

УДК 539.3

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСШИРЕНИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ
ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОЦЕНКЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ ВНЕДРЕНИЮ
ТВЕРДОГО ТЕЛА В ГРУНТ**

© 2022 г. А. М. Брагов^{a,*}, В. В. Баландин^{a,**}, Л. А. Игумнов^{a,***},
В. Л. Котов^{a,****}, А. К. Ломунов^{a,*****}

^aНациональный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского, Н. Новгород, Россия

*e-mail: bragov@mech.unn.ru

**e-mail: balandin@mech.unn.ru

***e-mail: igumnov@mech.unn.ru

****e-mail: vkotov@mm.unn.ru

*****e-mail: lomunov@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 30.04.2021 г.

После доработки 07.10.2021 г.

Принята к публикации 13.10.2021 г.

Анализируются решения задачи о расширении с постоянной скоростью сферической полости в грунтовой среде: расширение полости происходит из точки в полупространстве, занимаемом упругопластической грунтовой средой. Приводится полученное ранее линейризованное аналитическое решение этой задачи, полученное в предположении несжимаемости среды за фронтом ударной волны. В результате сравнения с результатами численного решения задачи в полной постановке показано, что приближенное решение является хорошей аппроксимацией зависимости давления на границе полости от скорости ее расширения. Линейризованное решение применено для расчета силы сопротивления внедрению жесткой сферы при проникании в мягкий грунт, динамическая сжимаемость и сопротивление сдвигу которого характеризуется ударной адиабатой Гюгонио и критерием текучести Мора–Кулона–Треска. Результаты аналитических и численных расчетов сравниваются с известными экспериментальными данными, представленными в виде зависимости от скорости удара силы сопротивления внедрению сфер – ударников в водонасыщенный песок. Продемонстрировано хорошее соответствие теоретических и экспериментальных данных.

Ключевые слова: расширение полости, проникание, удар, сферический ударник, песок

DOI: 10.31857/S0572329922030047

1. Введение. Решения задачи о расширении сферической полости (ЗРСП) [1–5] активно применяются в механике геоматериалов [6–13]. Более общий подход, основанный на теории локального взаимодействия, развивается в работах [11–19]. Экспериментально-расчетный анализ проникания ударников с плоскими, коническими и полусферическими головными частями в грунт представлен в работах [6, 7, 12, 20–23]. Из работ за последние пять лет по решению ЗРСП в приложении к механике грунтов отметим [24–28]. В целом можно отметить [25, 26], что решение ЗРСП и его применение для расчета контактных и интегральных параметров в задачах удара и проникания достаточно развито. Учет реальных свойств материалов – нелинейной сжимаемости,

зависимости предела текучести от давления и/или скорости деформаций, возможное разрушение — затрудняющих получение аналитического решения, легко осуществляется при численном решении задачи [27, 28].

Спецификой деформирования мягкого грунта является необходимость учитывать распространение как непрерывных упругопластических, так и ударных волн (УВ). Наличие сферических УВ в песчаном и глинистом грунтах, а также зависимость скорости УВ от давления на ее фронте показаны экспериментально [29–32]. Следует отметить, что существующие решения задачи о расширении полости также должны предусматривать возможность формирования УВ, распространяющейся по невозмущенному пространству.

В настоящей статье приводится постановка и решение ЗРСП применительно к определению силы сопротивления внедрению жесткого ударника в песчаный грунт. Деформационные и сдвиговые свойства грунта задаются ударной адиабатой и критерием текучести Мора—Кулона с ограничением на максимальную величину предела текучести Треска (далее — критерий Мора—Кулона—Треска). Численно получено обобщенное решение, предполагающее наличие упругого участка при дозвуковых скоростях распространения упругопластического интерфейса и формирование единой пластической УВ при сверхзвуковых скоростях. В предположении несжимаемости среды за фронтом УВ получено аналитическое решение задачи. Это решение аналогично полученному ранее жесткопластическому решению [2] задачи о расширении цилиндрической полости, где показано, что применение жесткопластического решения теоретически приводит к завышению сопротивления прониканию. Однако следует заметить, что сам подход, основанный на использовании решения задачи о расширении полости в динамике удара, является приближенным; предпочтение тому или иному решению задачи следует отдать по результатам сравнения с экспериментальными данными. В сравнении с экспериментальными и расчетными данными нами продемонстрировано, что модель проникания жесткого тела в грунт с использованием простой линеаризованной аналитической жесткопластической модели [26] обладает областью применимости, сравнимой с моделями на основе численного решения ЗРСП.

2. Решение ЗРСП в упругопластической грунтовой среде. Рассматривается одномерная задача о расширении сферической полости из точки в безграничной грунтовой среде. Упругопластические свойства грунтовой среды определяются соотношениями:

$$\sigma_r = f_1(\theta), \quad \sigma_r - \sigma_\theta = f_2(\theta) \quad (2.1)$$

где σ_r и σ_θ — компоненты тензора напряжений Коши, $\theta = 1 - \rho_0/\rho$ — относительное изменение объема, ρ_0 и ρ — начальная и текущая плотность, f_1 и f_2 — заданные функции.

