

УДК 539.3

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ

© 2022 г. Ю. И. Виноградов^{а,*}

^аМГТУ им Н.Э. Баумана, Москва, Россия

*e-mail: yuvino@rambler.ru

Поступила в редакцию 05.10.2020 г.

После доработки 20.11.2020 г.

Принята к публикации 28.01.2021 г.

Уравнения с частными производными механики деформирования пологой оболочки декомпозицией, разделением переменных, приводятся к обыкновенным и уравнениям связи их в точке пересечения независимых переменных. Решения однородных обыкновенных дифференциальных уравнений определяются матричными сходящимися рядами. Они удовлетворяют произвольным начальным условиям. Это позволяет исключить из решений постоянные интегрирования. Решения устанавливают связь между величинами, характеризующими состояние сечений оболочки, в том числе и на краях, необходимые для задания краевых условий. Для декомпозиции и моделирования поверхностной нагрузки наносится сетка на элементе оболочки. Параметрические исследования при сгущении сетки показали быструю сходимость решения.

Ключевые слова: полая оболочка, краевая задача, оценка погрешности

DOI: 10.31857/S0572329922030126

Введение. Актуальной проблемой является решение задач механики деформирования элементов пластин и оболочек [1–4] в тех случаях, когда не удастся методом Фурье разделить переменные в уравнениях с частными производными и упростить задачу решением обыкновенных дифференциальных уравнений [5, 6]. Проблема преодолевается решением уравнений с частными производными с контролируемой погрешностью. Закладываются основы построения конечных элементов оболочек, на которых математические модели их деформирования решаются с контролируемой погрешностью. Таким образом, становится возможным построения алгоритмов решения задач механики деформирования тонкостенных конструкций с определением мест концентрации напряжений и их максимальных значений, что необходимо при решении задач прочности, например, летательных аппаратов. В работе представлена методика решения краевых задач механики деформирования пологой оболочки двойкой кривизны. Методика основана на решении линейных обыкновенных дифференциальных уравнений удовлетворяющих произвольным начальным условиям. Вероятно, впервые такое решение было получено А.Н. Крыловым методом Коши [7]. Декомпозицией [8] уравнения с частными производными механики деформирования пологой оболочки приводятся к обыкновенным и алгебраическим уравнениям их связи. Решения однородных обыкновенных дифференциальных уравнений и частные решения для их правых частей получены на основе известных работ [9–12] в виде формул. Они опубликованы в работах [13–15]. Построен и реализован алгоритм решения на ЭВМ краевой задачи механики деформирования элемента пологой защемленной по краям оболочки при поверхностном давлении.

1. Реализация. Рассматривается полая оболочка двойкой кривизны, прямоугольная в плане, контур которой образован меридианами и параллелями, параллельными

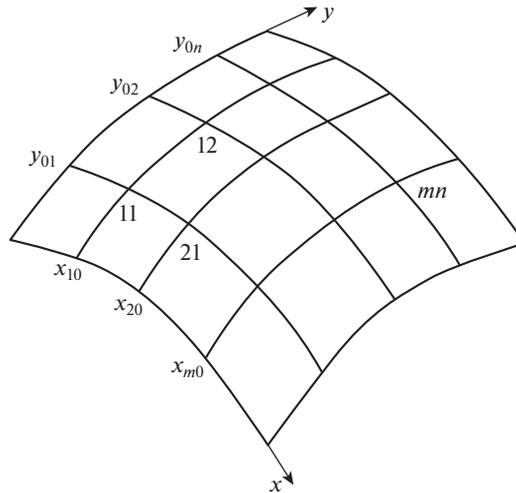


Рис. 1. Пологая оболочка.

линиям главных кривизн (рис. 1). В качестве математической модели механики деформирования оболочки используются общие разрешающие уравнения оболочки двойкой кривизны в перемещениях:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left(\frac{1}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{q_1}{B} \\
 & \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{q_2}{B} \\
 & \frac{12}{h^2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{12}{h^2} \left(\frac{1}{r_2} + \frac{\mu}{r_1} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \\
 & + \frac{12}{h^2} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2\mu}{r_1 r_2} \right) w + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q_3}{D}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

где: u, v, w – компоненты перемещений, q_1, q_2, q_3 – соответствующие перемещениям компоненты внешних поверхностных сил, r_1, r_2 – главные радиусы кривизны оболочки, h и μ – толщина оболочки и коэффициент Пуассона, B и D – мембранная и изгибная жесткости.

