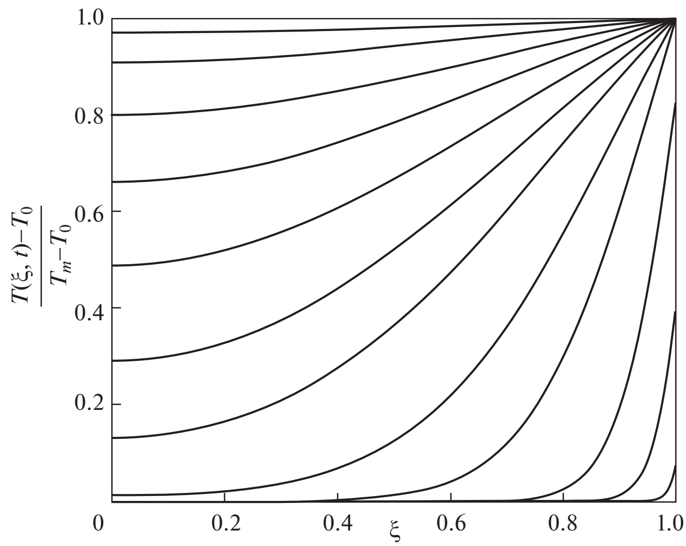

Рис. 2. Распределение численного решения поля температур.

$c = 0$, то получится решение для случая упругопластического материала. Можно легко убедиться, что для каждого члена ряда оно в точности совпадает с решением [6].

Проведем сравнение для четырех моделей сред. В дальнейшем будем пользоваться следующими индексами для основных величин: i — упругопластический материал, c — упругопластический материал с упрочнением, η — упруговязкопластический материал без упрочнения, $c\eta$ — упруговязкопластический материал с упрочнением. В качестве примера рассмотрим тело со следующими параметрами: $R = 0.2$ м, $x = 1$ с$^{-1}$,

Таблица 1. Значения моментов возникновения зон (в секундах) и положения границ (безразмерные)

	i	c	η	$c\eta$
t_p	0.28166	0.28166	0.47532	0.35202
t_u	2.98776	2.98776	3.17949	3.05806
$a(t_u)$	0.87561	0.87561	0.87514	0.87554
t_r	11.75536	11.75536	11.96710	11.82847
$a(t_r)$	0.72574	0.72574	0.72537	0.72569
$b(t_r)$	0.85930	0.85930	0.85881	0.85923
t_k	25.31517	25.31517	25.48840	25.38286
$a(t_k) = b(t_k) = b'$	0.66649	0.66649	0.66650	0.66649
$c(t_k)$	0.95746	0.95746	0.95752	0.95747
$c(t_m) = c'$	0.79004	0.79004	0.79006	0.79005

