

УДК 539.3

КОМПЛЕКСНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АЛЕКСАНДРОВИЧА РЕШЕНИЙ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ В ТРЕХМЕРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

© 2022 г. Д. В. Георгиевский^{a,b,c,*}, Н. С. Стеценко^{a,c,**}

^a Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

^b Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

^c Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

*e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

**e-mail: stetsenkonina@mail.ru

Поступила в редакцию 13.05.2021 г.

После доработки 18.05.2021 г.

Принята к публикации 24.05.2021 г.

Обсуждаются аналитические возможности предложенного в 70-е годы XX века в работах А.И. Александровича представления решения в перемещениях в трехмерной теории упругости в виде двумерной комплексной структуры. Комплекснозначные перемещения ищутся в форме голоморфного разложения как ряды по степеням комплексных переменных с антиголоморфными коэффициентами и по степеням сопряженных комплексных переменных с голоморфными коэффициентами. Все голоморфные и антиголоморфные функции выражаются через четыре произвольные голоморфные функции. В качестве тестовых частных случаев, приводящих к известным в теории упругости классическим решениям, рассматриваются плоское деформированное состояние, антиплоская деформация, трехмерное деформированное состояние в тонкой пластинке переменной толщины, осесимметричные поля перемещений, реализующиеся, в частности, при линейной комбинации внутреннего (внешнего) давления, $(r\theta)$ -кручения и осевого (rz) -сдвига в цилиндрическом слое и при (θz) -кручении сплошного цилиндра. В терминах комплекснозначных перемещений выписывается система уравнений осесимметричной теории упругости, фундаментальное решение которой является общим представлением поля перемещений в осесимметричном случае аналогично формулам Колосова–Мусхелишвили в плоской задаче.

Ключевые слова: трехмерная теория упругости, квазистатика, представление Александровича, комплексное перемещение, гармоническая функция, аналитическая функция, осесимметричное поле

DOI: 10.31857/S0572329922020106

Введение. Исторически аппарат теории функции комплексного переменного (ТФКП) начал привлекаться в механике сплошной среды прежде всего в плоских задачах теории упругости и при описании плоских течений идеальной несжимаемой жидкости [1, 2]. Вызвано это тем, что в соответствующих теориях естественно возникают гармонические функции двух переменных x_1 и x_2 , имеющие вполне определенный физический смысл (в каждом из упомянутых случаев свой). Данным функциям можно дать интерпретацию как действительным частям некоторых аналитических комплекснозначных функций переменного $z = x_1 + ix_2$. При этом мнимые части восстанавливаются с помощью условий Коши–Римана.

Методы ТФКП успешно применялись и в некоторых пространственных задачах теории упругости. В [3] описаны подходы, обобщены методы, реализованные в плоских задачах, и собраны результаты применительно к осесимметричным задачам теории упругости изотропной среды. В [4] в задаче о напряженно-деформированном состоянии в тонкой пластинке переменной толщины в трехмерной постановке дополнительно к двум классическим комплексным потенциалам Колосова–Мусхелишвили введен третий. Эта же методика применяется в анализе задачи Кирша в трехмерной постановке [5] и при наличии массовых сил [6].

Обратим здесь особое внимание на оригинальном подходе к системам уравнений трехмерной теории упругости в перемещениях в общем виде, связанном с работами [7, 8] Александра Ивановича Александровича (1947–2013). В них предложен метод решения, основанный на рассмотрении трехмерного тела в виде сечения четырехмерной области координатной гиперплоскостью. Это позволило записать уравнения равновесия Ламе в форме четырех дифференциальных уравнений. Добавление к этим уравнениям условия независимости искомого функций от четвертой координаты привело к расщеплению системы на три уравнения трехмерной теории упругости и уравнение Лапласа для четвертой компоненты. Четырехмерность дала возможность ввести в пространстве координат и смещений двумерную комплексную структуру. Комплекснозначные смещения ищутся в форме голоморфного разложения, т.е. в виде рядов по степеням комплексных переменных с антиголоморфными коэффициентами и по степеням сопряженных комплексных переменных с голоморфными коэффициентами. Показано, что все голоморфные и антиголоморфные функции выражаются через четыре произвольные голоморфные функции. Использование разложений в ряды или интегральных представлений этих функций позволило ставить и решать различные краевые задачи. В [9–12] метод развит на динамические, термоупругие и нелинейно-упругие (модель Синьорини) задачи, голоморфные разложения в которых имеют свои математические особенности.

