ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2022, № 3, с. 78–87

*УДК 517.977: 534.121.2*

# ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ МЕМБРАНЫ С НЕРАЗДЕЛЕННЫМИ МНОГОТОЧЕЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ В ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

**© 2022 г. В. Р. Барсегян[a,b]***

[a] *Институт механики НАН Армении, Ереван, Армения*

[b] *Ереванский государственный университет, Ереван, Армения*

**e-mail: barseghyan@sci.am*

Поступила в редакцию 07.07.2020 г.
После доработки 20.05.2021 г.
Принята к публикации 24.05.2021 г.

Рассмотрена задача оптимального управления колебаниями прямоугольной мембраны с заданными начальным, конечным условиями и неразделенными многоточечными условиями в промежуточные моменты времени и с критерием качества, заданным на всем промежутке времени. Методом разделения переменных задача сводится к задаче оптимального управления обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными, конечными и неразделенными многоточечными промежуточными условиями. Сформулировано необходимое и достаточное условие вполне управляемости. Используя методы теории оптимального управления конечномерными системами с неразделенными многоточечными промежуточными условиями построено оптимальное управляющее воздействие.

*Ключевые слова:* колебания мембраны, оптимальное управление колебаниями, промежуточные значения, неразделенные многоточечные условия

**DOI:** 10.31857/S0572329922020040

**Введение.** Одним из самых распространенных процессов в природе и технике являются колебательные процессы, которые моделируются волновым уравнением [1–3]. Многие процессы управления приводят к необходимости исследования многоточечных краевых задач управления и оптимального управления, в которых, наряду с классическими краевыми (начальным и конечным) условиями, заданы также неразделенные (нелокальные) многоточечные промежуточные условия, исследованые в работах [4–16]. Неразделенные многоточечные краевые задачи, с одной стороны, возникают как математические модели реальных процессов, а с другой стороны – из-за того, что для многих уравнений невозможна корректная постановка локальных краевых задач.

Многочисленные примеры технологических процессов, приводящих к задачам управления и оптимального управления в системах с распределенными параметрами, рассмотрены в [1–3], в которых предложены различные методы решения задач управления и оптимального управления, например, метод моментов, метод Фурье, метод гармоник. Задачи управления и оптимального управления колебательных процессов, как внешними, так и граничными управляющими воздействиями при различных типах граничных условий, рассмотрены в [7–11, 17–20, 22]. Задачи управления и оптимального управления распределенными системами с заданными неразделенными многоточечными (нелокальными) условиями в промежуточные моменты времени к настоящему времени мало исследованы.

Цель данной статьи состоит в разработке конструктивного подхода построения функции оптимального управляющего воздействия для управления колебаниями прямоугольной мембраны с заданными начальными, конечными условиями и неразделенными (нелокальными) значениями прогиба и скоростей точек мембраны в промежуточные моменты времени и с критерием качества, заданным на всем промежутке времени.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим однородную, упругую прямоугольную мембрану, края которой закреплены. Пусть на мембрану действуют распределенные силы с плотностью $u(x,y,t)$, перпендикулярные поверхности мембраны, под действием которых мембрана будет колебаться. Ограничимся рассмотрением малых колебаний мембраны.

Состояние мембраны описывается функцией $Q(x,y,t)$, $0 \le x \le b$, $0 \le y \le c$, $0 < t < T$, подчиненной при $0 < x < b$, $0 < y < c$ и $0 < t < T$ следующему уравнению

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\right) + u(x,y,t) \tag{1.1}$$

с однородными граничными условиями

$$Q(0,y,t) = 0, \quad Q(b,y,t) = 0, \quad Q(x,0,t) = 0, \quad Q(x,c,t) = 0, \quad 0 \le t \le T \tag{1.2}$$

и удовлетворяет начальным и конечным условиям

$$Q(x,y,0) = \varphi_0(x,y), \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(x,y), \quad 0 \le x \le b, \quad 0 \le y \le c \tag{1.3}$$

$$Q(x,y,T) = \varphi_T(x,y) = \varphi_{m+1}(x,y), \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(x,y) = \psi_{m+1}(x,y) \\ 0 \le x \le b, \quad 0 \le y \le c \tag{1.4}$$

В правой части уравнения (1.1) функция $u(x,y,t)$ – плотность силы, которая является управляющим воздействием, $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$, где $T_0$ – натяжение, а $\rho$ – плотность мембраны.

Пусть в некоторые промежуточные моменты времени $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = T$ на значения функции прогиба мембраны заданы неразделенные (нелокальные) условия в виде

$$\sum_{k=1}^{m} f_k Q(x,y,t_k) = \alpha(x,y) \tag{1.5}$$

$$\sum_{k=1}^{m} e_k \left.\frac{\partial Q(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=t_k} = \beta(x,y) \tag{1.6}$$

где $f_k$ и $e_k$ – заданные величины $(k = 1,\ldots,m)$, а $\alpha(x,y)$ и $\beta(x,y)$ – некоторые известные функции.