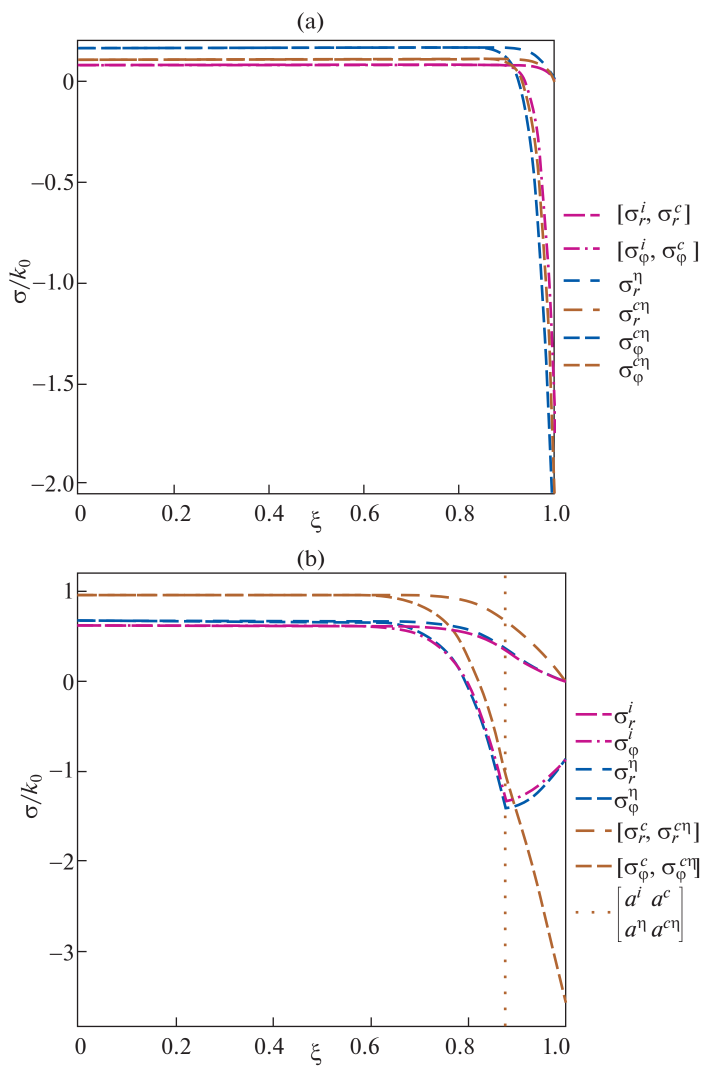

Рис. 3. Распределение напряжений в различные моменты времени.

$\vartheta = 1.172\times10^{-4}$ м$^2\cdot$ с$^{-1}$, $\Delta_m = 8.5\times10^{-3}$, $k_0 = 2\times10^8$ Па, $\gamma = 70.6$, $\lambda = 9.2\times10^{10}$ Па, $\mu = 4.3\times10^{10}$ Па, $c = 0.9\times10^{11}$ Па, $\eta = 1.0\times10^{10}$ Па $\cdot$ с.

В табл. 1 приведены численные значения моментов возникновения новых зон, а также положение упругопластических границ в эти моменты. На рис. 3 представлено распределение радиальных и окружных напряжений в шаре для каждой из моделей сред в различные моменты времени: (a) – возникновение зоны пластического течения, (b) – возникновение зоны разгрузки, (c) – возникновение зоны повторного пластического течения, (d) – исчезновение первой зоны пластического течения. В случае упругопластического материала полученные графики совпадают с приведенными в [6]. То же справедливо и для остаточных напряжений в теле (см. рис. 4).

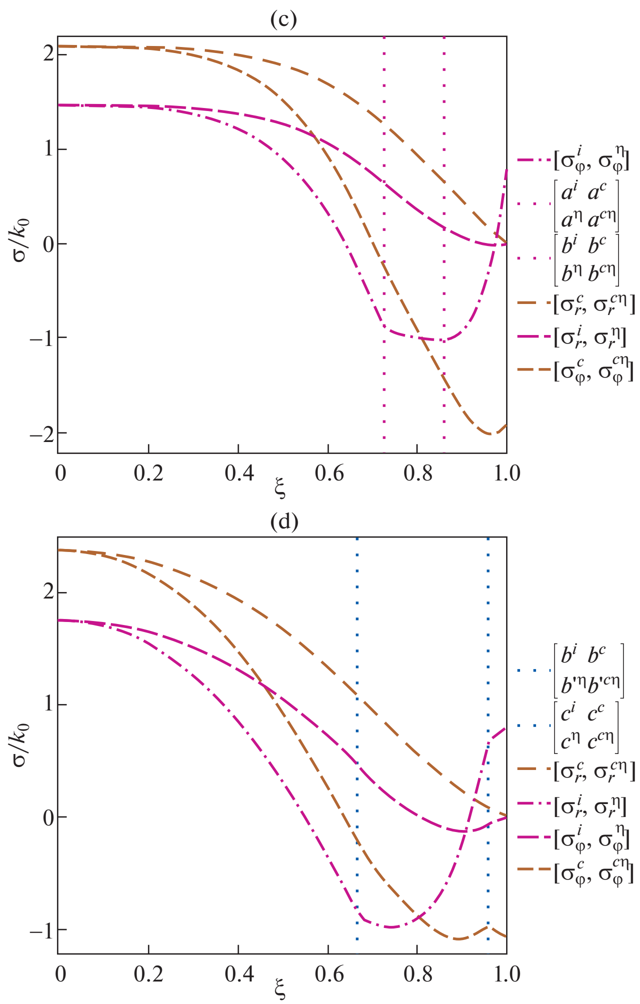

Рис. 3. Окончание

На рис. 5 представлен график возникновения, развития во времени и исчезновения первой зоны пластического течения.

5. Заключение. В работе было получено аналитическое решение задачи о напряженно-деформированном состоянии нагреваемого сплошного шара с реологическими свойствами; совершены предельные переходы к упругопластическому материалу, упруговязкопластическому материалу и упрочняющемуся упругопластическому материалу; проведено сравнение с уже имеющимися результатами; построены графики распределения напряжений в шаре при отличающихся механизмах деформирования.

Анализ решения позволил сформулировать следующие выводы:

1. Учет упрочнения материала оказывает существенное влияние на величину напряжений.

