ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2022, № 3, с. 56–69

УДК 539.375

МОДЕЛЬ БЛОЧНЫХ СРЕД С УЧЕТОМ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ

© 2022 г. Н. И. Александрова[a],*

[a] *Институт горного дела им. Н.А. Чинакала СО РАН, Новосибирск, Россия*
**e-mail: nialex@misd.ru*

Поступила в редакцию 08.06.2021 г.
После доработки 07.08.2021 г.
Принята к публикации 26.08.2021 г.

Блочная среда моделируется дискретно-периодической пространственной решеткой масс, соединенных упругими пружинами и вязкими демпферами. Для описания вязкоупругого поведения межблочных прослоек предложена реологическая модель внутреннего трения с двумя элементами Максвелла и одним элементом Фойгта с коэффициентом добротности материала, как определяющим параметром. Численные эксперименты показывают, что в рамках этой модели прослоек удается подбирать вязкость и жесткость элементов Максвелла и Фойгта так, что коэффициент добротности материала отличается от заданного постоянного значения не больше, чем на 5%. В одномерном случае в рамках предложенной модели исследовано влияние коэффициента добротности на дисперсионные свойства блочной среды и показано, что наибольшее влияние коэффициента добротности на дисперсию наблюдается в низкочастотной части спектра. В трехмерном случае в рамках предложенной модели численно исследуются некоторые геомеханические задачи для блочного полупространства, находящегося под действием поверхностной сосредоточенной вертикальной нагрузки. А именно, исследовано затухание амплитуд скоростей поверхностных блоков в зависимости от коэффициента добротности при ступенчатом воздействии и при воздействии импульса Гаусса. Кроме того, мы изучаем слой на поверхности полупространства под действием сосредоточенной вертикальной импульсной нагрузки в том случае, когда и слой, и полупространство являются блочными средами, но имеют разные свойства.

Ключевые слова: внутреннее трение, блочная среда, задача Лэмба, полупространство, слой на полупространстве, волновое движение, численное моделирование

DOI: 10.31857/S0572329922020039

1. Введение. По современным представлениям, развитым в трудах М.А. Садовского [1] и его последователей, горные породы представляют собой иерархическую систему блоков разного масштабного уровня. Блоки одного уровня разделены между собой прослойками пород с ослабленными механическими свойствами. В [2, 3] отмечено, что размеры блоков изменяются в масштабах от фракций породного массива до геоблоков земной коры. В экспериментальной работе [4] было показано на двумерной модели блочной среды – кирпичной стене, что для реальной геосреды можно определить размеры характерных блоков породного массива по данным сейсмического каротажа, используя обнаруженное в [5] соотношение, связывающее значение скорости распространения низкочастотной волны, частоты, ограничивающей ее спектр, и продольного размера блоков. Как показано в [2, 3, 6], движение блочной среды может быть представлено, как движение жестких блоков за счет деформации прослоек. В результате динамику блочной среды можно изучать в маятниковом приближении, когда считается, что блоки несжимаемы, а все деформации и смещения происходят за счет сжимаемости прослоек (см., например, [7–9]). В [8, 9] блочная среда моделируется как трехмерная решетка масс, соединенных элементами Фойгта в осевых и диагональных направлениях. В [9] показано качественное соответствие конечно-разностного решения по этой модели задачи Лэмба для блочной среды с результатами полевых экспериментов, проведенных на известняковом карьере. Альтернативный подход основан на математической модели блочной среды с упругими блоками, взаимодействующими через податливые прослойки [5, 10, 11]. Для описания прослоек в [10, 11] предложены различные варианты модели, в которой прослойки между упругими блоками могут быть упругими, вязкоупругими, пластическими, пористыми.

В настоящей работе модифицируется 3D модель, предложенная в [8]. В новой модели внутреннее трение в прослойках между блоками моделируется элементами Максвелла и Фойгта. Зенер [12] и Био [13] были одними из первых, кто включили элементы Максвелла и Фойгта в модели для описания неупругого поведения материалов. Модель с двумя элементами Максвелла и одним элементом Фойгта впервые была предложена Био [13], кроме того она была представлена в работе Фанг [14]. Многие исследователи затем использовали различные комбинации элементов Максвелла и Фойгта для учета неупругих потерь. При этом важной задачей в течение нескольких десятилетий в каждой модели было ограничение количества механизмов релаксации для получения удовлетворительного решения, т.е. для получения почти постоянного коэффициента добротности материала Q. В [15] исследована модель с внутренним трением для описания распространения волн в однородных неупругих средах. Эта модель включает два элемента Максвелла и один элемент Фойгта. Как показано в [15], эта модель дает возможность выбирать параметры вязкости и жесткости этих элементов, так что коэффициент добротности материала Q отличается от предписанного постоянного значения Q_0 не больше, чем на 5% на интервале частот от 3% до 100% от максимальной частоты, представляющей интерес. Важным свойством данной модели является небольшое число дополнительных переменных при максимальном охвате интересующего диапазона частот. Использование минимального количества элементов Максвелла ограничивает память и вычислительные ресурсы, необходимые в компьютерных программах для численного моделирования трехмерных задач.