Предполагается, что $\varphi_0(x,y)$, $\psi_0(x,y)$, $\varphi_T(x,y)$, $\psi_T(x,y)$, $\alpha(x,y)$ и $\beta(x,y)$ заданные гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования.

Вообще может быть, что в некоторые моменты времени $t_k$ $(k = 1,\ldots,m)$ в условиях (1.5), (1.6) присутствует или значение функции прогиба, или значение производной этой функции, т.е. необязательно, чтобы в каждый момент времени $t_k$ $(k = 1,\ldots,m)$ в условиях (1.5), (1.6) одновременно присутствовали функции $Q(x,y,t_k)$ и $\left.\frac{\partial Q(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=t_k}$.
В таких случаях будем считать, что в условиях (1.5), (1.6) соответствующие коэффици-

енты $f_k$ или $e_k$ равны нулю. В частности, предполагая, что $f_2 = e_1 = 0$, а $f_1 = e_2 = 1$, условия (1.5) и (1.6) принимают вид

$$Q(x, y, t_1) = \alpha(x, y), \quad \left.\frac{\partial Q(x, y, t)}{\partial t}\right|_{t=t_2} = \beta(x, y)$$

Задачу оптимального управления колебаниями мембраны с заданными неразделенными значениями функции прогиба и скоростей в промежуточные моменты времени $t_k$ $(k = 1,\ldots,m)$ можно сформулировать следующим образом: среди возможных управлений $u(x, y, t)$, $0 \le x \le b$, $0 \le y \le c$, $0 \le t \le T$ требуется найти оптимальное управляющее воздействие $u^0(x, y, t)$, переводящее колебания мембраны (1.1) с граничными условиями (1.2) из заданного начального состояния (1.3) в заданное конечное состояние (1.4), обеспечивая удовлетворение неразделенных многоточечных промежуточных условий (1.5), (1.6) и минимизирующее функционал

$$\int_0^T\int_0^b\int_0^c [u(x, y, t)]^2\, dxdydt \tag{1.7}$$

Предполагается, что система (1.1) при ограничениях (1.2)–(1.6) на промежутке времени $[0, T]$ является вполне управляемой [5, 21].

**2. Решение задачи.** Поскольку граничные условия (1.2) однородны, то при каждом $t \in [0, T]$ функция $Q(x, y, t)$ представима рядом Фурье по собственным функциям $\left\{\sin\frac{k\pi}{b}x\sin\frac{k\pi}{c}y\right\}$ $(k,n = 1,2,\ldots)$. Для построения решения поставленной задачи ищем решение уравнения (1.1) с граничными условиями (1.2) в виде

$$Q(x, y, t) = \sum_{k,n=1}^{\infty} Q_{kn}(t)\sin\frac{k\pi}{b}x\sin\frac{n\pi}{c}y \tag{2.1}$$

Очевидно, для определения $Q(x, y, t)$ достаточно определить $Q_{kn}(t)$ $k, n = 1, 2, \ldots$. Представим функцию $u(x, y, t)$ в виде ряда Фурье

$$u(x, y, t) = \sum_{k,n=1}^{\infty} u_{km}(t)\sin\frac{k\pi}{b}x\sin\frac{n\pi}{c}y \tag{2.2}$$

Подставим разложения (2.1), (2.2) в соотношения (1.1). В силу ортогональности системы собственных функций $\left\{\sin\frac{k\pi}{b}x\sin\frac{n\pi}{c}y\right\}$, $(k, n = 1, 2,\ldots)$ следует, что коэффициенты Фурье $Q_{kn}(t)$ удовлетворяют счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{Q}_{kn}(t) + \lambda_{kn}^2 Q_{kn}(t) = u_{kn}(t), \quad \lambda_{kn}^2 = a^2\left[\left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2\right], \quad k, n = 1, 2,\ldots \tag{2.3}$$

и следующим начальным, неразделенным многоточечным промежуточным и конечным условиям:

$$Q_{kn}(0) = \varphi_{kn}^{(0)}, \quad \dot{Q}_{kn}(0) = \psi_{kn}^{(0)} \tag{2.4}$$

$$\sum_{j=1}^{m} f_j Q_{kn}(t_j) = \alpha_{kn}, \quad \sum_{j=1}^{m} e_j \dot{Q}_{kn}(t_j) = \beta_{kn} \tag{2.5}$$

$$Q_{kn}(T) = \varphi_{kn}^{(T)} = \varphi_{kn}^{(m+1)}, \quad \dot{Q}_{kn}(T) = \psi_{kn}^{(T)} = \psi_{kn}^{(m+1)} \tag{2.6}$$

где через $Q_{kn}(t)$, $\varphi_{kn}^{(0)}$, $\psi_{kn}^{(0)}$, $\varphi_{kn}^{(m+1)}$, $\psi_{kn}^{(m+1)}$, $u_{kn}(t)$, $\alpha_{kn}$ и $\beta_{kn}$ обозначены коэффициенты Фурье, соответствующие функциям $Q(x,y,t)$, $\varphi_0(x,y)$, $\psi_0(x,y)$, $\varphi_{m+1}(x,y)$, $\psi_{m+1}(x,y)$, $u(x,y,t)$, $\alpha(x,y)$ и $\beta(x,y)$.