Целью публикуемой работы является возродить интерес специалистов к комплексному представлению Александровича и возможностям анализа, которые оно дает, в частности, в осесимметричных задачах теории упругости.

1. Выражение перемещений через две комплекснозначные гармонические функции двух переменных. Согласно идеям работ [7, 8] решения в перемещениях $u_k(x_1, x_2, x_3)$ квазистатической системы уравнений Ламе

$$u_{l,kl} + (1 - 2\nu)u_{k,ll} = 0, \quad -1 < \nu < 1/2 \quad (1.1)$$

для трехмерной сжимаемой упругой среды в отсутствии массовых сил являются составной частью, или специальным классом решений $u_p(x_1, x_2, x_3, x_4)$ системы четырех уравнений

$$u_{q,qp} + (1 - 2\nu)u_{p,qq} = 0 \quad (1.2)$$

дополненной требованиями

$$u_{p,4} = 0, \quad u_{4,kk} = 0 \quad (1.3)$$

По умолчанию здесь и далее индексы k и l меняются от 1 до 3, а индексы p и q от 1 до 4; по повторяющимся индексам производится суммирование.

Равенства (1.2) формально можно интерпретировать как квазистатическую систему уравнений Ламе для четырехмерной упругой среды с тем же, что и в (1.1), коэффициентом Пуассона ν . Условия (1.3) говорят, что в сечении любой гиперплоскостью $x_4 = x_4^0$ картина распределения перемещений $u_p(x_1, x_2, x_3, x_4^0) \equiv u_p(x_1, x_2, x_3)$ будет одной и той же. Не останавливаясь на физическом смысле вспомогательной гармонической функции

$u_4(x_1, x_2, x_3)$, заметим, что тройка функций $u_k(x_1, x_2, x_3)$, удовлетворяющая (1.1), имеет смысл искомым перемещений в трехмерном пространстве.

Введем две комплексные переменные z_1 и z_2 и два зависящих от $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2$ комплексных перемещения W_1 и W_2 :

$$z_1 = x_1 + ix_2, \quad z_2 = x_3 + ix_4; \quad W_1 = u_1 + iu_2, \quad W_2 = u_3 + iu_4 \quad (1.4)$$

Из независимости (1.3) перемещений от координаты x_4 сразу следует, что

$$W_{1;2} = W_{1;\bar{2}}, \quad W_{2;2} = W_{2;\bar{2}} \quad (1.5)$$

т.е. обе функции W_1 и W_2 зависят от суммы $z_2 + \bar{z}_2$. Здесь и далее точка с запятой в индексе означает частное дифференцирование по $z_1, \bar{z}_1, z_2$ либо $\bar{z}_2$, например $W_{1;1\bar{2}} \equiv \partial^2 W_1 / \partial z_1 \partial \bar{z}_2$.