Ниже для описания вязкоупругого поведения межблочных прослоек используется модель внутреннего трения с двумя элементами Максвелла и одним элементом Фойгта с коэффициентом добротности Q, как определяющим параметром. Эта модель применяется для решения геомеханических задач распространения волн.

2. Одномерная модель блочной среды с учетом внутреннего трения. Продемонстрируем эту модель сначала на примере дискретно-периодической одномерной цепочки масс, соединенных вязкоупругими прослойками. Реологическая модель прослоек состоит из двух элементов Максвелла и одного элемента Фойгта (рис. 1). Все три элемента соединены параллельно. Каждый элемент Максвелла состоит из пружины и демпфера, которые соединены последовательно. Элемент Фойгта состоит также из пружины и демпфера, но соединены они параллельно. Здесь k, k_1, k_2 – жесткости пружин в элементе Фойгта и в двух элементах Максвелла, соответственно, λ, λ_1, λ_2 – вязкости демпферов в элементе Фойгта и в двух элементах Максвелла.

Уравнения одномерного движения блоков с данной реологической моделью прослоек имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} M\ddot{u}_j = K[(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \beta(\dot{u}_{j+1} - 2\dot{u}_j + \dot{u}_{j-1}) - \\ - \alpha_1\gamma_1(\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}) - \alpha_2\gamma_2(\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1})], \quad j = 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{2.1}$$

$$M\ddot{u}_0 = K[(u_1 - u_0) + \beta(\dot{u}_1 - \dot{u}_0) - \alpha_1\gamma_1(\psi_1 - \psi_0) - \alpha_2\gamma_2(\varphi_1 - \varphi_0)] + P(t)$$

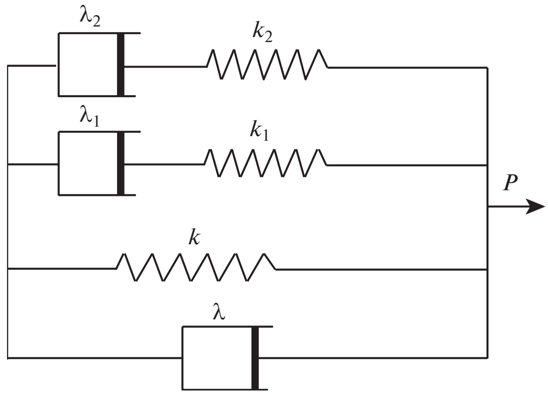

Рис. 1. Модель прослойки между блоками.

$$\psi_j = e^{-\gamma_1 t}\int_0^t e^{\gamma_1\tau}u_j(\tau)d\tau, \quad \varphi_j = e^{-\gamma_2 t}\int_0^t e^{\gamma_2\tau}u_j(\tau)d\tau$$

$$\alpha_1 = \frac{k_1}{K}, \quad \alpha_2 = \frac{k_2}{K}, \quad \gamma_1 = \frac{k_1}{\lambda_1}, \quad \gamma_2 = \frac{k_2}{\lambda_2}, \quad \beta = \frac{\lambda}{K}, \quad K = k + k_1 + k_2$$

Здесь u_j – перемещения жестких блоков, $P(t)$ – действующая нагрузка, приложенная к блоку $j = 0$; K – суммарная жесткость пружин. В (2.1) введены две дополнительные переменные φ_j и ψ_j, которые зависят от функции смещения u_j.

Применим преобразование Фурье по времени к уравнениям движения (2.1). В частотной области ω сила, действующая на блок со стороны прослойки, может быть выражена формулой:

$$\tilde{P}(\omega) = \tilde{F}(\omega)\tilde{u}(\omega)$$

где

$$\tilde{F}(\omega) = K\left[\left(1 - \frac{\alpha_1\gamma_1^2}{\omega^2 + \gamma_1^2} - \frac{\alpha_2\gamma_2^2}{\omega^2 + \gamma_2^2}\right) + i\omega\left(\beta + \frac{\alpha_1\gamma_1}{\omega^2 + \gamma_1^2} + \frac{\alpha_2\gamma_2}{\omega^2 + \gamma_2^2}\right)\right]$$

есть нормированная функция импеданса [16].

Внутреннее затухание в среде обычно определяется коэффициентом добротности $Q(\omega)$ или его обратной величиной $Q^{-1}(\omega)$, которая описывается формулой:

$$Q^{-1}(\omega) = \frac{\operatorname{Im}\tilde{F}(\omega)}{\operatorname{Re}\tilde{F}(\omega)} = \frac{\omega[\beta + \alpha_1\gamma_1/(\omega^2 + \gamma_1^2) + \alpha_2\gamma_2/(\omega^2 + \gamma_2^2)]}{1 - \alpha_1\gamma_1^2/(\omega^2 + \gamma_1^2) - \alpha_2\gamma_2^2/(\omega^2 + \gamma_2^2)} \tag{2.2}$$

Для почв и породных материалов принято предполагать, что целевой коэффициент добротности материала остается постоянным в широком диапазоне интересующих частот, т.е. $Q_0(\omega) = Q_0$, см. [17].