Общее решение уравнения (2.3) с начальными условиями (2.4) и его производная по времени имеют вид

$$Q_{kn}(t) = \varphi_{kn}^{(0)} \cos \lambda_{kn} t + \frac{1}{\lambda_{kn}} \psi_{kn}^{(0)} \sin \lambda_{kn} t + \frac{1}{\lambda_{kn}} \int_0^t u_{kn}(\tau) \sin \lambda_{kn}(t-\tau)\, d\tau$$

$$\dot{Q}_{kn}(t) = -\lambda_{kn}\varphi_{kn}^{(0)} \sin \lambda_{kn} t + \psi_{kn}^{(0)} \cos \lambda_{kn} t + \int_0^t u_{kn}(\tau) \cos \lambda_{kn}(t-\tau)\, d\tau \tag{2.7}$$

Теперь, учитывая промежуточные неразделенные (2.5) и конечные (2.6) условия, из уравнения (2.7), получим, что функции $u_{kn}(\tau)$ для каждого $k$ и $n$ должны удовлетворять следующей системе равенств:

$$\int_0^T u_{kn}(\tau) \sin \lambda_{kn}(T-\tau)\, d\tau = C_{1kn}(T), \quad \int_0^T u_{kn}(\tau) \cos \lambda_{kn}(T-\tau)\, d\tau = C_{2kn}(T) \tag{2.8}$$

$$\sum_{j=1}^m f_j \int_0^{t_j} u_{kn}(\tau) \sin \lambda_{kn}(t_j-\tau)\, d\tau = C_{1kn}^{(m)}(t_1,\ldots,t_m),$$

$$\sum_{j=1}^m e_j \int_0^{t_j} u_{kn}(\tau) \cos \lambda_{kn}(t_j-\tau)\, d\tau = C_{2kn}^{(m)}(t_1,\ldots,t_m)$$

где

$$C_{1kn}(T) = \lambda_{kn}\varphi_{kn}^{(m+1)} - \lambda_{kn}\varphi_{kn}^{(0)} \cos \lambda_{kn} T - \psi_{kn}^{(0)} \sin \lambda_{kn} T$$

$$C_{2kn}(T) = \psi_{kn}^{(m+1)} + \lambda_{kn}\varphi_{kn}^{(0)} \sin \lambda_{kn} T - \psi_{kn}^{(0)} \cos \lambda_{kn} T \tag{2.9}$$

$$C_{1kn}^{(m)}(t_1,\ldots,t_m) = \lambda_{kn}\left[\alpha_{kn} - \sum_{j=1}^m f_j \left(\varphi_{kn}^{(0)} \cos \lambda_{kn} t_j + \frac{1}{\lambda_{kn}} \psi_{kn}^{(0)} \sin \lambda_{kn} t_j\right)\right]$$

$$C_{2kn}^{(m)}(t_1,\ldots,t_m) = \beta_{kn} - \sum_{j=1}^m e_j (-\lambda_{kn}\varphi_{kn}^{(0)} \sin \lambda_{kn} t_j + \psi_{kn}^{(0)} \cos \lambda_{kn} t_j)$$

Введем следующие функции

$$h_{1kn}(\tau) = \sin \lambda_{kn}(T-\tau), \quad h_{2kn}(\tau) = \cos \lambda_{kn}(T-\tau), \quad 0 \le \tau \le T$$

$$h_{1kn}^{(m)}(\tau) = \sum_{j=1}^m f_j h_{1kn}^{(j)}(\tau), \quad h_{1kn}^{(j)}(\tau) = \begin{cases} \sin \lambda_{kn}(t_j-\tau), & 0 \le \tau \le t_j \\ 0, & t_j < \tau \le t_{m+1} = T \end{cases} \tag{2.10}$$

$$h_{2kn}^{(m)}(\tau) = \sum_{j=1}^m e_j h_{2kn}^{(j)}(\tau), \quad h_{2kn}^{(j)}(\tau) = \begin{cases} \cos \lambda_{kn}(t_j-\tau), & 0 \le \tau \le t_j \\ 0, & t_j < \tau \le t_{m+1} = T \end{cases}$$

Тогда интегральные соотношения (2.8) при помощи функции (2.10) запишутся следующим образом

$$\int_0^T u_{kn}(\tau) h_{1kn}(\tau)\, d\tau = C_{1kn}(T), \quad \int_0^T u_{kn}(\tau) h_{2kn}(\tau)\, d\tau = C_{2kn}(T) \tag{2.11}$$

$$\int_0^T u_{kn}(\tau)h_{1kn}^{(m)}(\tau)d\tau = C_{1kn}^{(m)}(t_1,\ldots,t_m), \quad \int_0^T u_{kn}(\tau)h_{2kn}^{(m)}(\tau)d\tau = C_{2kn}^{(m)}(t_1,\ldots,t_m), \quad k,n = 1,\ 2,\ldots$$

Из полученного соотношения (2.11) следует справедливость следующего утверждения.