2. При отсутствии вязкости упрочнение не влияет на положение упругопластических границ.

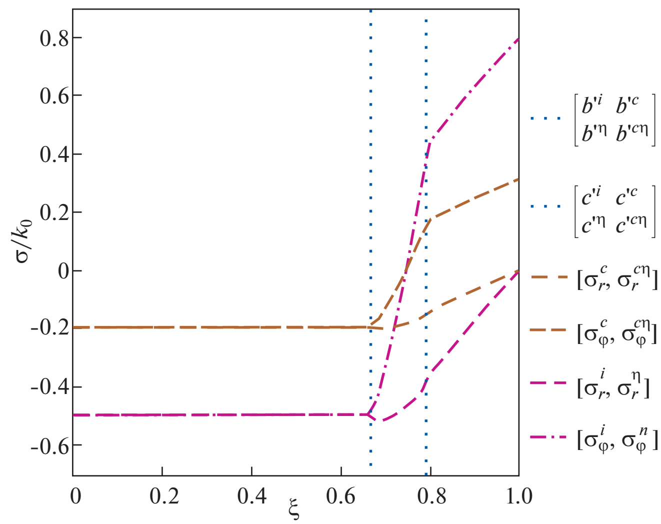

Рис. 4. Остаточные напряжения.

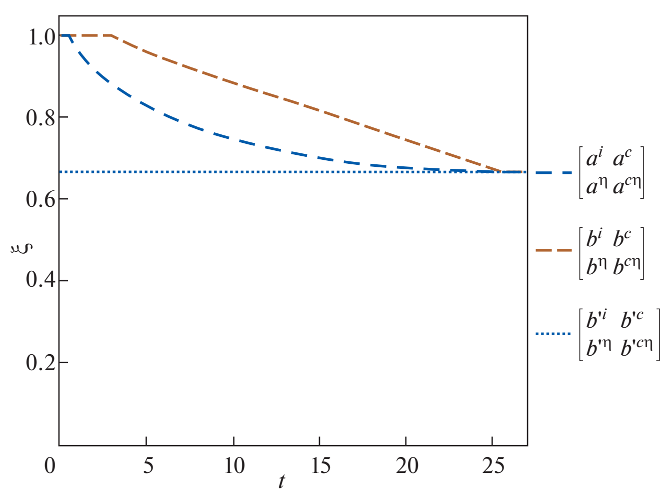

Рис. 5. Движение границ $a(t)$ и $b(t)$.

3. Влияние вязкости на величину напряжений быстро уменьшается с течением времени. Остаточные деформации при полном нагреве не зависят от данного параметра.

4. Предельные положения границ для всех четырех моделей материалов можно считать одинаковыми.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.

2. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 252 с. = *Parkus H.* Instationäre Wärmespannungen. Vienna: Springer, 1959.

3. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 517 с. = *Boley B.A., Weiner J.H.* Theory of Thermal Stresses. N. Y.: Wiley, 1960.
4. *Спорыхин А.Н., Ковалев А.В., Щеглова Ю.Д.* Неодномерные задачи упруговязкопластичности с неизвестной границей. Воронеж: ВГУ, 2004. 218 с.
5. *Спорыхин А.Н.* Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Воронеж: ВГУ. 1997. 361 с.
6. *Дац Е.П.* Неустановившиеся температурные напряжения в условиях зависимости предела текучести от температуры. Дис. канд. физ.-мат. наук. Владивосток, 2017. С. 23–48.
7. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Лушпей А.В.* Переходный процесс торможения прямолинейного вязкопластического течения при мгновенном снятии нагружающих усилий // Прикладная математика и механика. 2009. № 4. С. 663–669.
8. *Мурашкин Е.В., Дац Е.П.* Термоупругопластическое деформирование многослойного шара // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 5. С. 30–36.
9. *Дац Е.П., Мокрин С.Н., Мурашкин Е.В.* Расчет накопленной остаточной деформации в процессе “нагрева-охлаждения” упругопластического шара // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер.: Мех. пред. сост. 2012. № 4. С. 123–132.
10. *Артемов М.А., Барановский Е.С., Якубенко А.П.* Альтернативные формы записи кусочно-линейных условий пластичности и их обобщения // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Физ. Мат. 2015. № 1. С. 71–82.
11. *Галанин М.П., Гузев М.А., Низкая Т.В.* Численное решение задачи термопластичности с дополнительными параметрами состояния. Препринт № 8. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2007. 20 с.
12. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 1979. 415 с.
13. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.