Чтобы связать параметры α_1, α_2, γ_1, γ_2 и β реологической модели с $Q^{-1}(\omega)$ с помощью простых, не зависящих от частоты приближений, введем новые безразмерные параметры $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_2$, $\hat{\gamma}_1$, $\hat{\gamma}_2$, $\hat{\beta}$ и частоту $\hat{\omega}$ по формулам:

$$\begin{gathered}\hat{\alpha}_1 = \alpha_1 Q_0, \quad \hat{\alpha}_2 = \alpha_2 Q_0, \quad \hat{\gamma}_1 = \gamma_1/\omega_{\max} \\ \hat{\gamma}_2 = \gamma_2/\omega_{\max}, \quad \hat{\beta} = \beta\omega_{\max}Q_0, \quad \hat{\omega} = \omega/\omega_{\max}\end{gathered} \tag{2.3}$$

Таблица 1. Значения параметров, соответствующие разным значениям Q_0^{-1}

Q_0^{-1}	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\gamma}_1$	$\hat{\gamma}_2$	$\hat{\beta}$
0.2	0.28	0.28	0.026	0.23	0.14
0.1	0.14	0.14	0.03	0.23	0.07
0.05	0.072	0.072	0.027	0.22	0.035
0.02	0.029	0.029	0.026	0.22	0.014
0.01	0.014	0.014	0.031	0.222	0.0071

где $\omega_{\max}$ – максимальная угловая частота, представляющая интерес для моделирования.

В выражении (2.2) коэффициента $Q^{-1}(\omega)$ перейдем к нормированным параметрам (2.3). Тогда формула (2.2) примет вид:

$$\frac{Q^{-1}(\hat{\omega}, Q_0^{-1})}{Q_0^{-1}} = \frac{Q_0\hat{\omega}[\hat{\beta} + \hat{\alpha}_1\hat{\gamma}_1/(\hat{\omega}^2 + \hat{\gamma}_1^2) + \hat{\alpha}_2\hat{\gamma}_2/(\hat{\omega}^2 + \hat{\gamma}_2^2)]}{1 - \hat{\alpha}_1\hat{\gamma}_1^2/[Q_0(\hat{\omega}^2 + \hat{\gamma}_1^2)] - \hat{\alpha}_2\hat{\gamma}_2^2/[Q_0(\hat{\omega}^2 + \hat{\gamma}_2^2)]}$$

Из этой формулы можно увидеть, что коэффициенты $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_2$, $\hat{\gamma}_1$, $\hat{\gamma}_2$, $\hat{\beta}$ не зависят от $\omega_{\max}$. Отсюда следует, что для заданной постоянной Q_0^{-1}, они должны вычисляться только один раз. При больших значениях целевого коэффициента добротности, то есть $Q_0^{-1} \to 0$, параметры становятся существенно не зависимыми от Q_0.

Задача определения параметров $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_2$, $\hat{\gamma}_1$, $\hat{\gamma}_2$, $\hat{\beta}$ решается с допуском, так чтобы фактический коэффициент добротности оставался бы достаточно близким к целевому значению. Этот допуск, который принимается как 5% от целевого значения, выполняется в пределах от 4% до 100% от $\omega_{\max}$. Т.е. для заданного коэффициента добротности Q_0 параметры $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_2$, $\hat{\gamma}_1$, $\hat{\gamma}_2$, $\hat{\beta}$ подбираются прямой проверкой на компьютере так, чтобы условие

$$[Q^{-1}(\hat{\omega}, Q_0^{-1})Q_0 - 1]^2 < 0.05^2$$

выполнялось для каждого $\hat{\omega}$, удовлетворяющего неравенству $0.04 \le \hat{\omega} \le 1$. Найденные значения параметров, соответствующие пяти значениям целевого коэффициента добротности Q_0^{-1}, представлены в табл. 1.

Для этих значений параметров фактические коэффициенты добротности материала, нормированные относительно Q_0^{-1}, показаны как функции частоты на рис. 2. Как видно на рис. 2, удается подобрать параметры $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_2$, $\hat{\gamma}_1$, $\hat{\gamma}_2$, $\hat{\beta}$ так, что допуск, который принимается как 5% от целевого значения, выполняется в пределах от 4% до 100% от $\omega_{\max}$.