*Утверждение.* Для каждой гармоники движение, описываемое управнением (2.3) с условиями (2.4)–(2.6), вполне управляемо тогда и только тогда, когда для любых заданных значений постоянных $C_{1kn}(T)$, $C_{2kn}(T)$, $C_{1kn}^{(m)}(t_1,\ldots,t_m) = C_{1kn}^{(m)}$, $C_{2kn}^{(m)}(t_1,\ldots,t_m) = C_{2kn}^{(m)}$ в (2.9) можно найти управление $u_{kn}(t)$ $t \in [0,T]$, удовлетворяющее условию (2.11).

Учитывая разложение (2.2) и ортогональность системы собственных функций, минимизируемый функционал (1.7) запишется в виде:

$$\int_0^T\int_0^b\int_0^c [u(x,y,t)]^2\,dxdydt = \frac{bc}{4}\sum_{k,n=1}^{\infty}\int_0^T u_{kn}^2(\tau)\,d\tau$$

Но так как для каждого $k,n = 1,2,\ldots$ имеет место $\int_0^T u_{kn}^2(\tau)d\tau \geq 0$, то минимизация функционала (1.7) равносильна минимизации функционалов

$$\int_0^T u_{kn}^2(\tau)\,d\tau \qquad k,n = 1,\ 2,\ldots \tag{2.12}$$

Таким образом, решение поставленной задачи оптимального управления (1.1)–(1.7) для каждого $k,n = 1,2,\ldots$ сводится к нахождению такого оптимального управления $u_{kn}^0(t)$ $t \in [0,T]$, которое удовлетворяет интегральным соотношениям (2.11) и доставляет минимум функционалу (2.12). Задачу оптимального управления при функционале (2.12) и с интегральными условиями (2.11) можно рассматривать как задачу условного экстремума из вариационного исчисления. Однако, как видно из обозначения (2.10), подынтегральная функция в соотношении (2.11) является разрывной, поэтому классические методы вариационного исчисления не применимы для исследования этой задачи [5, 21].

Отметим, что в силу линейности условий (2.11), порожденных функцией $u_{kn}(t)$ на промежутке времени $[0,T]$, и того, что функционал (2.12) является нормой линейного нормированного пространства, решение полученной задачи оптимального управления (2.11), (2.12) целесообразно искать с помощью алгоритма решения проблемы моментов [5, 21].

Следуя [5, 21], для решения конечномерной проблемы моментов (2.11)–(2.12), нужно найти некоторые величины $p_{1kn}$, $p_{2kn}$, $q_{1kn}$, $q_{2kn}$, $k,n = 1,2,\ldots$ связанные условиями

$$p_{1kn}C_{1kn}(T) + p_{2kn}C_{2kn}(T) + q_{1kn}C_{1kn}^{(m)} + q_{2kn}C_{2kn}^{(m)} = 1 \tag{2.13}$$

для которых

$$(\rho_{kn}^0)^2 = \min_{(2.13)}\int_0^T h_{kn}^2(t)dt, \tag{2.14}$$

где

$$h_{kn}(t) = p_{1kn}h_{1kn}(t) + p_{2kn}h_{2kn}(t) + q_{1kn}h_{1kn}^{(m)}(t) + q_{2kn}h_{2kn}^{(m)}(t) \tag{2.15}$$

Для определения величин $p_{1kn}^0$, $p_{2kn}^0$, $q_{1kn}^0$, $q_{2kn}^0$, $k,n=1,2,\ldots$ минимизирующих (2.14) с условиями (2.13) применим метод неопределенных множителей Лагранжа. Введем функцию

$$f(p_{1kn},p_{2kn},q_{1kn},q_{2kn})=\int_0^T[p_{1kn}h_{1kn}(t)+p_{2kn}h_{2kn}(t)+q_{1kn}h_{1kn}^{(m)}(t)+q_{2kn}h_{1kn}^{(m)}(t)]^2dt+$$
$$+\gamma_{kn}[p_{1kn}C_{1kn}(T)+p_{2kn}C_{2kn}(T)+q_{1kn}C_{1kn}^{(m)}+q_{2kn}C_{2kn}^{(m)}-1]$$