Методом декомпозиции [8] система уравнений в частных производных (1.1) приводится к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) \frac{\partial w_1^{(1)}}{\partial x} = f_1^{(1)}(x, y) \\
 & \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial y^2} = f_1^{(2)}(x, y) \\
 & \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial \left[\frac{\partial v_1^{(3)}}{\partial y} \right]}{\partial x} = f_1^{(3)}(x, y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial^2 v_2^{(1)}}{\partial x^2} &= f_2^{(1)}(x, y) \\
\frac{\partial^2 v_2^{(2)}}{\partial y^2} + \left(\frac{1}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) \frac{\partial w_2^{(2)}}{\partial y} &= f_2^{(2)}(x, y) \\
\frac{1 + \mu}{2} \frac{\partial \left[\frac{\partial u_2^{(3)}}{\partial y} \right]}{\partial y} &= f_2^{(3)}(x, y) \\
\frac{12}{h^2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x} + \frac{12}{h^2} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2\mu}{r_1 r_2} \right) w_3^{(1)} + \frac{\partial^4 w_3^{(1)}}{\partial x^4} &= f_3^{(1)}(x, y) \\
\frac{12}{h^2} \left(\frac{1}{r_2} + \frac{\mu}{r_1} \right) \frac{\partial v_3^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial^4 w_3^{(2)}}{\partial y^4} &= f_3^{(2)}(x, y) \\
\frac{\partial^2 \left[\frac{\partial^2 w_3^{(3)}}{\partial y^2} \right]}{2 \frac{\partial x^2}} &= f_3^{(3)}(x, y)
\end{aligned} \tag{1.2}$$

и уравнений их связи:

$$\begin{aligned}
\frac{q_1}{B} &= f_1^{(1)}(x, y) + f_1^{(2)}(x, y) + f_1^{(3)}(x, y) \\
\frac{q_2}{B} &= f_2^{(1)}(x, y) + f_2^{(2)}(x, y) + f_2^{(3)}(x, y) \\
\frac{q_3}{B} &= f_3^{(1)}(x, y) + f_3^{(2)}(x, y) + f_3^{(3)}(x, y) \\
u_1^{(1)} &= u_3^{(1)}, \quad \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial u_2^{(3)}}{\partial x} \\
v_2^{(1)} &= v_2^{(1)}, \quad \frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial y} = \frac{\partial v_2^{(2)}}{\partial y} \\
w_1^{(1)} &= w_3^{(1)}, \quad \frac{\partial^2 w_3^{(3)}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u_2^{(3)}}{\partial y^2}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

В системе уравнений (1.2) $f_1^{(1)}(x, y) \dots f_3^{(3)}(x, y)$ – неизвестные функции, введенные при декомпозиции. Эти функции подлежат определению путем удовлетворения уравнений связи (1.3). Проанализируем уравнения системы (1.2).

Первое, четвертое и седьмое и уравнение системы (1.2) – уравнения в частных производных, содержащие производные только по x . Эти уравнения будем рассматривать как обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) с параметром y .

Второе, пятое и восьмое уравнение системы (1.2) – уравнения в частных производных, содержащее производные только по y . Аналогично, рассматриваем эти уравнения как ОДУ с параметром x .

Третье, шестое и девятое уравнение – уравнения со смешанными производными. Эти уравнения будем рассматривать как ОДУ с параметром, но не относительно искомой функции, а относительно одной из производных. Так на примере третьего урав-

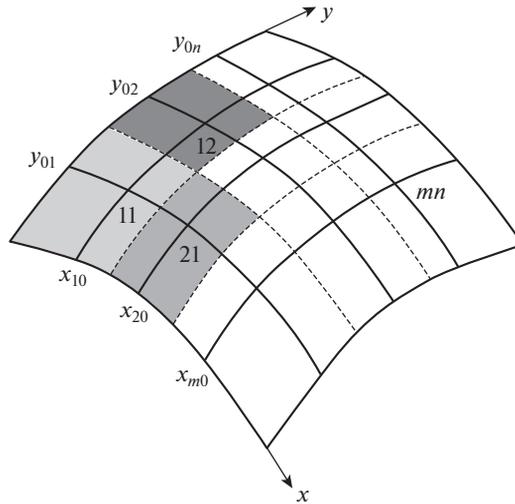


Рис. 2. Поверхностная нагрузка.