Другим важным аспектом внутренних моделей трения является дисперсия, наблюдаемая во временном отклике системы. Для дискретного уравнения (2.1) дисперсионная зависимость волнового числа q от частоты ω имеет вид:

$$\sin^2\left(\frac{ql}{2}\right) = \frac{M\omega^2}{4\tilde{F}(\omega)} \tag{2.4}$$

Здесь l – длина пружин, q – волновое число. Пользуясь формулой (2.4) и соотношением $c_{ph}(\omega) = \omega/q$, где c_{ph} – фазовая скорость, можем определить зависимость фазовой

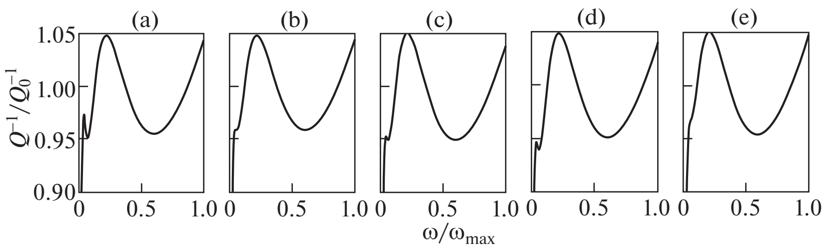

Рис. 2. Зависимости коэффициента добротности материала от частоты: (a) $Q_0^{-1} = 0.2$; (b) $Q_0^{-1} = 0.1$; (c) $Q_0^{-1} = 0.05$; (d) $Q_0^{-1} = 0.02$; (e) $Q_0^{-1} = 0.01$.

скорости от частоты для одномерной модели блочной среды (2.1). Если положить $\omega \to 0$, то из (2.4) получим: $c_{\text{ph}}(0) = l\sqrt{K(1-\alpha_1-\alpha_2)/M}$. Как следует из этой формулы и таблицы 1, фазовая скорость бесконечно длинных волн падает с ростом Q_0^{-1}.

На рис. 3 представлены зависимости $c_{\text{ph}}(\omega)$ при различных значениях коэффициента добротности материала Q_0^{-1}. Здесь и далее полагаем: $l = 1$, $M = 1$, $K = 1$. В прямоугольнике представлены эти же кривые в увеличенном масштабе в низкочастотной зоне. Заметим, что в дискретном случае имеем: $\omega_{\max} = 2\omega_0$, где $\omega_0 = \sqrt{K/M}$. Видно, что наибольшее влияние коэффициента добротности на дисперсию наблюдается в низкочастотной части спектра. Кроме того, видно, что с ростом Q_0^{-1} максимальная скорость распространения возмущений падает. В высокочастотной части спектра фазовая скорость практически не зависит от коэффициента добротности.

На рис. 4 представлены результаты численных расчетов нестационарного волнового процесса в цепочке масс при действии нагрузки $P(t) = H(t)$, где $H(t)$ – ступенчатая функция Хевисайда. Расчеты проведены по одномерной модели с внутренним трением (2.1) для блока с номером $j = 10$. Сплошные кривые соответствуют $Q_0^{-1} = 0$, штрихпунктирные кривые – $Q_0^{-1} = 0.2$. На рис. 4, a показаны деформации прослойки $\Delta u_j = u_{j+1} - u_j$, на рис. 4, b – скорости $\dot{u}_j$ и на рис. 4, c – ускорения $\ddot{u}_j$ в зависимости от времени.

Горизонтальные линии соответствуют статическим значениям: на рис. 4, a – $\Delta u_{\text{st}} = -1/(1-\alpha_1-\alpha_2)$, на рис. 4, b – $\dot{u}_{\text{st}} = 1/\sqrt{1-\alpha_1-\alpha_2}$. К этим значениям стремятся амплитуды деформации прослоек и скоростей блоков при больших значениях времени. Видно, что с ростом Q_0^{-1} увеличивается затухание максимальных амплитуд деформаций прослоек, скоростей и ускорений блоков на фронте низкочастотной волны и падает амплитуда высокочастотных осцилляций Δu_j и $\dot{u}_j$ относительно их статических значений за фронтом волны.

3. Трехмерная модель блочной среды с учетом внутреннего трения. Блочная среда моделируется однородной трехмерной решеткой, состоящей из точечных масс, соединенных пружинами и демпферами в направлениях осей x, y, z и в диагональных направлениях плоскостей xy, xz, yz, как показано на рис. 5, а. Здесь использованы обозначения: u, v – горизонтальные перемещения в направлениях x, y; w – вертикальные перемещения в направлении z; n, m, k – номера блоков в направлениях x, y, z. На по-

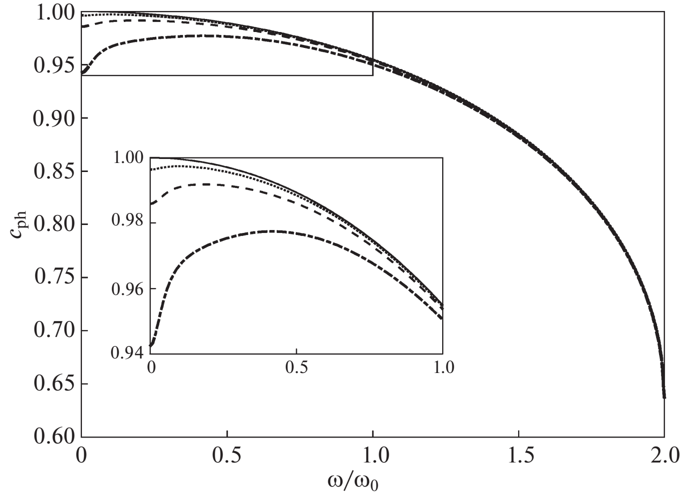

Рис. 3. Зависимость фазовой скорости от частоты для одномерной модели блочной среды. Сплошные кривые – $Q_0^{-1} = 0$, пунктирные кривые – $Q_0^{-1} = 0.05$, штриховые кривые – $Q_0^{-1} = 0.1$, штрих-пунктирные кривые – $Q_0^{-1} = 0.2$.