В работах [25, 26] приводится постановка краевой задачи для системы двух ОДУ первого порядка в результате решения которой определяются безразмерные напряжение и скорость в области пластического течения грунтовой среды

$$U' + 2\frac{U}{\xi} = 0, \quad S' + 2\frac{\tilde{f}_2}{\xi} = (\xi - U)U', \quad \varepsilon < \xi < 1 \quad (2.2)$$

$$U(\xi = \varepsilon) = \varepsilon, \quad U(\xi = 1) = \theta_s \quad (2.3)$$

$$S(\xi = 1) = U - U^2 = \theta_s - \theta_s^2 \quad (2.4)$$

где введены обозначения: $U = v/c$, $S = \sigma_r/\rho_s c^2$ — безразмерные скорость и напряжение, v — размерная скорость, $\varepsilon = V/c$ — безразмерная координата (граница полости), V — скорость расширения полости, величины ρ_s и θ_s соответствуют плотности и объемной деформации на УВ, распространяющейся со скоростью c , $\xi = r/ct$ — безразмерная координата, штрихом обозначено дифференцирование по ξ , $\tilde{f}_2 = f_2/(\rho_s c^2)$.

Принимаемое допущение о сохранении плотностью ее значения на УВ, равного ρ_s , можно иначе назвать гипотезой о несжимаемости среды за фронтом УВ.

Ударная адиабата Гюгоньо грунтовых сред с достаточной для практических расчетов точностью [32, 33] может быть представлена линейным соотношением:

$$U_s = C_0 + su_p \quad (2.5)$$

где U_s и u_p – скорость плоской УВ и скорость частиц за фронтом УВ, C_0 и s – константы материала.

Далее при решении ЗРСП принимается [26]

$$U_s \equiv c \quad (2.6)$$

Для определения ε получено приближение

$$\varepsilon \approx 3M/(1 + 3M\sqrt[3]{s}) \quad (2.7)$$

Используя обозначение $\varepsilon = V/c$, из (2.7) следует

$$c \approx \sqrt[3]{s}V + C_0/3 \quad (2.8)$$

В работе [26] получено решение ЗРСП для критерия пластичности среды Мора–Кулона

$$f_2 \equiv \tau_0 + \kappa p,$$

где τ_0 , κ – константы, $p = (\sigma_r + 2\sigma_\theta)/3$, в этом случае напряжение имеет вид

$$S(\xi) = -\frac{T_0}{\mu} - 2\frac{\varepsilon^3}{(2\mu-1)\xi} + \frac{\varepsilon^6}{(\mu-2)\xi^4} + \left(\frac{T_0}{\mu} + 2\frac{\varepsilon^3}{(2\mu-1)} - \frac{\varepsilon^6}{(\mu-2)} + \varepsilon^3 - \varepsilon^6\right)\xi^{-2\mu} \quad (2.9)$$

При выводе (2.9) использовалось равенство $\kappa p = \mu\sigma_r$, где $\mu = \kappa/(1 + 2\kappa/3)$, справедливое в условиях одноосной деформации.

Из (2.9) могут быть получены формулы для определения напряжения в зависимости от ξ :

$$\sigma_r(\xi) = \tau_0 \left(\frac{\xi^{-2\mu} - 1}{\mu} \right) + \frac{\rho_0 V^2 \varepsilon}{1 - \varepsilon^3} \left(\frac{2}{(2\mu-1)} \left(\frac{\xi^{-2\mu+1} - 1}{\xi} \right) + \frac{\varepsilon^3}{(\mu-2)} \left(\frac{1 - \xi^{-2\mu+4}}{\xi^4} \right) + (1 - \varepsilon^3)\xi^{-2\mu} \right) \quad (2.10)$$

и формула для напряжения при $\xi = \varepsilon$ (напряжение на границе полости)

$$S = \frac{\varepsilon^{-2\mu} - 1}{\mu} T_0 + \frac{3}{(2\mu-1)(\mu-2)} \varepsilon^2 + \left(1 - \varepsilon^3 + \frac{2}{(2\mu-1)} - \frac{\varepsilon^3}{(\mu-2)} \right) \varepsilon^{3-2\mu}$$

Далее

$$\sigma_c \equiv \sigma_r(\xi = \varepsilon) = \tau_0 \left(\frac{\varepsilon^{-2\mu} - 1}{\mu} \right) + \frac{\rho_0 V^2}{1 - \varepsilon^3} \left(\frac{3}{(\mu-2)(2\mu-1)} + \frac{2\mu+1}{2\mu-1} \cdot \varepsilon^{1-2\mu} - \frac{\mu-1}{\mu-2} \cdot \varepsilon^{4-2\mu} \right) \quad (2.11)$$

$$\sigma_r(\xi = \varepsilon) = -2\tau_0 \ln \varepsilon + \frac{\rho_0 V^2}{1 - \varepsilon^3} (3/2 - \varepsilon - \varepsilon^4/2), \quad \mu = 0 \quad (2.12)$$

$$\sigma_r(\xi = \varepsilon) = 2\tau_0(\varepsilon^{-1} - 1) + \frac{\rho_0 V^2}{1 - \varepsilon^3} (1/3 - 2 \ln \varepsilon - \varepsilon^3/3), \quad \mu = 0.5 \quad (2.13)$$

В уравнениях (2.10)–(2.13) величина ε определяется по линеаризованной формуле (2.7).