нения $\frac{1 + \mu}{2} \frac{\partial^2 v_1^{(3)}}{\partial x \partial y} = f_1^{(3)}(x, y)$ записано как $\frac{\partial \left[\frac{\partial v_1^{(3)}}{\partial y} \right]}{\partial x} = \frac{2}{1 + \mu} f_1^{(3)}(x, y)$. Оно будет решено относительно $\frac{\partial v_1^{(3)}}{\partial y}$. В свою очередь $v_1^{(3)}$ определять из этого уравнения не будем, зная лишь величины $\frac{\partial v_1^{(3)}}{\partial y}$ достаточно для предлагаемого удовлетворения уравнениям связи.

Разобьем сторону оболочки вдоль оси Ox на $m + 1$ интервалов точками $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}$, а сторону оболочки вдоль оси Oy на $n + 1$ интервалов точками $y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}$ (рис. 1). Эти точки для значений параметров указанных выше ОДУ.

Далее нанесем сетку меридианов и параллелей через выбранные точки. Вдоль каждого меридиана и параллели теперь можно записать ОДУ с дифференцированием по x или по y соответственно. Меридианы и параллели пересекаются в точках. В точках пересечения меридианов и параллелей будем выполнять уравнения связи (1.3), в точках контура оболочки – краевые условия.

Для каждой точки (на контуре и на пересечении меридианов и параллелей) запишем по столбцу, содержащему перемещения и производные от них:

$$\mathbf{w}_{xij} = \left\| \begin{matrix} u_{3ij}^{(1)} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x} & v_{2ij}^{(1)} \frac{\partial v_2^{(1)}}{\partial x} & \frac{\partial v_1^{(3)}}{\partial y} & w_{3ij}^{(1)} \frac{\partial w_3^{(1)}}{\partial x} & \frac{\partial^2 w_3^{(1)}}{\partial x^2} & \frac{\partial^3 w_3^{(1)}}{\partial x^3} & \frac{\partial^2 w_3^{(3)}}{\partial y^2} & \frac{\partial^3 w_3^{(3)}}{\partial y^2 \partial x} \end{matrix} \right\|^T \quad (1.4)$$

$$\mathbf{w}_{yij} = \left\| \begin{matrix} u_{1ij}^{(1)} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial y} & \frac{\partial u_2^{(3)}}{\partial x} & v_{2ij}^{(2)} \frac{\partial v_2^{(2)}}{\partial y} & w_{3ij}^{(2)} \frac{\partial w_3^{(2)}}{\partial y} & \frac{\partial^2 w_3^{(2)}}{\partial y^2} & \frac{\partial^3 w_3^{(2)}}{\partial y^3} \end{matrix} \right\|^T \quad (1.5)$$

Комбинированием производных, входящих в столбцы (1.4) и (1.5), по известным формулам могут быть вычислены силовые факторы, характеризующие состояние сечения оболочки: нормальные, обобщенные сдвиговые силы, изгибающие моменты, обобщенные перерезывающие силы.

Неизвестные функции $f_1^{(1)}(x, y) \dots f_3^{(3)}(x, y)$ аппроксимируем кусочно-постоянными. Для этого другими меридианами и параллелями разбиваем оболочку на области (рис. 2) таким образом, чтобы каждая из точек (например, 11, 12, 21, ..., mn) попадала внутрь одной из областей. Принимаем значения неизвестных функций $f_1^{(1)}(x, y) \dots f_3^{(3)}(x, y)$ постоянными и равными их значениям в точках 11, 12, 21, ..., mn . Для каждой из точек 11, 12, 21, ..., mn запишем столбец значений неизвестных функций:

$$\mathbf{f}_{ij} = \left\| f_{ij}^{(1)} \quad f_{ij}^{(2)} \quad f_{ij}^{(3)} \quad f_{2ij}^{(1)} \quad f_{2ij}^{(2)} \quad f_{2ij}^{(3)} \quad f_{3ij}^{(1)} \quad f_{3ij}^{(2)} \quad f_{3ij}^{(3)} \right\|^T \quad (1.6)$$