С учетом (1.5) компоненты ϵ_{kl} тензора малых деформаций и дилатация $\theta = \epsilon_{kk}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{1}{2}(W_{1;1} + W_{1;\bar{1}} + \bar{W}_{1;1} + \bar{W}_{1;\bar{1}}) \\ \epsilon_{22} &= \frac{1}{2}(W_{1;1} - W_{1;\bar{1}} - \bar{W}_{1;1} + \bar{W}_{1;\bar{1}}) \\ \epsilon_{33} &= W_{2;2} + \bar{W}_{2;\bar{2}}, \quad \epsilon_{12} = \frac{i}{2}(\bar{W}_{1;1} - W_{1;\bar{1}}) \\ \epsilon_{13} &= \frac{1}{2}(W_{1;2} + \bar{W}_{1;2}) + \frac{1}{4}(W_{2;1} + W_{2;\bar{1}} + \bar{W}_{2;1} + \bar{W}_{2;\bar{1}}) \\ \epsilon_{23} &= \frac{i}{2}(-W_{1;2} + \bar{W}_{1;2}) + \frac{i}{4}(W_{2;1} - W_{2;\bar{1}} + \bar{W}_{2;1} - \bar{W}_{2;\bar{1}}) \\ \theta &= W_{1;1} + \bar{W}_{1;\bar{1}} + W_{2;2} + \bar{W}_{2;\bar{2}} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Компоненты тензора напряжений находятся на основании закона Гука, куда надо подставить соотношения (1.6).

Запишем в терминах функций W_1 и W_2 (1.4) четыре уравнения равновесия (1.2):

$$\begin{aligned} (3 - 4\nu)W_{1;1\bar{1}} + \bar{W}_{1;1\bar{1}} + 2(1 - 2\nu)W_{1;2\bar{2}} + W_{2;\bar{1}2} + \bar{W}_{2;\bar{1}2} &= 0 \\ (3 - 4\nu)W_{2;2\bar{2}} + \bar{W}_{2;2\bar{2}} + 2(1 - 2\nu)W_{2;1\bar{1}} + W_{1;1\bar{2}} + \bar{W}_{1;1\bar{2}} &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Введем также функции

$$\alpha = \frac{1}{2(1 - 2\nu)}[(3 - 4\nu)(W_{1;1} + W_{2;2}) + \bar{W}_{1;\bar{1}} + \bar{W}_{2;\bar{2}}], \quad \beta = W_{2;\bar{1}} - W_{1;\bar{2}} \quad (1.8)$$

такие, что два уравнения (1.7) и два условия (1.5) можно представить в виде

$$\alpha_{;\bar{1}} - \beta_{;2} = 0, \quad \alpha_{;\bar{2}} + \beta_{;1} = 0 \quad (1.9)$$

$$\alpha_{;2} = \alpha_{;\bar{2}}, \quad \beta_{;2} = \beta_{;\bar{2}} \quad (1.10)$$

Из (1.9) следует, что каждая из функций α и β удовлетворяет уравнениям с одним и тем же оператором:

$$\alpha_{;1\bar{1}} + \alpha_{;2\bar{2}} = 0, \quad \beta_{;1\bar{1}} + \beta_{;2\bar{2}} = 0 \quad (1.11)$$

Для действительных и мнимых частей функций α и β ($\alpha = \alpha_* + i\alpha_{**}$, $\beta = \beta_* + i\beta_{**}$) равенства (1.11) означают, что

$$\alpha_{*,pp} = \alpha_{**,pp} = 0, \quad \beta_{*,pp} = \beta_{**,pp} = 0 \quad (1.12)$$

т.е. функции α_* , α_{**} , β_* и β_{**} гармонические по своим четырем переменным x_p , а α и β — комплекснозначные гармонические функции по z_1 и z_2 .

В [7, 8] α и β выражаются через одну голоморфную функцию $\varphi_0(z_1, z_2)$ в виде степенных рядов по z_1 и z_2 с коэффициентами, содержащими частные производные от φ_0 по z_2 и оператор, обратный частному дифференцированию по z_1 . Соотношения (1.8) рассматриваются как уравнения относительно W_1 и W_2 с известными α и β (точнее говоря, выраженными через φ_0). В результате общее решение в комплексных перемещениях W_1 и W_2 представляется зависящим от двух произвольных аналитических функций $\varphi_0(z_1, z_2)$ и $\psi_0(z_1, z_2)$. При этом отмечается, что классические краевые задачи теории упругости определяют пару функций φ_0 и ψ_0 неоднозначно, так что имеется класс пар голоморфных функций, дающих одно и то же решение выбранной задачи.