В работе [25] реализован алгоритм получения численного решения ЗРСП при учете образования УВ с высокой точностью. В данной работе это решение будет применяться для анализа применимости приближенного аналитического решения.

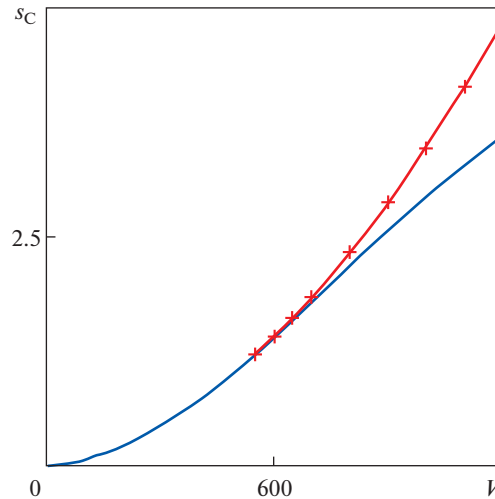


Рис. 1. Напряжение на границе полости в зависимости от скорости расширения: упругопластическое решение при $V \leq V_s$ (сплошная линия) и решение с выделением возникающей единой пластической ударной волны, распространяющейся по невозмущенной среде (сплошная линия с крестом) при $V > V_s$.

В работе [26] получено обобщение линеаризованного жесткопластического решения для среды с критерием Мора–Кулона–Треска. Аналогичный подход применялся ранее в работе [2] при решении задачи о расширении цилиндрической полости.

3. Анализ применимости жесткопластического линеаризованного решения. Приводятся результаты сравнительных расчетов, в которых динамическая сжимаемость среды характеризуется соотношением (2.5), сопротивление среды сдвигу задается линейной зависимостью Мора–Кулона. В расчетах варьируется скорость расширения полости.

Решение задачи в пластической области непрерывно при переходе в упругую область. В случае превышения значением скорости пластической волны величины скорости распространения упругой волны, формируется пластическая УВ, которая распространяется по невозмущенному пространству. Далее, в качестве иллюстрации рассматривается вариант задания параметров уравнения состояния среды с известной зависимостью напряжения от объемной деформации (ударной адиабатой) и условием пластичности Мора–Кулона, которые сведены в таблицу 1.

Кривые на рис. 1 соответствуют численным результатам решения задачи (2.2)–(2.4) с использованием классического метода Рунге–Кутты. Далее это решение называем точным.

Обнаружено, что формирование УВ происходит при скорости расширения полости $V = V_s$ (отмечено пунктиром), $V_s = 550$ м/с. В окрестности этого значения кривые решения имеют касание второго порядка.

На рис. 2 скорость представлена в логарифмической шкале, пунктиром отмечено значение безразмерной скорости расширения полости $M_s \equiv V_s/C_0$, при котором происходит образование единой пластической ударной волны ($M_s = 0.34$).

Точное решение на рис. 2 демонстрирует ограниченность параметра ε при стремлении скорости расширения полости к бесконечности ($\varepsilon < 0.663$) и к нулю ($\varepsilon > 0.023$). Приближенное решение по формуле (2.7) ограничено сверху ($\varepsilon < 1/\sqrt[3]{s}$). Ограниченным также остается величина размерного напряжения 1.13 МПа на границе полости

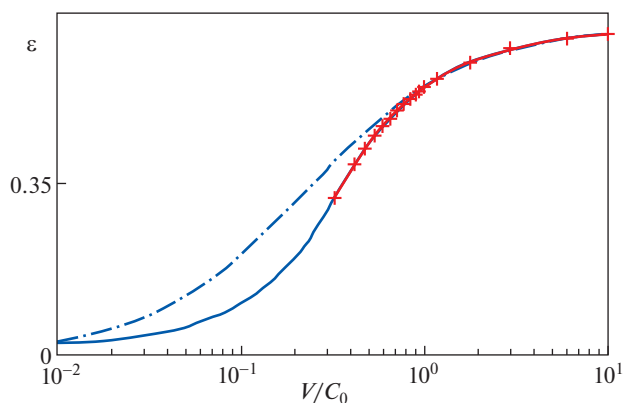


Рис. 2. Безразмерная зависимость ε от скорости (логарифмический масштаб): точное обобщенное решение, включающее упругопластический интерфейс (сплошная синяя линия) при $M \leq M_s$ и образование пластической ударной волны (сплошная красная линия с крестом) при $M > M_s$, жесткопластическое линейризованное решение (2.7) (штрихпунктирная линия).