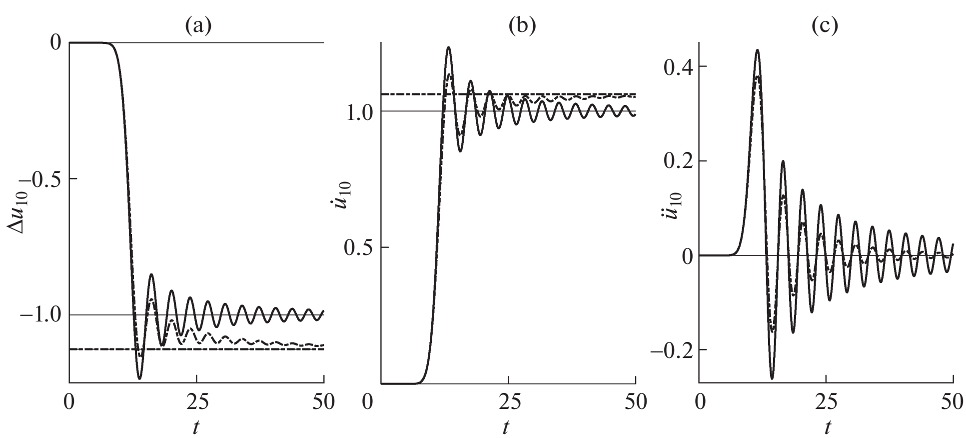

Рис. 4. Зависимости от времени деформации прослойки (a), скорости (b) и ускорения (c) 10-го блока. Сплошные кривые – $Q_0^{-1} = 0$, штрих-пунктирные кривые – $Q_0^{-1} = 0.2$.

верхности блочного полупространства в начале координат приложена вертикальная сосредоточенная нагрузка P (рис. 5, b).

В качестве реологической модели прослоек используется модель прослоек с двумя элементами Максвелла и одним элементом Фойгта, которая только что была продемонстрирована на примере одномерной блочной среды. Далее будем полагать, что жесткости пружин и вязкости демпферов в осевых и диагональных направлениях сов-

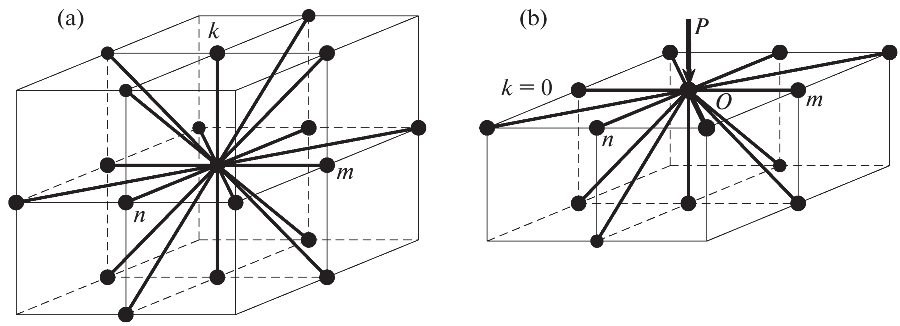

Рис. 5. Схема соединения масс пружинами и демпферами (a) внутри полупространства и (b) на поверхности полупространства.

падают. Кроме того, будем полагать, что параметры M, k, k_1, k_2, λ, λ_1, λ_2 имеют одни и те же значения во всех точках блочной среды.

С учетом внутреннего трения и обозначений

$$\Lambda_{nn} f_{n,m,k} = f_{n+1,m,k} - 2f_{n,m,k} + f_{n-1,m,k}$$

$$\Phi_{nm} f_{n,m,k} = \left(f_{n+1,m+1,k} + f_{n-1,m-1,k} - 4f_{n,m,k} + f_{n+1,m-1,k} + f_{n-1,m+1,k}\right)/2$$

$$\Psi_{nm} f_{n,m,k} = (f_{n+1,m+1,k} + f_{n-1,m-1,k} - f_{n+1,m-1,k} - f_{n-1,m+1,k})/2$$

$$\psi^u_{n,m,k} = \mathrm{e}^{-\gamma_1 t}\int_0^t \mathrm{e}^{\gamma_1\tau} u_{n,m,k}(\tau)\,d\tau, \quad \psi^v_{n,m,k} = \mathrm{e}^{-\gamma_1 t}\int_0^t \mathrm{e}^{\gamma_1\tau} v_{n,m,k}(\tau)\,d\tau, \quad \psi^w_{n,m,k} = \mathrm{e}^{-\gamma_1 t}\int_0^t \mathrm{e}^{\gamma_1\tau} w_{n,m,k}(\tau)\,d\tau$$