где $\gamma_{kn}$ – неопределенный множитель Лагранжа. На основе этого метода, вычисляя производные по $p_{1kn}$, $p_{2kn}$, $q_{1kn}$, $q_{2kn}$, $k,n=1,2,\ldots$ функции $f(p_{1kn},p_{2kn},q_{1kn},q_{2kn})$, и, приравнивая к нулю, получаем следующую систему алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}
a_{kn}^{(1)}p_{1kn}+a_{kn}^{(2)}p_{2kn}+b_{kn}^{(2)}q_{1kn}+c_{kn}^{(2)}q_{2kn}=-\frac{\gamma_{kn}}{2}C_{1kn}(T)\\
a_{kn}^{(2)}p_{1kn}+b_{kn}^{(1)}p_{2kn}+d_{kn}^{(2)}q_{1kn}+e_{kn}^{(1)}q_{2kn}=-\frac{\gamma_{kn}}{2}C_{2kn}(T)\\
b_{kn}^{(2)}p_{1kn}+d_{kn}^{(2)}p_{2kn}+d_{kn}^{(1)}q_{1kn}+e_{kn}^{(2)}q_{2kn}=-\frac{\gamma_{kn}}{2}C_{1kn}^{(m)}\\
c_{kn}^{(2)}p_{1kn}+e_{kn}^{(1)}p_{2kn}+e_{kn}^{(2)}q_{1kn}+c_{kn}^{(1)}q_{2kn}=-\frac{\gamma_{kn}}{2}C_{2kn}^{(m)},\quad k,n=1,2,\ldots,
\end{gathered}\tag{2.16}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{gathered}
a_{kn}^{(1)}=\int_0^T\left(h_{1kn}(\tau)\right)^2d\tau,\quad b_{kn}^{(1)}=\int_0^T\left(h_{2kn}(\tau)\right)^2d\tau,\quad d_{kn}^{(1)}=\int_0^T(h_{1kn}^{(m)}(\tau))^2d\tau=\int_0^T\left(\sum_{j=1}^m f_jh_{1kn}^{(j)}(\tau)\right)^2d\tau\\
c_{kn}^{(1)}=\int_0^T(h_{2kn}^{(m)}(\tau))^2d\tau=\int_0^T\left(\sum_{j=1}^m e_jh_{2kn}^{(j)}(\tau)\right)^2d\tau,\quad a_{kn}^{(2)}=\int_0^T h_{1kn}(\tau)h_{2kn}(\tau)d\tau\\
b_{kn}^{(2)}=\int_0^T h_{1kn}(\tau)h_{1kn}^{(m)}(\tau)d\tau=\int_0^T h_{1kn}(\tau)\left(\sum_{j=1}^m f_jh_{1kn}^{(j)}(\tau)\right)d\tau\\
d_{kn}^{(2)}=\int_0^T h_{2kn}(\tau)h_{1kn}^{(m)}(\tau)d\tau=\int_0^T h_{2kn}(\tau)\left(\sum_{j=1}^m f_jh_{1kn}^{(j)}(\tau)\right)d\tau\\
c_{kn}^{(2)}=\int_0^T h_{1kn}(\tau)h_{2kn}^{(m)}(\tau)d\tau=\int_0^T h_{1kn}(\tau)\left(\sum_{j=1}^m e_jh_{2kn}^{(j)}(\tau)\right)d\tau\\
e_{kn}^{(1)}=\int_0^T h_{2kn}(\tau)h_{2kn}^{(m)}(\tau)d\tau=\int_0^T h_{2kn}(\tau)\left(\sum_{j=1}^m e_jh_{2kn}^{(j)}(\tau)\right)d\tau\\
e_{kn}^{(2)}=\int_0^T h_{1kn}^{(m)}(\tau)h_{2kn}^{(m)}(\tau)d\tau=\int_0^T\left(\sum_{j=1}^m f_jh_{1kn}^{(j)}(\tau)\right)\left(\sum_{j=1}^m e_jh_{2kn}^{(j)}(\tau)\right)d\tau
\end{gathered}\tag{2.17}$$

Присоединяя к уравнениям (2.16) условие (2.13), получим замкнутую систему алгебраических уравнений относительно неизвестных величин $p_{1kn}$, $p_{2kn}$, $q_{1kn}$, $q_{2kn}$, $\gamma_{kn}$ $k,n=1,2,\ldots$.