при около нулевых скоростях. Величина ε , полученная по приближенной формуле (2.7), стремится к точному значению лишь при $M > 0.4$.

Отметим, что из решения задачи без учета возникновения пластической УВ следует ограниченность скорости упругопластического интерфейса при высоких скоростях расширения полости (сплошная линия на рис. 3). Продолжение решения с выделением единой пластической УВ (сплошная линия с крестом на рис. 3) более отвечает физической картине распространения волн.

Приближенные решения на рис. 4 получены по формулам (2.7), (2.11) соответственно. Отметим хорошее соответствие приближенного линейризованного решения и точного решения в полной постановке в достаточно широком диапазоне скоростей расширения полости вплоть до $M = 0.1$. Как и точное решение, безразмерное линейризованное решение имеет нелинейный характер при $M < 0.4$, а при $M > 0.4$ может быть представлено линейной зависимостью.

Хорошее соответствие приближенного линейризованного и точного решений может быть объяснено, если рассмотреть распределения напряжений в среде в зависимости от безразмерной координаты.

Как видно на рис. 5, значения напряжений, полученные с применением формул (2.7), (2.10), достаточно близки к точному значению только в окрестности полости. Формальное продолжение решения в область $M < 0.4$ приводит к погрешности в определении напряжения на границе полости в 16%. С ростом скорости расширения полости погрешности в определении напряжений с использованием формул (2.10), (2.11) существенно уменьшаются.

Таким образом, из представленных данных сравнительных численных и аналитических расчетов следует, что соотношение (2.7) и формулы (2.11) можно использовать для аппроксимации напряжения на контактной поверхности ударников, проникающих в грунтовые среды.

4. Определение сопротивления внедрению жесткой сферы в песок. Как известно, уравнение состояния мягкого грунта включает в себя ударную адиабату, условие пластичности, а также модули упругости K и G начального участка кривой деформирования. Представление ударной адиабаты в виде линейного соотношения вида (2.5) позволяет

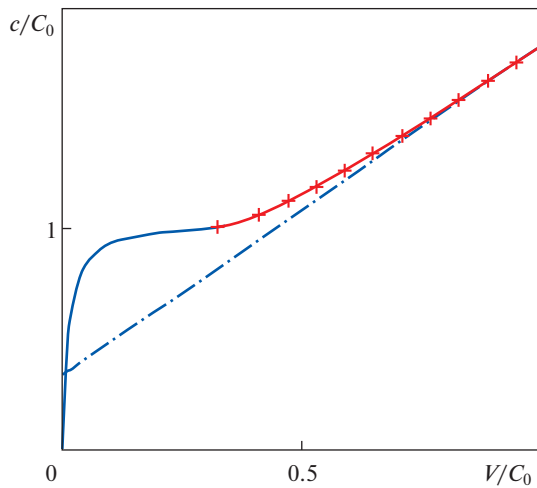


Рис. 3. Нормализованные зависимости $c(V)$ (обозначения кривых как на рис. 2).

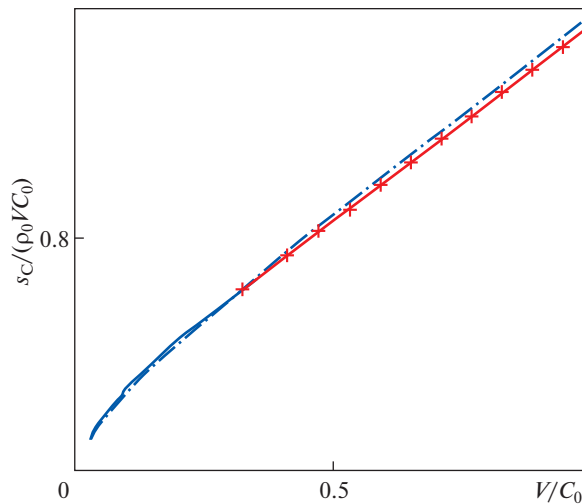


Рис. 4. Нормализованные напряжения на границе полости в зависимости от скорости расширения (обозначения кривых как на рис. 2).

определить связь напряжения σ_r и объемной деформации θ в условиях одноосной деформации:

$$f_1(\theta) \equiv \rho_0 C_0^2 \theta (1 - s\theta)^{-2} \quad (4.1)$$

Сопротивление среды сдвигу определяется зависимостью предела текучести от давления

$$f_2(p) \equiv \sigma_0 + kp / [1 + kp / (\sigma_1 - \sigma_0)] \quad (4.2)$$

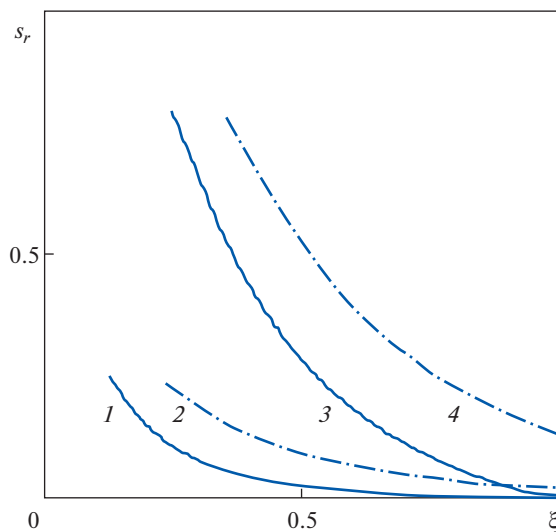


Рис. 5. Распределение напряжений в среде при безразмерных скоростях расширения полости $M = 0.125$ (кривые 1, 2) и 0.25 (кривые 3, 4): сплошная (1, 3) и штрихпунктирная (3, 4) линии соответствуют точному обобщенному и линеаризованному жесткопластическому решениям.