Вдоль каждого меридиана и параллели запишем соответствующие дифференциальные уравнения системы (1.2) в матричной форме:

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u_3^{(1)} \\ \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x_1} \\ v_2^{(1)} \\ \frac{\partial v_2^{(1)}}{\partial x} \\ \frac{\partial v_1^{(3)}}{\partial y} \\ w_3^{(1)} \\ \frac{\partial w_3^{(1)}}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 w_3^{(1)}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^3 w_3^{(1)}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial^2 w_3^{(3)}}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^3 w_3^{(3)}}{\partial y^2 \partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{x27} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{x92} & 0 & 0 & 0 & a_{x96} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_3^{(1)} \\ \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x} \\ v_2^{(1)} \\ \frac{\partial v_2^{(1)}}{\partial x} \\ \frac{\partial v_1^{(3)}}{\partial y} \\ w_3^{(1)} \\ \frac{\partial w_3^{(1)}}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 w_3^{(1)}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^3 w_3^{(1)}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial^2 w_3^{(3)}}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^3 w_3^{(3)}}{\partial y^2 \partial x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{x44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{x53} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1^{(1)} \\ f_1^{(2)} \\ f_1^{(3)} \\ f_2^{(1)} \\ f_2^{(2)} \\ f_2^{(3)} \\ f_3^{(1)} \\ f_3^{(2)} \\ f_3^{(3)} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

где: $a_{x27} = -\left(\frac{1}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}\right)$, $a_{x92} = -\frac{12}{h^2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}\right)$, $a_{x96} = -\frac{12}{h^2}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2\mu}{r_1 r_2}\right)$, $c_{x44} = \frac{2}{1-\mu}$, $c_{x53} =$
 $= \frac{2}{1+\mu}$

В краткой форме:

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{w}_x = A_x \mathbf{w}_x + C_{fx} \mathbf{f} \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial y} \\ \frac{\partial u_2^{(3)}}{\partial x} \\ v_2^{(2)} \\ \frac{\partial v_2^{(2)}}{\partial y} \\ W_3^{(2)} \\ \frac{\partial w_3^{(2)}}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_3^{(2)}}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^3 w_3^{(2)}}{\partial y^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{y57} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{y95} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial y} \\ \frac{\partial u_2^{(3)}}{\partial x} \\ v_2^{(2)} \\ \frac{\partial v_2^{(2)}}{\partial y} \\ W_3^{(2)} \\ \frac{\partial w_3^{(2)}}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_3^{(2)}}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^3 w_3^{(2)}}{\partial y^3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{y22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{y36} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1^{(1)} \\ f_1^{(2)} \\ f_1^{(3)} \\ f_2^{(1)} \\ f_2^{(2)} \\ f_2^{(3)} \\ f_3^{(1)} \\ f_3^{(2)} \\ f_3^{(3)} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

где: $a_{y57} = -\left(\frac{1}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}\right)$, $a_{y95} = -\frac{12}{h^2}\left(\frac{1}{r_2} + \frac{\mu}{r_1}\right)$, $c_{y22} = \frac{2}{1-\mu}$, $c_{y36} = \frac{2}{1+\mu}$

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathbf{w}_y = A_y \mathbf{w}_y + C_{fy} \mathbf{f} \quad (1.10)$$

Для каждой из точек 11, 12, 21, ..., mn запишем в матричной форме уравнения связи:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{1ij}^{(1)} \\ f_{1ij}^{(2)} \\ f_{1ij}^{(3)} \\ f_{2ij}^{(1)} \\ f_{2ij}^{(2)} \\ f_{2ij}^{(3)} \\ f_{3ij}^{(1)} \\ f_{3ij}^{(2)} \\ f_{3ij}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \overline{B} \\ q_2 \\ \overline{B} \\ q_3 \\ \overline{B} \\ D \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