Остановимся далее на вопросе соответствия некоторых специальных классов решений трехмерной теории упругости и введенных комплекснозначных функций W_1 , W_2 , α , β .

2. Плоское деформированное состояние и антиплоская деформация. Пусть

$$W_1 = W_1(z_1, \bar{z}_1), \quad W_2 = W_2(z_1, \bar{z}_1) \quad (2.1)$$

Тогда согласно (1.8)

$$\alpha = \frac{1}{2(1-2\nu)}[(3-4\nu)W_{1;1} + \overline{W_{1;\bar{1}}}], \quad \beta = W_{2;\bar{1}} \quad (2.2)$$

Соотношения (1.10) выполняются тождественно, а система (1.9) распадается на два несвязанные уравнения

$$\alpha_{;\bar{1}} = 0, \quad \beta_{;1} = 0 \quad (2.3)$$

Общее решение системы (2.2), (2.3) следующее:

$$W_1(z_1, \bar{z}_1) = (3-4\nu)\varphi_1(z_1) - \overline{z_1\varphi_1'(z_1)} - \overline{\psi_1(z_1)} \quad (2.4)$$

$$W_2(z_1, \bar{z}_1) = \varphi_2(z_1) + \overline{\psi_2(z_1)} \quad (2.5)$$

$$\alpha = 4(1-\nu)\varphi_1'(z_1), \quad \beta = \overline{\psi_2'(z_1)} \quad (2.6)$$

где φ_1 , ψ_1 , φ_2 и ψ_2 — произвольные аналитические функции z_1 .

Видно, что соотношение (2.4) с точностью до коэффициента 2μ совпадает с формулой Колосова—Мусхелишвили для комплексного перемещения в плоском деформированном состоянии (в плоскости (x_1, x_2)). Решение (2.5) описывает антиплоскую деформацию также в плоскости (x_1, x_2) . Таким образом, рассматриваемый случай (2.1) — суперпозиция плоского и антиплоского деформированных состояний. Первое из них реализуется, когда $\varphi_2 = \psi_2 \equiv 0$, а второе, когда $\varphi_1 = \psi_1 \equiv 0$.

3. Деформированное состояние в тонкой пластинке переменной толщины. Рассмотрим зависимости

$$W_1 = W_1(z_1, \bar{z}_1), \quad W_2 = (z_2 + \bar{z}_2)G(z_1, \bar{z}_1) \quad (3.1)$$

автоматически удовлетворяющие (1.5) и соответствующие полю действительных перемещений $u_1 = u_1(x_1, x_2)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2)$, $u_3 = x_3 g(x_1, x_2)$. Такое поле реализуется при напряженно-деформированном состоянии в тонкой пластинке переменной толщины, рассматриваемой в трехмерной постановке [4].

Из (3.1) и (3.2) имеем

$$\frac{1}{2(1-2\nu)}[(3-4\nu)(W_{1;l} + G) + \overline{W}_{1;l} + \overline{G}], \quad \beta = (z_2 + \bar{z}_2)G_{;\bar{l}} \quad (3.2)$$

Уравнения равновесия (1.9) запишутся следующим образом

$$[(3-4\nu)W_{1;l} + \overline{W}_{1;l} + G + \overline{G}]_{;l} = 0, \quad G_{;l\bar{l}} = 0 \quad (3.3)$$