где σ_0 , σ_1 и k постоянные коэффициенты.

Функция $f_3(\theta)$ “давление – объемная деформация” принимается в виде (4.1)

$$p = f_1(\theta) \equiv \rho_0 a^2 \theta (1 - b\theta)^{-2} \quad (4.3)$$

неизвестные параметры a и b в которой определяются методом наименьших квадратов.

В таблице 2 приводятся значения параметров модели водонасыщенного песка [23].

Кривая нелинейного критерия текучести (4.2) аппроксимируется билинейной зависимостью закона Мора–Кулона с ограничением Треска (таблица 3)

$$f_2 \equiv \begin{cases} \tau_0 + kp = \tau_0 + \mu\sigma_r, & 0 < \sigma_r \leq \sigma_M \\ \tau_M, & \sigma_r > \sigma_M \end{cases} \quad (4.4)$$

Параметры упругого участка диаграммы деформирования и ударной адиабаты водонасыщенного песка представлены ранее в таблице 1.

Зависимости напряжений от координаты при условии текучести Мора–Кулона–Треска [26] (сплошная линия) и Мора–Кулона (штриховая линия), полученные по формуле (2.9), изображены на рис. 6, скорость расширения полости составила 250 м/с.

На рис. 7 сплошная линия соответствует результатам [26], штриховая линия, штрихпунктирная линия и штриховая линия с квадратом – результатам, полученным с применением уравнений (2.12), (2.13) и уравнения (2.13) при $\tau_0 = \tau_M$. Можно отметить, что при малых скоростях справедливо более простое решение (2.12), а при высо-

Таблица 1. Параметры уравнения состояния среды

ρ_0 , кг/м ³	K , МПа	G , МПа	c_e , м/с	C_0 , м/с	s	σ_0 , МПа	k	μ
2080	4570	1147	1713	1700	3.4	0.021	0.5	0.375

Таблица 2. Параметры уравнения состояния грунта [18]

$w, \%$	$\rho_0, \text{кг/м}^3$	$C_0, \text{м/с}$	s	$a, \text{м/с}$	b	$\sigma_0, \text{МПа}$	k	$\sigma_1, \text{МПа}$
20	2080	1700	3.4	1620	3.6	0.1	0.5	50

Таблица 3. Параметры условия пластичности Мора–Кулона–Треска (4.4)

$\tau_0, \text{МПа}$	k	μ	$\tau_M, \text{МПа}$	$\sigma_M, \text{МПа}$
0.021	0.3	0.25	25	1000

ких скоростях расширения полости – решение (2.13), по сравнению с более трудоемким общим решением ЗРСП с критерием Мора–Кулона–Треска [26].

Сила, действующая на сферический ударник при его проникании в грунт с постоянной скоростью, может быть представлена в виде

$$F = 2S \int_0^{\varphi} (\sigma_n \cos \varphi + \sigma_\tau \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi \quad (4.5)$$

где $S = \pi R^2$ – площадь миделя поперечного сечения сферы, σ_n и σ_τ – нормальное и касательное контактные напряжения, угол φ отсчитывается от вершины сферы в направлении свободной поверхности.

В соответствии с моделью расширения полости, нормальное контактное напряжение определяется давлением на стенку расширяющейся сферической полости, которое может быть представлено в виде квадратичной зависимости

$$\sigma_n / \rho_0 = a_2 u^2 + b_1 u \quad (4.6)$$

где $u = -U_0 z$ – нормальная компонента вектора скорости внедрения, a_2, b_1 – постоянные коэффициенты.

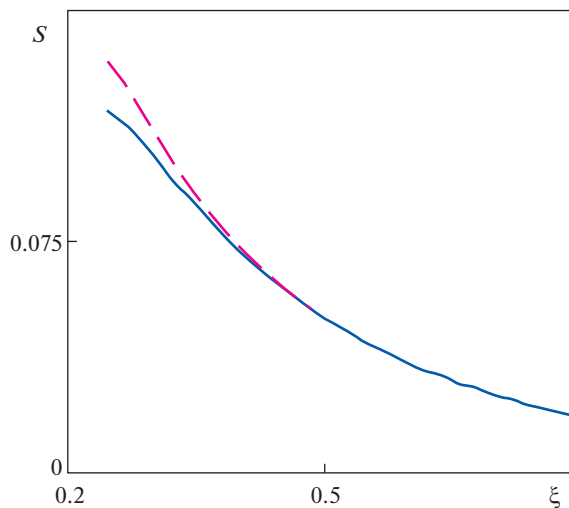


Рис. 6. Безразмерные зависимости напряжений, полученные при использовании критерия Мора–Кулона–Треска [21] и Мора–Кулона (сплошная и штриховая линии соответственно).