Введем следующие обозначения

$$\Delta_{kn} = \begin{vmatrix} a_{kn}^{(1)} & a_{kn}^{(2)} & b_{kn}^{(2)} & c_{kn}^{(2)} \\ a_{kn}^{(2)} & b_{kn}^{(1)} & d_{kn}^{(2)} & e_{kn}^{(1)} \\ b_{kn}^{(2)} & d_{kn}^{(2)} & d_{kn}^{(1)} & e_{kn}^{(2)} \\ c_{kn}^{(2)} & e_{kn}^{(1)} & e_{kn}^{(2)} & c_{kn}^{(1)} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{kn}(p_{1kn}) = \begin{vmatrix} C_{1kn}(T) & a_{kn}^{(2)} & b_{kn}^{(2)} & c_{kn}^{(2)} \\ C_{2kn}(T) & b_{kn}^{(1)} & d_{kn}^{(2)} & e_{kn}^{(1)} \\ C_{1kn}^{(m)} & d_{kn}^{(2)} & d_{kn}^{(1)} & e_{kn}^{(2)} \\ C_{2kn}^{(m)} & e_{kn}^{(1)} & e_{kn}^{(2)} & c_{kn}^{(1)} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{kn}(p_{2kn}) = \begin{vmatrix} a_{kn}^{(1)} & C_{1kn}(T) & b_{kn}^{(2)} & c_{kn}^{(2)} \\ a_{kn}^{(2)} & C_{2kn}(T) & d_{kn}^{(2)} & e_{kn}^{(1)} \\ b_{kn}^{(2)} & C_{1kn}^{(m)} & d_{kn}^{(1)} & e_{kn}^{(2)} \\ c_{kn}^{(2)} & C_{2kn}^{(m)} & e_{kn}^{(2)} & c_{kn}^{(1)} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{kn}(q_{1kn}) = \begin{vmatrix} a_{kn}^{(1)} & a_{kn}^{(2)} & C_{1kn}(T) & c_{kn}^{(2)} \\ a_{kn}^{(2)} & b_{kn}^{(1)} & C_{2kn}(T) & e_{kn}^{(1)} \\ b_{kn}^{(2)} & d_{kn}^{(2)} & C_{1kn}^{(m)} & e_{kn}^{(2)} \\ c_{kn}^{(2)} & e_{kn}^{(1)} & C_{2kn}^{(m)} & c_{kn}^{(1)} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{kn}(q_{2kn}) = \begin{vmatrix} a_{kn}^{(1)} & a_{kn}^{(2)} & b_{kn}^{(2)} & C_{1kn}(T) \\ a_{kn}^{(2)} & b_{kn}^{(1)} & d_{kn}^{(2)} & C_{2kn}(T) \\ b_{kn}^{(2)} & d_{kn}^{(2)} & d_{kn}^{(1)} & C_{1kn}^{(m)} \\ c_{kn}^{(2)} & e_{kn}^{(1)} & e_{kn}^{(2)} & C_{2kn}^{(m)} \end{vmatrix}$$

и предположим, что $\Delta_{kn} \neq 0$. Тогда решение системы (2.16) с условием (2.13) можно представить в виде:

$$p_{1kn}^{0} = \frac{\Delta_{kn}(p_{1kn})}{A_{kn}}, \quad p_{2kn}^{0} = \frac{\Delta_{kn}(p_{2kn})}{A_{kn}}, \quad q_{1kn}^{0} = \frac{\Delta_{kn}(q_{1kn})}{A_{kn}}$$

$$q_{2kn}^{0} = \frac{\Delta_{kn}(q_{2kn})}{A_{kn}}, \quad \gamma_{kn} = -2\frac{\Delta_{kn}}{A_{kn}}, \quad k, n = 1, 2, \ldots \tag{2.18}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$A_{kn} = \Delta_{kn}(p_{1kn})C_{1kn}(T) + \Delta_{kn}(p_{2kn})C_{2kn}(T) + \Delta_{kn}(q_{1kn})C_{1kn}^{(m)} + \Delta_{kn}(q_{2kn})C_{2kn}^{(m)}$$

Подставляя из (2.18) значения для $p_{1kn}^{0}$, $p_{2kn}^{0}$, $q_{1kn}^{0}$, $q_{2kn}^{0}$ в (2.15), получим

$$h_{kn}^{0}(t) = \frac{\tilde{h}_{kn}^{0}(t)}{A_{kn}}, \tag{2.19}$$

$$\tilde{h}_{kn}^{0}(t) = \Delta_{kn}(p_{1kn})h_{1kn}(t) + \Delta_{kn}(p_{2kn})h_{2kn}(t) + \Delta_{kn}(q_{1kn})h_{1kn}^{(m)}(t) + \Delta_{kn}(q_{2kn})h_{2kn}^{(m)}(t)$$

Имея оптимальную функцию $h_{kn}^{0}(t)$ из (2.14), с учетом (2.19), будем иметь

$$(\rho_{kn}^{0})^2 = \frac{B_{kn}}{A_{kn}^2}, \quad \text{где} \quad B_{kn} = \int_0^T (\tilde{h}_{kn}^{0}(t))^2 dt$$

Таким образом, согласно [5, 21], искомое оптимальное управление $u_{kn}^{0}(t)$ определяется выражением:

$$u_{kn}^{0}(t) = \frac{1}{(\rho_{kn}^{0})^2} h_{kn}^{0}(t) = \frac{A_{kn}}{B_{kn}} \tilde{h}_{kn}^{0}(t) \tag{2.20}$$

Отметим, что согласно обозначениям (2.10) будем иметь

$$h_{1kn}^{(m)}(t)=\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{m} f_j \sin\lambda_{kn}(t_j-t), & 0\le t\le t_1\\ \sum\limits_{j=2}^{m} f_j \sin\lambda_{kn}(t_j-t), & t_1<t\le t_2\\ \quad\ldots & \\ \sum\limits_{j=m-1}^{m} f_j \sin\lambda_{kn}(t_j-t), & t_{m-2}<t\le t_{m-1}\\ f_m \sin\lambda_{kn}(t_m-t), & t_{m-1}<t\le t_m\\ 0, & t_m<t\le t_{m+1}=T\end{cases}$$

$$h_{2kn}^{(m)}(t)=\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{m} e_j \cos\lambda_{kn}(t_j-t), & 0\le t\le t_1\\ \sum\limits_{j=2}^{m} e_j \cos\lambda_{kn}(t_j-t), & t_1<t\le t_2\\ \quad\ldots & \\ \sum\limits_{j=m-1}^{m} e_j \cos\lambda_{kn}(t_j-t), & t_{m-2}<t\le t_{m-1}\\ e_m \cos\lambda_{kn}(t_m-t), & t_{m-1}<t\le t_m\\ 0, & t_m<t\le t_{m+1}=T\end{cases}$$