$$\varphi^u_{n,m,k} = \mathrm{e}^{-\gamma_2 t}\int_0^t \mathrm{e}^{\gamma_2\tau} u_{n,m,k}(\tau)\,d\tau, \quad \varphi^v_{n,m,k} = \mathrm{e}^{-\gamma_2 t}\int_0^t \mathrm{e}^{\gamma_2\tau} v_{n,m,k}(\tau)\,d\tau, \quad \varphi^w_{n,m,k} = \mathrm{e}^{-\gamma_2 t}\int_0^t \mathrm{e}^{\gamma_2\tau} w_{n,m,k}(\tau)\,d\tau$$

уравнения движения блока с координатами n, m, k, находящегося внутри полупространства ($k < 0$), имеют вид:

$$\begin{aligned} M\ddot{u}_{n,m,k} = K\{&(\Lambda_{nn} + \Phi_{nk} + \Phi_{nm})u_{n,m,k} + \Psi_{nm}v_{n,m,k} + \Psi_{nk}w_{n,m,k} + \\ &+ \beta[(\Lambda_{nn} + \Phi_{nk} + \Phi_{nm})\dot{u}_{n,m,k} + \Psi_{nm}\dot{v}_{n,m,k} + \Psi_{nk}\dot{w}_{n,m,k}] - \\ &- \alpha_1\gamma_1[(\Lambda_{nn} + \Phi_{nk} + \Phi_{nm})\psi^u_{n,m,k} + \Psi_{nm}\psi^v_{n,m,k} + \Psi_{nk}\psi^w_{n,m,k}] - \\ &- \alpha_2\gamma_2[(\Lambda_{nn} + \Phi_{nk} + \Phi_{nm})\varphi^u_{n,m,k} + \Psi_{nm}\varphi^v_{n,m,k} + \Psi_{nk}\varphi^w_{n,m,k}]\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} M\ddot{v}_{n,m,k} = K\{&\Psi_{nm}u_{n,m,k} + (\Lambda_{mm} + \Phi_{mk} + \Phi_{nm})v_{n,m,k} + \Psi_{mk}w_{n,m,k} + \\ &+ \beta[\Psi_{nm}\dot{u}_{n,m,k} + (\Lambda_{mm} + \Phi_{mk} + \Phi_{nm})\dot{v}_{n,m,k} + \Psi_{mk}\dot{w}_{n,m,k}] - \\ &- \alpha_1\gamma_1[\Psi_{nm}\psi^u_{n,m,k} + (\Lambda_{mm} + \Phi_{mk} + \Phi_{nm})\psi^v_{n,m,k} + \Psi_{mk}\psi^w_{n,m,k}] - \\ &- \alpha_2\gamma_2[\Psi_{nm}\varphi^u_{n,m,k} + (\Lambda_{mm} + \Phi_{mk} + \Phi_{nm})\varphi^v_{n,m,k} + \Psi_{mk}\varphi^w_{n,m,k}]\} \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} M\ddot{w}_{n,m,k} = K\{&\Psi_{nk}u_{n,m,k} + \Psi_{mk}v_{n,m,k} + (\Lambda_{kk} + \Phi_{mk} + \Phi_{nk})w_{n,m,k} + \\ &+ \beta[\Psi_{nk}\dot{u}_{n,m,k} + \Psi_{mk}\dot{v}_{n,m,k} + (\Lambda_{kk} + \Phi_{mk} + \Phi_{nk})\dot{w}_{n,m,k}] - \\ &-\alpha_1\gamma_1[\Psi_{nk}\psi^u_{n,m,k} + \Psi_{mk}\psi^v_{n,m,k} + (\Lambda_{kk} + \Phi_{mk} + \Phi_{nk})\psi^w_{n,m,k}] - \\ &- \alpha_2\gamma_2[\Psi_{nk}\varphi^u_{n,m,k} + \Psi_{mk}\varphi^v_{n,m,k} + (\Lambda_{kk} + \Phi_{mk} + \Phi_{nk})\varphi^w_{n,m,k}]\} \end{aligned} \tag{3.3}$$