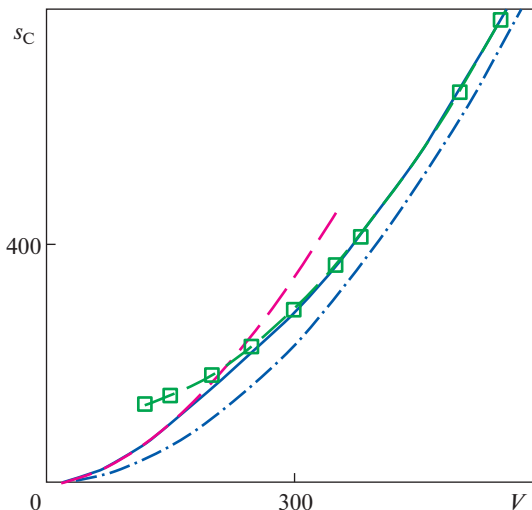


Рис. 7. Зависимости напряжений на границе полости от скорости, полученные [21] (сплошная линия) и с применением уравнений (2.12), (2.13) и (2.13) при $\tau_0 = \tau_M$ штриховая линия, штрихпунктирная линии и штриховая линия с квадратом соответственно.

Касательные напряжения определяются законом Кулона с постоянным коэффициентом k_f

$$\sigma_\tau = k_f \sigma_n \quad (4.7)$$

Зависимость силы сопротивления внедрению сферического ударника от скорости удара имеет вид

$$F = AU_0^2 + BU_0, \quad A = a_2(A_1 + k_f A_2)\rho_0 S, \quad B = b_1(B_1 + k_f B_2)\rho_0 S$$

$$A_1 = \frac{(1 - \cos^4 \varphi)}{2}, \quad A_2 = \frac{(\varphi - 2 \sin \varphi \cos^3 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi)}{4}, \quad (4.8)$$

$$B_1 = \frac{2(1 - \cos^3 \varphi)}{3}, \quad B_2 = \frac{2 \sin^3 \varphi}{3}$$

Угол отрыва потока принимался равным $\varphi = \pi/3$, коэффициент трения для водонасыщенного песка принимался вдвое меньшим, чем для сухого песка [34] $k_f = 0.2$.

На рис. 8 отметим хорошее соответствие результатов аппроксимации и экспериментальных данных без введения подгоночных коэффициентов.

Для водонасыщенного песка применение условия Мора–Кулона–Треска необходимо, так как при малых скоростях удара (до 200 м/с) существенную роль играет внутреннее трение, при более высоких скоростях сказывается ограниченность предела текучести в рамках критерия Треска.

Рассмотрим проникание ударников с высокими скоростями, когда сопротивлением сдвигу грунтовой среды можно пренебречь. Нормальное давление на поверхности, двигающейся со скоростью U_0 , будет выражаться уравнением (2.13) без первого слагаемого: $\sigma_r = \rho_0 U_0^2 (3/2 - \varepsilon - \varepsilon^4/2)/(1 - \varepsilon^3)$. Примем для напряжения на контактной поверхности форму записи $\sigma_r = \frac{1}{2} C_D \rho_0 U_0^2$, где C_D – коэффициент сопротивления. Тогда,

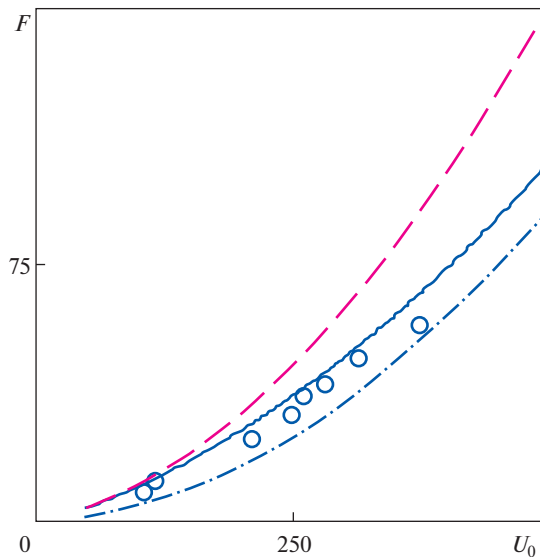


Рис. 8. Силы сопротивления прониканию сферы в водонасыщенный песок в зависимости от скорости удара: обращенный эксперимент [18] (светлые точки) и аппроксимация на основе решения ЗРСП (обозначения кривых как на рис. 7).