$$\begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 u_{3ij}^{(1)} \\
 \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_{ij}} \\
 v_{2ij}^{(1)} \\
 \frac{\partial v_2^{(1)}}{\partial x_{ij}} \\
 \frac{\partial v_1^{(3)}}{\partial y_{ij}} \\
 w_{3ij}^{(1)} \\
 \frac{\partial w_3^{(1)}}{\partial x_{ij}} \\
 \frac{\partial^2 w_3^{(1)}}{\partial x^2_{ij}} \\
 \frac{\partial^3 w_3^{(1)}}{\partial x^3_{ij}} \\
 \frac{\partial^2 w_3^{(3)}}{\partial y^2_{ij}} \\
 \frac{\partial^3 w_3^{(3)}}{\partial y^2 \partial x_{ij}}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 u_{1ij}^{(1)} \\
 \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial y_{ij}} \\
 \frac{\partial u_2^{(3)}}{\partial x_{ij}} \\
 v_{2ij}^{(2)} \\
 \frac{\partial v_2^{(2)}}{\partial y_{ij}} \\
 w_{3ij}^{(2)} \\
 \frac{\partial w_3^{(2)}}{\partial y_{ij}} \\
 \frac{\partial^2 w_3^{(2)}}{\partial y^2_{ij}} \\
 \frac{\partial^3 w_3^{(2)}}{\partial y^3_{ij}}
 \end{pmatrix}
 \tag{1.12}$$

Решения ОДУ (1.8), (1.10) определяются аналитически по формулам [9–11]. Вдоль меридиана $y = y_{0j}$ между любыми соседними точками i, j и $i, j - 1$:

$$\mathbf{w}_{xij} = \mathbf{K}_{i,j-1}^{ij} \mathbf{w}_{xi,j-1} + \mathbf{T}_{i,j-1} \mathbf{C}_{fx} \mathbf{f}_{i,j-1} \frac{\Delta x}{2} + \mathbf{T}_{ij} \mathbf{C}_{fx} \mathbf{f}_{ij} \frac{\Delta x}{2}
 \tag{1.13}$$

где: $\Delta x = x_{ij} - x_{i,j-1}$ – расстояние по меридиану между соседними точками, $\mathbf{K}_{i,j-1}^{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}_x \Delta x)^k}{k!}$ – матрица функций Коши–Крылова (решение однородного ОДУ),

$$\mathbf{T}_{i,j-1} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\mathbf{A}_x \frac{\Delta x}{2}\right)^l}{(l+1)!}$$

Вдоль параллели $x = x_{i0}$ между любыми соседними точками i, j и $i - 1, j$:

$$\mathbf{w}_{yij} = \mathbf{K}_{i-1,j}^{ij} \mathbf{w}_{yi-1,j} + \mathbf{T}_{i-1,j} \mathbf{C}_{fy} \mathbf{f}_{i-1,j} \frac{\Delta y}{2} + \mathbf{T}_{i-1,j} \mathbf{C}_{fy} \mathbf{f}_{i-1,j} \frac{\Delta y}{2}
 \tag{1.14}$$

Записав решения (1.13), (1.14) между всеми соседними точками в направлениях x и y и мы получим неопределенную систему алгебраических уравнений (СЛАУ). Чтобы полученную СЛАУ сделать определенной, необходимо дополнить ее краевыми условиями и уравнениями связи. Краевые условия устанавливаются следующим образом. Для каждой из точек на контуре $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}$ (рис. 1) записываются матричные уравнения вида

$$\mathbf{B}_x \mathbf{w}_{x0j} = \mathbf{v}_{x0j},
 \tag{1.15}$$

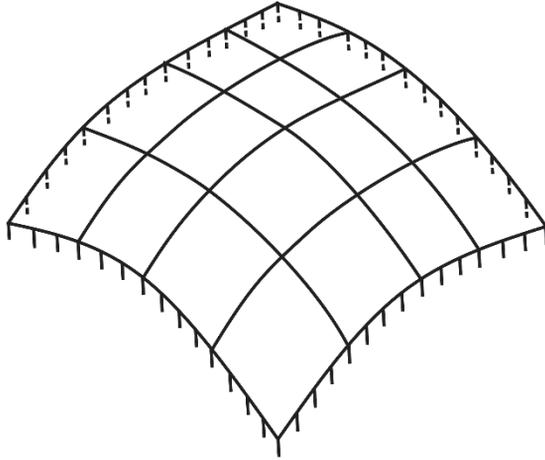


Рис. 3. Граничные условия.