С учетом обозначений

$$\Lambda_k^- f_{n,m,0} = f_{n+1,m,-1} - f_{n,m,0}, \quad \Phi_{nk}^- f_{n,m,0} = \left(f_{n-1,m,-1} - 2f_{n,m,0} + f_{n+1,m,-1}\right)/2$$

$$\Phi_{mk}^- f_{n,m,0} = \left(f_{n,m-1,-1} - 2f_{n,m,0} + f_{n,m+1,-1}\right)/2, \quad \Psi_{nk}^- f_{n,m,0} = \left(f_{n-1,m,-1} - f_{n+1,m,-1}\right)/2$$

$$\Psi_{mk}^- f_{n,m,0} = \left(f_{n,m-1,-1} - f_{n,m+1,-1}\right)/2$$

уравнения движения блока с координатами n, m, 0, находящегося на свободной поверхности полупространства, имеют вид:

$$\begin{aligned} M\ddot{u}_{n,m,0} = K\{&(\Lambda_{nn} + \Phi_{nk}^- + \Phi_{nm})u_{n,m,0} + \Psi_{nm}v_{n,m,0} + \Psi_{nk}^- w_{n,m,0} + \\ &+ \beta[(\Lambda_{nn} + \Phi_{nk}^- + \Phi_{nm})\dot{u}_{n,m,0} + \Psi_{nm}\dot{v}_{n,m,0} + \Psi_{nk}^- \dot{w}_{n,m,0}] - \\ &- \alpha_1\gamma_1[(\Lambda_{nn} + \Phi_{nk}^- + \Phi_{nm})\psi_{n,m,0}^u + \Psi_{nm}\psi_{n,m,0}^v + \Psi_{nk}^-\psi_{n,m,0}^w] - \\ &- \alpha_2\gamma_2[(\Lambda_{nn} + \Phi_{nk}^- + \Phi_{nm})\varphi_{n,m,0}^u + \Psi_{nm}\varphi_{n,m,0}^v + \Psi_{nk}^-\varphi_{n,m,0}^w]\} \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} M\ddot{v}_{n,m,0} = K\{&\Psi_{nm}u_{n,m,0} + (\Lambda_{mm} + \Phi_{mk}^- + \Phi_{nm})v_{n,m,0} + \Psi_{mk}^- w_{n,m,0} + \\ &+ \beta[\Psi_{nm}\dot{u}_{n,m,0} + (\Lambda_{mm} + \Phi_{mk}^- + \Phi_{nm})\dot{v}_{n,m,0} + \Psi_{mk}^-\dot{w}_{n,m,0}] - \\ &- \alpha_1\gamma_1[\Psi_{nm}\psi_{n,m,0}^u + (\Lambda_{mm} + \Phi_{mk}^- + \Phi_{nm})\psi_{n,m,0}^v + \Psi_{mk}^-\psi_{n,m,0}^w] - \\ &- \alpha_2\gamma_2[\Psi_{nm}\varphi_{n,m,0}^u + (\Lambda_{mm} + \Phi_{mk}^- + \Phi_{nm})\varphi_{n,m,0}^v + \Psi_{mk}^-\varphi_{n,m,0}^w]\} \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} M\ddot{w}_{n,m,0} = K\{&\Lambda_k^- w_{n,m,0} + \Psi_{nk}^- u_{n,m,0} + \Psi_{mk}^- v_{n,m,0} + (\Phi_{mk}^- + \Phi_{nk}^-)w_{n,m,0} + \\ &+ \beta[\Lambda_k^-\dot{w}_{n,m,0} + \Psi_{nk}^-\dot{u}_{n,m,0} + \Psi_{mk}^-\dot{v}_{n,m,0} + (\Phi_{mk}^- + \Phi_{nk}^-)\dot{w}_{n,m,0}] - \\ &- \alpha_1\gamma_1[\Lambda_k^-\psi_{n,m,0}^w + \Psi_{nk}^-\psi_{n,m,0}^u + \Psi_{mk}^-\psi_{n,m,0}^v + (\Phi_{mk}^- + \Phi_{nk}^-)\psi_{n,m,0}^w] - \\ &- \alpha_2\gamma_2[\Lambda_k^-\varphi_{n,m,0}^w + \Psi_{nk}^-\varphi_{n,m,0}^u + \Psi_{mk}^-\varphi_{n,m,0}^v + (\Phi_{mk}^- + \Phi_{nk}^-)\varphi_{n,m,0}^w]\} + P(t)\delta_{n0}\delta_{m0} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Здесь δ_{n0} – символ Кронекера, $P(t)$ – амплитуда, действующей поверхностной нагрузки. Начальные условия нулевые.

Как показано в [8], уравнениям (3.1) – (3.6), описывающим движение блочного полупространства с упругими прослойками ($\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, $\beta = 0$), соответствуют скорости продольных (c_p), сдвиговых (c_s) и рэлеевских (c_R) бесконечно длинных волн:

$$c_\text{p} = l\sqrt{\frac{3K}{M}}, \quad c_\text{s} = l\sqrt{\frac{K}{M}}, \quad c_\text{R} = l\sqrt{\frac{2K}{M}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} \tag{3.7}$$

С использованием модели блочной среды (3.1) – (3.6), численно решаются две задачи о распространении волн в трехмерной блочной среде с учетом внутреннего трения при сосредоточенном вертикальном воздействии, приложенном в начале координат. В задаче *1* нагрузка действует на поверхность блочного полупространства. В задаче *2* нагрузка действует на поверхность блочного слоя, лежащего на блочном полупространстве, причем свойства слоя и полупространства различаются.