положив величину $\varepsilon = 1/\sqrt[3]{s}$ (оценка сверху), получим оценку коэффициента C_D в зависимости от параметра ударной адиабаты s : $C_D = \left(3 - \left(2 + \frac{1}{s}\right)/\sqrt[3]{s}\right) / \left(1 - \frac{1}{s}\right)$. При изменении s в диапазоне $1 < s < 4$ коэффициент сопротивления меняется в диапазоне $2 < C_D < 2.1$.

5. Заключение. Применительно к задаче проникания в мягкие грунты жесткой сферы получено автомодельное аналитическое решение одномерной ЗРСП из точки в бесконечной грунтовой среде. Решение получено для модели грунта как упругопластической среды с критерием текучести Мора–Кулона–Треска при учете нелинейной сжимаемости в соответствии с известной ударной адиабатой. Численно показано, что при решении задачи о расширении полости в мягком грунте необходимо учитывать формирование пластической УВ, распространяющейся по невозмущенному пространству грунта. Проведенный параметрический анализ линеаризованного жесткопластического решения показал, что оно является хорошей аппроксимацией зависимости давления на границе полости от скорости ее расширения применительно к широкому классу мягких грунтовых сред. Получены расчетные оценочные зависимости максимального значения силы сопротивления внедрению жесткой сферы в водонасыщенный песок при скоростях удара от 50 до 400 м/с. Сравнение аналитически и экспериментальных результатов определения сил сопротивления прониканию, показало их качественное и количественное хорошее соответствие. В этой связи при решении задач проникания в мягкие грунты может с успехом применяться простое аналитическое решение.

Благодарности. Авторы выражают признательность В.В. Баландину и Е.Ю. Линник за помощь в подготовке отдельных материалов статьи. Пункты 1–3 статьи подготовлены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

ской Федерации (проект 0729-2020-0054), пункт 4 статьи подготовлен при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 21-19-00283).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Forrestal M.J., Norwood F.R., Longcope D.B.* Penetration into targets described by locked hydrostats and shear strength // *Int. J. Solids Struct.* 1981. V. 17. № 9. P. 915–924.
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(81\)90106-2](https://doi.org/10.1016/0020-7683(81)90106-2)
2. *Forrestal M.J., Longcope D.B.* Closed-form solution for forces on conical-nosed penetrators into geological targets with constant shear strength // *Mech. Materi.* 1982. V. 1. № 4. P. 285–295.
[https://doi.org/10.1016/0167-6636\(82\)90028-X](https://doi.org/10.1016/0167-6636(82)90028-X)
3. *Forrestal M.J., Luk V.K.* Penetration into soil targets // *Int. J. Impact Eng.* 1992. V. 12. № 3. P. 427–444.
[https://doi.org/10.1016/0734-743X\(92\)90167-R](https://doi.org/10.1016/0734-743X(92)90167-R)
4. *Masri R., Durban D.* Cylindrical cavity expansion in compressible Mises and Tresca solids // *Eur. J. Mech. A/Solids.* 2007. V. 26. № 4. P. 712–727.
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2006.12.003>
5. *Rosenberg Z., Dekel E.* Analytical solution of the spherical cavity expansion process // *Int. J. Impact Eng.* 2009. V. 36. № 2. P. 193–198.
<https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2007.12.014>
6. *Бивин Ю.К., Викторов В.В., Коваленко Ю.Я.* Определение динамических характеристик грунтов методом пенетрации // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1980. № 3. С. 105–110.
7. *Бивин Ю.К., Симонов И.В.* Оценки глубин проникания жестких тел в грунтовые среды при сверхзвуковых скоростях входа // *Докл. РАН.* 1993. Т. 328. № 4. С. 447–450.
8. *Бивин Ю.К.* Внедрение твердых тел в бетон // *Известия РАН. МТТ.* 2018. № 1. С. 57–63.
9. *Cheng Ya., Yang H.-W., Sun D.* Cavity expansion in unsaturated soils of finite radial extent // *Comput. Geotech.* 2018. V. 102. P. 216–228.
<https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2018.06.013>
10. *Su D., Yang Z.X.* Drained analyses of cylindrical cavity expansion in sand incorporating a bounding-surface model with state-dependent dilatancy // *Appl. Math. Modell.* 2019. V. 68. P. 1–20.
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.11.017>
11. *Shi C., Wang M., Zhang K., Cheng Yi., Zhang X.* Semi-analytical model for rigid and erosive long rods penetration into sand with consideration of compressibility // *Int. J. Impact Eng.* 2015. V. 83. P. 1–10.
<https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2015.04.007>
12. *Велданов В.А., Марков В.А., Пусев В.И. и др.* Расчет проникания недеформируемых ударников в малопрочные преграды с использованием данных пьезоакселерометрии // *ЖТФ.* 2011. Т. 81. № 7. С. 94–104.
13. *Баженев В.Г., Баландин В.В., Григорян С.С., Котов В.Л.* Анализ моделей расчета движения тел вращения минимального сопротивления в грунтовых средах // *ПММ* 2014. Т. 78. Вып. 1. С. 98–115.
14. *Остапенко Н.А., Якунина Г.Е.* О телах наименьшего сопротивления,двигающихся в средах при наличии закона локальности // *Изв. РАН. МЖГ.* 1992. № 1. С. 95–106.
15. *Остапенко Н.А.* Тела вращения минимального сопротивления при движении в плотных средах // *Усп. мех.* 2002. № 2. С. 105–149.
16. *Якунина Г.Е.* Особенности высокоскоростного движения тел в плотных средах // *ПММ* 2012. Т. 76. Вып. 3. С. 429–449.
17. *Ven-Dor G., Dubinsky A., Elperin T.* *Applied High-Speed Plate Penetration Dynamics. Pt. 1.* The Netherlands: Springer, 2006. 370 p.
18. *Баничук Н.В., Иванова С.Ю.* Оптимизация: контактные задачи и высокоскоростное проникание. М.: Физматлит, 2016. 176 с.
19. *Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Остапенко К.Ю.* О пробивании слоистых структур твердым сферическим телом // *Изв. РАН. МТТ.* 2021. № 2. С. 63–71.
<https://doi.org/10.31857/S0572329921020033>