где \mathbf{B}_x – прямоугольная матрица, выбирающая элементы столбца производных, \mathbf{w}_{x0j} – столбец производных (1.4), \mathbf{v}_{x0j} – столбец задаваемых значений выбранных производных.

Например, для постановки краевого условия защемления, уравнение (1.15) в развернутом виде запишется как:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial y} \\ \frac{\partial u_2^{(3)}}{\partial x} \\ v_2^{(2)} \\ \frac{\partial v_2^{(2)}}{\partial y} \\ w_3^{(2)} \\ \frac{\partial w_3^{(2)}}{\partial y} \\ \frac{\partial w_3^{(2)}}{\partial y^2} \\ \frac{\partial w_3^{(2)}}{\partial y^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

Для постановки других видов краевых условий следует изменять элементы матрицы \mathbf{B}_x . Если же на краю нужно задать не нулевое значение, а, например, приложить силу или изгибающий момент, то следует в столбце \mathbf{v}_{x0j} заменить 0 на необходимое значение. Краевые условия для точек $y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}$ ставятся аналогично.

Дополнив СЛАУ уравнениями связи (1.11), (1.12) для точек пересечения, мы тем получим определенную систему. Для задания поверхностных нагрузок следует использовать одно из уравнений уравнение связи – уравнение (1.11). Заданием в правой части

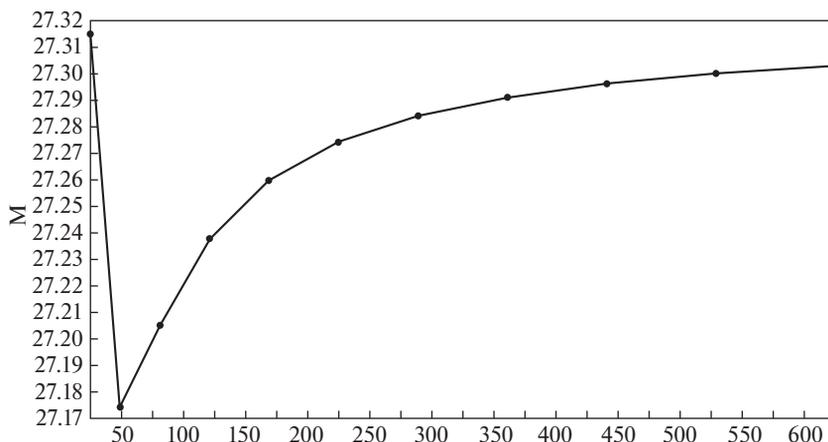


Рис. 4. Зависимость величины вычисленного изгибающего момента M в полюсе оболочки от плотности сетки.

уравнения (1.11) числовых значений величин q_1, q_2, q_3 будут нагружаться соответствующие области вокруг точек пересечения меридианов (рис. 2).

Решив определенную СЛАУ, получаем значения элементов столбцов (1.4), (1.5), а так же значения функций $f_1^{(1)}(x, y) \dots f_3^{(3)}(x, y)$. Решение носит приближенный характер. При сгущении сетки меридианов и параллелей, т.е. при увеличении числа точек выполнения уравнений связи и уменьшения областей осреднения функций $f_1^{(1)}(x, y) \dots f_3^{(3)}(x, y)$ решение стремится к аналитическому, то есть с контролируемой погрешностью.

2. Результаты вычислений. Решена краевая задача механики деформирования полой защемленной по краям оболочки, нагруженной внешним давлением. Расчетная