Общее решение системы (3.3)

$$W_1(z_1, \bar{z}_1) = (3-4\nu)\phi_3(z_1) - z_1\phi_3'(z_1) - \overline{\psi_3(z_1)} - \frac{1}{4(1-\nu)}\left(\bar{z}_1\phi_4'(z_1) + \frac{z_1^2}{2}\overline{\phi_4''(z_1)} + \psi_4(z_1) + z_1\psi_4'(z_1)\right) \quad (3.4)$$

$$G(z_1, \bar{z}_1) = \bar{z}_1\phi_4''(z_1) + \psi_4'(z_1) \quad (3.5)$$

включает четыре произвольные аналитические функции ϕ_3 , ψ_3 , ϕ_4 и ψ_4 от z_1 . В частном случае $\phi_4 = \psi_4 \equiv 0$, $G \equiv 0$, означающем отказ от трехмерного рассмотрения напряженно-деформированного состояния, придем к совпадению выражений (3.4) и (2.4), т.е. к формуле Колосова–Мусхелишвили для плоской деформации. Отметим, что в работах [4–6], в частности, в задаче Кирша в комплексной постановке используются три комплексных потенциала.

4. Осесимметричные поля перемещений. Исходя из представления (1.4) нетрудно получить выражения через W_1 и W_2 для компонент u_r , u_θ и u_z вектора перемещений в цилиндрических координатах

$$\begin{aligned} u_r &= u_1 \frac{x_1}{r} + u_2 \frac{x_2}{r} = \frac{1}{4|z_1|}[(z_1 + \bar{z}_1)(W_1 + \overline{W}_1) - (z_1 - \bar{z}_1)(W_1 - \overline{W}_1)] = \\ &= \frac{1}{2|z_1|}(z_1\overline{W}_1 + \bar{z}_1W_1) = \frac{(\bar{z}_1W_1)_*}{|z_1|} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} u_\theta &= -u_1 \frac{x_2}{r} + u_2 \frac{x_1}{r} = \frac{i}{4|z_1|}[(z_1 - \bar{z}_1)(W_1 + \overline{W}_1) - (z_1 + \bar{z}_1)(W_1 - \overline{W}_1)] = \\ &= \frac{i}{2|z_1|}(z_1\overline{W}_1 - \bar{z}_1W_1) = \frac{(\bar{z}_1W_1)_{**}}{|z_1|} \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$u_z = u_3 = \frac{1}{2}(W_2 + \overline{W}_2), \quad (4.3)$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\theta = \arctg(x_2/x_1)$, $z = x_3$.

Осесимметричность поля перемещений, или независимость u_r , u_θ и u_z от угла θ , означает, что функции $\bar{z}_1W_1$ и W_2 зависят от $|z_1|$, z_2 и $\bar{z}_2$, а фактически в силу (1.3) от действительных переменных $|z_1|$ и $z_2 + \bar{z}_2$. Следовательно,

$$W_1 = z_1F_1(|z_1|, z_2, \bar{z}_2), \quad W_2 = F_2(|z_1|, z_2, \bar{z}_2) \quad (4.4)$$

Так как, например,

$$F_{1;l} = \frac{\bar{z}_1}{2|z_1|} \frac{\partial F_1}{\partial |z_1|} \equiv \frac{\bar{z}_1}{2|z_1|} F_{1;||}, \quad F_{1;\bar{l}} = \frac{z_1}{2|z_1|} \frac{\partial F_1}{\partial |z_1|} \equiv \frac{z_1}{2|z_1|} F_{1;||} \quad (4.5)$$

то имеем следующие выражения для α и β :

$$\alpha = \frac{1}{2(1-2\nu)} \left[(3-4\nu) \left(F_1 + \frac{|z_1|}{2} F_{1;|1|} + F_{2;2} \right) + \bar{F}_1 + \frac{|z_1|}{2} \bar{F}_{1;|1|} + \bar{F}_{2;2} \right] \beta =$$

$$= z_1 \left(\frac{F_{2;|1|}}{2|z_1|} - F_{1;\bar{2}} \right) \quad (4.6)$$

Видно, что α зависит только от $|z_1|$, z_2 и $\bar{z}_2$, а β есть произведение z_1 на некоторую функцию от $|z_1|$, z_2 и $\bar{z}_2$.