Подставляя значения функции $h_{1kn}(t)$, $h_{2kn}(t)$, $h_{1kn}^{(m)}(t)$, $h_{2kn}^{(m)}(t)$ в (2.19), получим

$$\tilde{h}_{kn}^{0}(t)=\begin{cases}\tilde{h}_{kn}^{(1)0}(t), & 0\le t\le t_1\\ \tilde{h}_{kn}^{(2)0}(t), & t_1<t\le t_2\\ \quad\ldots & \\ \tilde{h}_{kn}^{(m-1)0}(t), & t_{m-2}<t\le t_{m-1}\\ \tilde{h}_{kn}^{(m)0}(t), & t_{m-1}<t\le t_m\\ \tilde{h}_{kn}^{(m+1)0}(t), & t_m<t\le t_{m+1}=T\end{cases} \tag{2.21}$$

где

$$\tilde{h}_{kn}^{(1)0}(t)=\tilde{h}_{kn}^{(m+1)0}(t)+\Delta_{kn}(q_{1kn})\sum_{j=1}^{m} f_j \sin\lambda_{kn}(t_j-t)+\Delta_{kn}(q_{2kn})\sum_{j=1}^{m} e_j \cos\lambda_{kn}(t_j-t)$$

$$\tilde{h}_{kn}^{(2)0}(t)=\tilde{h}_{kn}^{(m+1)0}(t)+\Delta_{kn}(q_{1kn})\sum_{j=2}^{m} f_j \sin\lambda_{kn}(t_j-t)+\Delta_{kn}(q_{2kn})\sum_{j=2}^{m} e_j \cos\lambda_{kn}(t_j-t)$$

$$\ldots\ldots$$

$$\tilde{h}_{kn}^{(m-1)0}(t)=\tilde{h}_{kn}^{(m+1)0}(t)+\Delta_{kn}(q_{1kn})\sum_{j=m-1}^{m} f_j \sin\lambda_{kn}(t_j-t)+\Delta_{kn}(q_{2kn})\sum_{j=m-1}^{m} e_j \cos\lambda_{kn}(t_j-t)$$

$$\tilde{h}_{kn}^{(m)0}(t)=\tilde{h}_{kn}^{(m+1)0}(t)+\Delta_{kn}(q_{1kn})f_m \sin\lambda_{kn}(t_m-t)+\Delta_{kn}(q_{2kn})e_m \cos\lambda_{kn}(t_m-t)$$

$$\tilde{h}_{kn}^{(m+1)0}(t)=\Delta_{kn}(p_{1kn})h_{1kn}(t)+\Delta_{kn}(p_{2kn})h_{2kn}(t)$$

Таким образом, имея явное выражение функции $\tilde{h}^0_{kn}(t)$, из (2.20) получим оптимальную функцию $u^0_{kn}(t)$ для каждого $k, n = 1, 2, \ldots$. Далее подставляя оптимальную функцию $u^0_{kn}(t)$ в (2.7), получим $Q^0_{kn}(t)$ на промежутке времени $t \in [0, T]$. Следовательно, из формулы (2.1) и (2.2) получим оптимальную функцию $Q^0(x, y, t)$ прогиба мембраны и оптимальное управление $u^0(x, y, t)$.

Таким образом, для оптимального управления будем иметь

$$u^0(x,y,t) = \begin{cases} \sum\limits_{k,n=1}^{\infty} \dfrac{A_{kn}}{B_{kn}} \tilde{h}^{(1)0}_{kn}(t) \sin\dfrac{k\pi}{b}x \sin\dfrac{n\pi}{c}y, & 0 \le t \le t_1 \\ \sum\limits_{k,n=1}^{\infty} \dfrac{A_{kn}}{B_{kn}} \tilde{h}^{(2)0}_{kn}(t) \sin\dfrac{k\pi}{b}x \sin\dfrac{n\pi}{c}y, & t_1 < t \le t_2 \\ \quad \cdots & \\ \sum\limits_{k,n=1}^{\infty} \dfrac{A_{kn}}{B_{kn}} \tilde{h}^{(m-1)0}_{kn}(t) \sin\dfrac{k\pi}{b}x \sin\dfrac{n\pi}{c}y, & t_{m-2} < t \le t_{m-1} \\ \sum\limits_{k,n=1}^{\infty} \dfrac{A_{kn}}{B_{kn}} \tilde{h}^{(m)0}_{kn}(t) \sin\dfrac{k\pi}{b}x \sin\dfrac{n\pi}{c}y, & t_{m-1} < t \le t_m \\ \sum\limits_{k,n=1}^{\infty} \dfrac{A_{kn}}{B_{kn}} \tilde{h}^{(m+1)0}_{kn}(t) \sin\dfrac{k\pi}{b}x \sin\dfrac{n\pi}{c}y, & t_m < t \le t_{m+1} = T \end{cases}$$