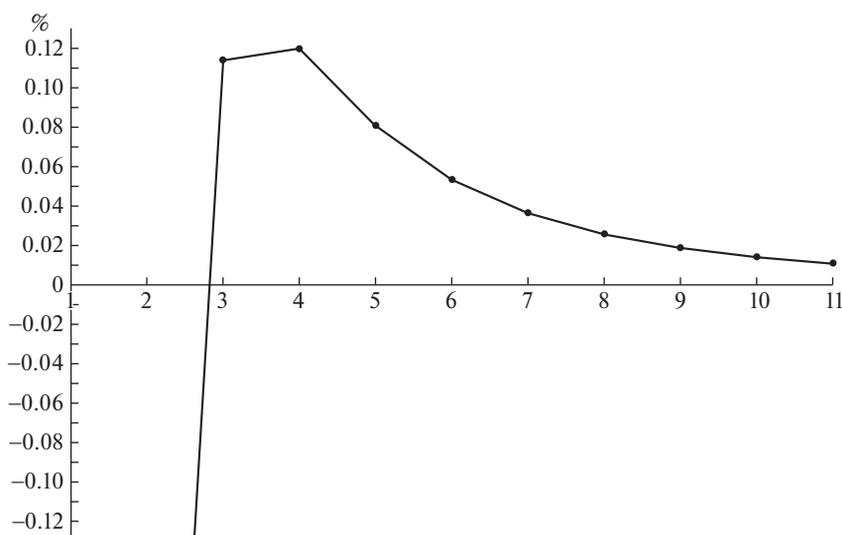


Рис. 5. Относительная разность в зависимости от номера итерации.

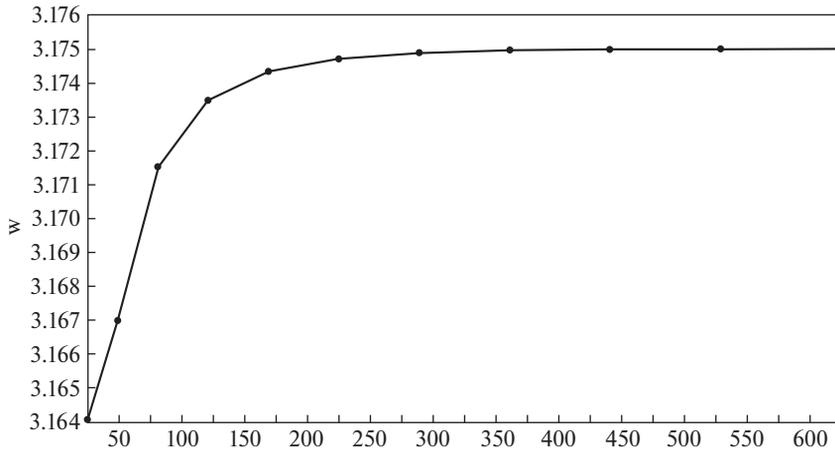


Рис. 6. Зависимость величины вычисленного прогиба w в полюсе оболочки от плотности сетки.

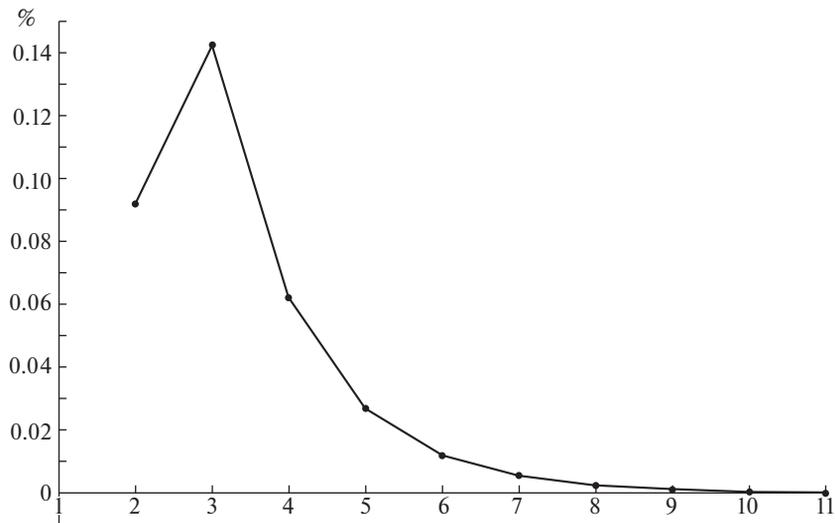


Рис. 7. Относительная разность в зависимости от номера итерации.