Уравнения равновесия (1.9) после подстановки в них выражений (4.6) выглядят следующим образом:

$$\frac{3-4\nu}{2} (3F_{1;|1|} + |z_1|F_{1;|1||1|}) + \frac{1}{2} (3\bar{F}_{1;|1|} + |z_1|\bar{F}_{1;|1||1|}) + 4(1-2\nu)|z_1|F_{1;2\bar{2}} + F_{2;|1|2} + \bar{F}_{2;|1|\bar{2}} = 0$$

$$F_{1;\bar{2}} + \frac{|z_1|}{2} F_{1;|1|\bar{2}} + \bar{F}_{1;\bar{2}} + \frac{|z_1|}{2} \bar{F}_{1;|1|\bar{2}} + (3-4\nu)F_{2;2\bar{2}} + \bar{F}_{2;2\bar{2}} +$$

$$+ \frac{1-2\nu}{2} \left(\frac{F_{2;|1|}}{|z_1|} + F_{2;|1||1|} \right) = 0 \quad (4.7)$$

Представляет несомненный теоретический интерес нахождение общего решения системы (4.7), имеющей довольно громоздкий и несимметричный вид. Приведем ниже несколько частных случаев, приводящих как к известным в осесимметричной теории упругости, так и новым классам решений в перемещениях.

5. Поле перемещений, зависящее только от r . Случай зависимости всех компонент u_r , u_θ и u_z перемещений только от радиуса r соответствует тому, что функции W_1 и W_2 , а следовательно, и F_1 и F_2 в (4.4) зависят только от $|z_1|$. Система (4.7) значительно упрощается и становится не связанной относительно F_1 и F_2 :

$$3F_{1;|1|} + |z_1|F_{1;|1||1|} = 0, \quad F_{2;|1|} + |z_1|F_{2;|1||1|} = 0 \quad (5.1)$$

Общее решение

$$F_1(|z_1|) = c_1 + \frac{c_2}{|z_1|^2}, \quad F_2(|z_1|) = c_3 + c_4 \ln |z_1| \quad (5.2)$$

включает четыре произвольные комплекснозначные константы c_1 , c_2 , c_3 и c_4 . По функциям W_1 и W_2 (4.4)

$$W_1(|z_1|) = z_1 \left(c_1 + \frac{c_2}{|z_1|^2} \right), \quad W_2(|z_1|) = c_3 + c_4 \ln |z_1| \quad (5.3)$$

согласно определениям (1.4) и формулам (4.1) восстанавливается классическое одномерное поле перемещений:

$$u_r = c_{1*}r + \frac{c_{2*}}{r}, \quad u_\theta = c_{1**}r + \frac{c_{2**}}{r}, \quad u_z = c_{3*} + c_{4*} \ln r \quad (5.4)$$

которое соответствует линейной комбинации внутреннего (внешнего) давления, $(r\theta)$ -кручения и осевого (rz) -сдвига в цилиндрическом слое. Видно, что равенство нулю компоненты u_θ эквивалентно тому, что F_1 — вещественнозначная функция, а равенство нулю компоненты u_r — тому, что значения F_1 лежат на мнимой оси.

Сюда же надо отнести случай осевого растяжения—сжатия сплошного цилиндра: $u_r = u_r(r)$, $u_\theta \equiv 0$, $u_z = u_z(z)$, в котором

$$F_1 = F_1(|z_1|), \quad \bar{F}_1 = \bar{F}_1, \quad F_2 = F_2(z_2, \bar{z}_2), \quad \beta = 0 \quad (5.5)$$

Система уравнений равновесия сводится к требованиям $\alpha_{,\bar{1}} = 0$, $\alpha_{,\bar{2}} = 0$. Ее общее решение

$$F_1(|z_1|) = c_5 + \frac{c_6}{|z_1|^2}, \quad F_2(z_2, \bar{z}_2) = c_7 + c_8(z_2 + \bar{z}_2) \quad (5.6)$$

включает две вещественные константы c_5 , c_6 и две комплекснозначные c_7 , c_8 . Функции W_1 и W_2 (4.4) имеют вид

$$W_1(|z_1|) = z_1 \left(c_5 + \frac{c_6}{|z_1|^2} \right), \quad W_2(z_2, \bar{z}_2) = c_7 + c_8(z_2 + \bar{z}_2), \quad (5.7)$$

а компоненты $u_r(r)$ и $u_z(z)$ следующие

$$u_r = c_5 r, \quad u_z = c_{7*} + 2c_{8*} z, \quad (5.8)$$

где из соображений ограниченности u_r при $r \rightarrow 0$ положено $c_6 = 0$.