20. Sun Q., Sun Yu., Liu Yi., Li R., Zhao Ya. Numerical analysis of the trajectory stability and penetration ability of different lateral-abnormal projectiles for non-normal penetration into soil based on Modified Integrated Force Law method // *Int. J. Impact Eng.* 2017. V. 103. P. 159–168.
<https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2017.01.010>
21. Balandin V.I., Balandin V.I., Bragov A.M., Kotov V.L. Experimental Study of the Dynamics of Penetration of a Solid Body into a Soil Medium // *Tech. Phys.* 2016. V. 61. № 6. P. 860–868.
<https://doi.org/10.1134/S1063784216060037>
22. Котов В.Л., Баландин В.В., Брагов А.М., Баландин В.В. Исследование динамических свойств водонасыщенного песка по результатам обращенных экспериментов // *ЖТФ.* 2018. Т. 88. № 4. С. 545–554.
<https://doi.org/10.21883/PJTF.2017.17.44948.16530>
23. Bragov A.M., Balandin V.V., Igumnov L.A., Kotov V.L., Krushka L., Lomunov A.K. Impact and penetration of cylindrical bodies into dry and water-saturated sand // *Int. J. Impact Eng.* 2018. V. 122. P. 197–208.
<https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2018.08.012>
24. Антуков В.Н., Хасанов А.Р. Расширение цилиндрической полости в сжимаемой упругопластической среде // *Вестн. ПНИПУ. Механика.* 2017. № 1. С. 5–23.
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.1.01>
25. Котов В.Л. Аппроксимация напряжений в окрестности полости, расширяющейся с постоянной скоростью в среде с условием пластичности Мора–Кулона // *Пробл. проч. пласт.* 2019. Т. 81. № 2. С. 177–190.
<https://doi.org/10.32326/1814-9146-2019-81-2-177-190>
26. Котов В.Л., Тимофеев Д.Б. Решение задачи о расширении сферической полости в среде с условием пластичности Мора–Кулона–Треска // *Пробл. проч. пласт.* 2019. Т. 81. № 3. С. 292–304.
<https://doi.org/10.32326/1814-9146-2019-81-3-292-304>
27. Линник Е.Ю. Оценка контактных напряжений при внедрении ударника в прочный грунт // *Пробл. прочн. пласт.* 2020. Т. 82. № 1. С. 52–63.
<https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-1-52-63>
28. Котов В.Л., Брагов А.М., Баландин В.В., Константинов А.Ю., Баландин В.В. Двусторонние оценки силы сопротивления прониканию конуса в мерзлый грунт // *ПМТФ.* 2021. Т. 62. № 1. С. 125–133.
<https://doi.org/10.15372/PMTF20210114>
29. Ляхов Г.М. Ударные волны в грунте и разжижение водонасыщенного песка // *ПМТФ.* 1961. Т. 2. № 1. С. 38–46.
30. Ляхов Г.М., Нарожная З.В. Экспериментальные исследования взрывных волн в глинистом грунте // *ПМТФ.* 1961. Т. 2. № 2. С. 123–126.
31. Рыков Г.В. Экспериментальное исследование поля напряжений при взрыве в песчаном грунте // *ПМТФ.* 1964. Т. 5. № 1. С. 85–89.
32. Лагунов В.А., Степанов В.А. Измерение динамической сжимаемости песка при высоких давлениях // *ПМТФ.* 1963. Т. 4. № 1. С. 88–96.
33. Arlery M., Gardou M., Fleureau J.M., Mariotti C. Dynamic behaviour of dry and water-saturated sand under planar shock conditions // *Int. J. Impact Eng.* 2010. V. 37. № 1. P. 1–10.
<https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2009.07.009>
34. Bazhenov V.G., Kotov V.L., Kochetkov A.V., Krylov S.V., Feldgun V.R. On wave processes in soil subjected to a surface charge explosion // *Mech. Solids.* 2001. V. 36. № 2. P. 62–68.