схема представлена на рис. 3. Вычислены перемещения – w – и изгибающие моменты – M – в полюсе пологой оболочки двойкой кривизны. Внешнее давление 10 МПа. Параметры оболочки: размеры в плане – 1×1 м, радиусы кривизны – 10 м, толщина – 5 мм. Материал панели – алюминий с характеристиками: модуль Юнга – 0.7×10^{11} Па, коэффициент Пуассона – 0.3. На оболочку накладывалась сетка меридианов и параллелей при разбиении сторон оболочки от 5×5 интервалов до 25×25 интервалов. Результаты представлены в таблице 1 и в виде графиков. Помимо величин прогибов и моментов (рис. 4, 6) для определения сходимости решения и определения погрешности вычислялась разность их значений полученных на двух соседних итерациях, отнесенная к величине вычисленного значения на данной итерации. В таблице 1 и на графиках (рис. 5, 7) эта величина названа “относительная разность”.

Выводы. Предложенный автором подход к решению задач механики деформирования элемента пологой оболочки и построенный алгоритм решения краевой задачи на

Таблица 1. Результаты расчетов

Номер итерации	1	2	3	4	5	6	7	9	10	11
Плотность сетки, меридианов \times параллелей	5×5	7×7	9×9	11×11	13×13	17×17	19×19	21×21	23×23	25×25
Прогиб, мм	3.16409	3.16700	3.17151	3.17349	3.17433	3.17471	3.17488	3.17496	3.17499	3.17500
Относительная разность, %	0.0919	0.1424	0.0621	0.0267	0.0119	0.0054	0.0025	0.0010	0.0003	0.0000
Изгибающий момент, Н	27.315	27.174	27.205	27.238	27.260	27.274	27.284	27.291	27.296	27.300
Относительная разность, %	-0.5187	0.1140	0.1196	0.0808	0.0534	0.0364	0.0257	0.0187	0.0140	0.0108

ЭВМ показывает быструю сходимость решения с контролем погрешности при увеличении плотности сетки декомпозиции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломакин Е.В., Юргенсон С.А., Федулов Б.Н., Федоренко А.Н. Механические характеристики подкрепленной и трехслойной оболочек на основе метаматериалов с учетом эксплуатационных повреждений // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 6. С. 45–54. <https://doi.org/10.31857/S0572329921060064>
2. Васильев В.В., Салов В.А. Устойчивость бесконечно длинной цилиндрической оболочки, нагруженной наружным давлением, создаваемым жесткой внешней средой // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 4. С. 98–108. <https://doi.org/10.31857/S0572329921040127>
3. Виноградов Ю.И. Анализ концентрации напряжений с контролируемой погрешностью в тонкостенных конструкциях (транспортно-пусковой стакан) // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 2. С. 110–123. <https://doi.org/10.31857/S0572329921020173>
4. Кириллова И.В., Коссович Л.Ю. Асимптотические методы исследования эллиптического погранслоя в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях нормального типа // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 5. С. 131–137. <https://doi.org/10.31857/S0572329920050104>
5. Образцов И.Ф. Строительная механика летательных аппаратов: Учебник для авиационных специальностей вузов. М.: Машиностроение, 1986. 536 с.
6. Власов В.З. Избранные труды. Том 1. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 528 с.
7. Крылов А.Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании. Л.: АН СССР, 1931. 154 с.
8. Пшеничников Г.И. Решение некоторых задач строительной механики методом декомпозиции // Строит. мех. и расчет сооруж. 1986. № 4. С. 12–17.
9. Крылов А.Н. Лекции о приближенных вычислениях. М.: Гос. издательство технико-теоретической литературы, 1954. 398 с.
10. Peano G. Integration par series des equations differentielles lineaires // Math. Ann. 1888. Bd. 32. S. 450–456.
11. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука. 1988. 548 с.
12. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука. 1976. 351 с.
13. Виноградов Ю.И. Методы решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. РАН. 2006. Т. 409. № 1. С. 15–18.
14. Виноградов Ю.И., Молчанов Д.Б. Основы модифицированного метода конечных элементов решения краевых задач строительной механики тонкостенных конструкций // ПММ. 2018. Т. 82. № 4. С. 498–510.
15. Vinogradov Y.I., Molchanov D.B., Bakulin V.N. Analytical matrix solutions of linear ordinary differential equations with constant coefficients // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1392. P. 012077. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1392/1/012077>