6. (θz) -кручение сплошного цилиндра. Полю перемещений с компонентами $u_r = u_z \equiv 0$, $u_\theta = u_\theta(r, z)$ в задаче о (θz) -кручении сплошного цилиндра соответствуют функции

$$F_1 = F_1(|z_1|, z_2, \bar{z}_2), \quad \bar{F}_1 = -F_1, \quad F_2 \equiv 0 \quad (6.1)$$

Второе уравнение (4.7) удовлетворяется тождественно, а из первого следует, что

$$|z_1| F_{1,|1||} + 3F_{1,|1|} + 4|z_1| F_{1,2\bar{2}} = 0 \quad (6.2)$$

Разделение переменных в уравнении (6.2)

$$F_1(|z_1|, z_2, \bar{z}_2) = Z_1(|z_1|) Z_2(z_2 + \bar{z}_2) \quad (6.3)$$

приводит к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$|z_1| Z_{1,|1||} + 3Z_{1,|1|} + 4C|z_1| Z_1 = 0, \quad \frac{d^2 Z_2}{d(z_2 + \bar{z}_2)^2} - C Z_2 = 0 \quad (6.4)$$

с произвольной вещественнозначной константой C . Случай $C = 0$, очевидно, приводит к линейной зависимости u_θ от r и z , т.е. к классическому решению $u_\theta = \tau r z$ с постоянной круткой τ . Как следует из (6.4), при $C \neq 0$ существуют, во всяком случае формально, и другие решения с экспоненциальными и тригонометрическими зависимостями u_θ от z . Физический смысл этих решений неочевиден и подлежит анализу.

Работа выполнена по теме государственного задания ИПМех РАН (№ госрегистрации АААА-А20-120011690136-2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 416 с.
3. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости. Применение методов теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1979. 464 с.
4. Шарафутдинов Г.З. Применение функций комплексного переменного к некоторым пространственным задачам теории упругости // ПММ. 2000. Т. 64. Вып 4. С. 659–669.
5. Шарафутдинов Г.З. Решение задачи Кирша в трехмерной постановке // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2001. № 6. С. 20–25.
6. Шарафутдинов Г.З. Функции комплексного переменного в задачах теории упругости при наличии массовых сил // ПММ. 2009. Т. 73. Вып 1. С. 69–87.

-
7. *Александрович А.И.* Применение теории функций двух комплексных переменных к теории упругости // Докл. АН СССР. 1977. Т. 232. № 3. С. 542–544.
 8. *Александрович А.И.* Применение теории функций двух комплексных переменных к решению пространственных задач теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 2. С. 164–168.
 9. *Александрович А.И.* Исследование уравнений динамических задач теории упругости с помощью голоморфного разложения // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 1. С. 78–82.
 10. *Александрович А.И., Родионов А.Ю.* Исследование анизотропных и термоупругих задач методами комплексного анализа // Вопросы механики твердого и деформируемого тела. М.: Наука, 1987. С. 74–84.
 11. *Александрович А.И., Кувшинов П.А., Титоренко Д.Ф.* Решение уравнений трехмерной теории упругости методом голоморфного разложения комплексных перемещений по степенным функциям и функциям Бесселя // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 2. С. 31–41.
 12. *Александрович А.И., Шеина А.А.* Решение плоских граничных задач нелинейной теории упругости модели Синьорини с помощью теории функций комплексных переменных // Матем. моделирование. 2006. Т. 18. № 9. С. 43–53.