Доказательство того, что построенные функции являются решением поставленной задачи сводится к проверке того, что ряд (2.1) и все двойные ряды, которые получаются из него почленным дифференцированием дважды по всем аргументам, сходятся равномерно. Для равномерной сходимости этих рядов достаточно получить оценку их коэффициентов. В ходе вычисления оценки общих членов указанных рядов (и полученного ряда для $u^0(x, y, t)$) получаются числовые ряды с положительными членами, которые мажорируют рассматриваемые ряды. Для абсолютной сходимости этих рядов достаточно потребовать, чтобы функции $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ удовлетворяли некоторым требованиям гладкости [22].

**Заключение.** Исследована задача оптимального управления колебаниями прямоугольной мембраны с заданными неразделенными значениями функции состояния в промежуточные моменты времени. Методом разделения переменных задача сведена к задаче оптимального управления счетного числа обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными, конечными и неразделенными многоточечными промежуточными условиями и с критерием качества, заданным на всем промежутке времени управления. Решение задачи построено с использованием методов теории оптимального управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
2. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977. 480 с.
3. *Знаменская Л.Н.* Управление упругими колебаниями. М.: Физматлит, 2004. 176 с.
4. *Ащепков Л.Т.* Оптимальное управление системой с промежуточными условиями // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 2. С. 215–222.

5. *Барсегян В.Р.* Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016. 230 с.

6. *Барсегян В.Р., Барсегян Т.В.* Об одном подходе к решению задач управления динамических систем с неразделенными многоточечными промежуточными условиями // Автоматика и телемеханика. 2015. № 4. С. 3–15.

7. *Барсегян В.Р.* Задача управления колебаниями струны с неразделенными многоточечными условиями в промежуточные моменты времени // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 6. С. 108–120. https://doi.org/10.1134/S0572329919060047

8. *Barseghyan V.R.* The problem of control of membrane vibrations with non-separated multipoint conditions at intermediate moments of time // Cybernet. Comput. Eng. 2019. № 3 (197). P. 20–32. https://doi.org/10.15407/kvt197.03.020

9. *Барсегян В.Р.* Задача управления колебаниями струны с неразделенными условиями на скорости точек прогиба в промежуточные моменты времени // Тр. ИММ УрО РАН. 2019. Т. 25. № 3. С. 24–33.

10. *Барсегян В.Р., Саакян М.А.* Оптимальное управление колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времении // Изв. НАН РА. Механика. 2008. Т. 61. № 2. С. 52–60.

11. *Барсегян В.Р.* Об оптимальном управлении колебаниями мембраны при фиксированных промежуточных состояниях // Уч. записки ЕГУ. 1998. № 1 (188). С. 24–29.

12. *Корзюк В.И., Козловская И.С.* Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. I // Труды Ин-та мат. НАН Беларуси. 2010. Т. 18. № 2. С. 22–35.

13. *Корзюк В.И., Козловская И.С.* Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. II // Труды Ин-та мат. НАН Беларуси. 2011. Т. 19. № 1. С. 62–70.

14. *Макаров А.А., Левкин Д.А.* Многоточечная краевая задача для псевдодифференциальных уравнений в полислое // Вісн. Харківськ. нац. унів. ім. В.Н. Каразіна. Сер. Мат. прикл. мат. мех. 2014. № 1120. Вып. 69. С. 64–74.

15. *Асанова А.Т., Иманчиев А.Е.* О разрешимости нелокальной краевой задачи для нагруженных гиперболических уравнений с многоточечными условиями // Вест. Караганд. унив. Сер. Мат. 2016. № 1 (81). С. 15–20.

16. *Бакирова Э.А., Кадирбаева Ж.М.* О разрешимости линейной многоточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2016. № 5. С. 168–175.

17. *Barseghyan V.R., Movsisyan L.A.* Optimal control of the vibration of elastic systems described by the wave equation // Int. Appl. Mech. 2012. V. 48. № 2. P. 234–239.

18. *Копец М.М.* Оптимальное управление колебаниями прямоугольной мембраны // Киберн. выч. тех. 2014. Вып. 177. С. 28–42.

19. *Xiuying Li.* Numerical solution of an initial-boundary value problemwith nonlocal condition for the wave equation // Math. Sci. 2008. V. 2. № 3. P. 281–292.

20. *Dreglea A.I., Sidorov N.A.* Integral equations in identification of externalforce and heat source density dynamics // Bul. Acad.¸Sci. Repub. Mold. Mat. 2018. № 3. P. 68–77.

21. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

22. *Саакян Л.С., Барсегян В.Р.* Об управлении колебаниями мембраны // Механика. Межвузовский сборник научных трудов. Вып. 6. Ереван: ЕГУ, 1987. С. 119–126.