Для этих задач исследуется реакция блочной среды на два вида действующей нагрузки: (а) ступенчатое воздействие, т.е. $P(t) = P_0 H(t)$; (б) импульс Гаусса, т.е. $P(t) = P_0 \exp[-(t - 4\sigma)^2/(2\sigma^2)]$.

4. Разностная схема. Уравнения (3.1)–(3.6) с нулевыми начальными данными решались методом конечных разностей по явной схеме. Для вторых производных по времени использовалась центрально-разностная аппроксимация второго порядка точности, для первых производных по времени применялась разность "назад" первого порядка точности:

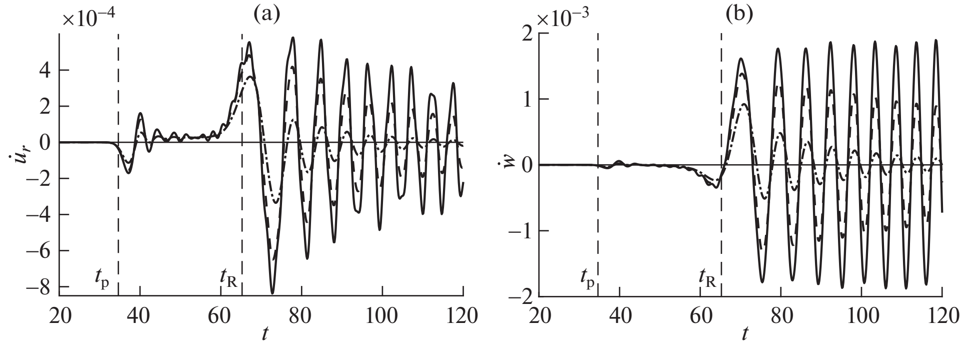

Рис. 6. Зависимости от времени радиальной (a) и вертикальной (b) скоростей блоков в точке (60, 0, 0) при действии ступенчатой нагрузки. Сплошные кривые – $Q_0^{-1} = 0$, штриховые кривые – $Q_0^{-1} = 0.1$, штрих-пунктирные кривые – $Q_0^{-1} = 0.2$.

$$\ddot{u}_{n,m,k} \approx (u_{n,m,k}^{s+1} - 2u_{n,m,k}^{s} + u_{n,m,k}^{s-1})\big/\tau^2, \quad s = 0,1,2,\ldots$$

$$\dot{u}_{n,m,k} \approx (u_{n,m,k}^{s} - u_{n,m,k}^{s-1})\big/\tau, \quad s = 0,1,2,\ldots$$

Здесь τ – шаг разностной сетки по времени, $u_{n,m,k}^{s}$ – значение перемещения $u_{n,m,k}(t)$ в момент времени $t = s\tau$, s – номер слоя по времени в конечно-разностной схеме. Для дополнительных функций использовались аппроксимации следующего вида:

$$\psi_{n,m,k}^{u,s} = \tau[u_{n,m,k}^{s}(1-\gamma_1\tau) + u_{n,m,k}^{s-1}]/2 + \psi_{n,m,k}^{u,s-1}e^{-\gamma_1\tau}$$

$$\varphi_{n,m,k}^{u,s} = \tau[u_{n,m,k}^{s}(1-\gamma_2\tau) + u_{n,m,k}^{s-1}]/2 + \varphi_{n,m,k}^{u,s-1}e^{-\gamma_2\tau}$$

5. Результаты численных расчетов задачи *1* с учетом внутреннего трения. В этой секции представлены результаты численных расчетов возмущений в задаче Лэмба с учетом внутреннего трения, проведенных при $P_0 = 1$ и $\tau = \pi/20$. Масса блоков, длина пружин и суммарная жесткость прослоек приняты за единицы: $M = 1$, $l = 1$, $K = 1$.

На рис. 6 – 9 приведены результаты расчетов вертикальных $\dot{w} = \dot{w}_{n,m,k}$ и радиальных $\dot{u}_r = \left(n\,\dot{u}_{n,m,k} + m\,\dot{v}_{n,m,k}\right)\big/(n^2+m^2)^{1/2}$ скоростей блоков в цилиндрической системе координат r, θ, z на поверхности блочного полупространства ($k = 0$) на оси $m = 0$.

На рис. 6 приведены графики зависимости от времени радиальной $\dot{u}_r$ и вертикальной $\dot{w}$ скоростей блоков в точке (60, 0, 0), рассчитанные при действии ступенчатой нагрузки при различных значениях коэффициента добротности материала Q_0^{-1}. Вертикальные линии соответствуют моментам времени прихода продольных волн $t_p = n/c_p$ и рэлеевских волн $t_R = n/c_R$, где c_p и c_R определяются по формулам (3.7). Видно, что с ростом Q_0^{-1} увеличивается затухание амплитуды скоростей блоков для всего спектра частот.

На рис. 7 приведены результаты расчетов максимальных значений абсолютных величин амплитуд радиальной и вертикальной скоростей блоков при действии ступенчатой по времени нагрузки. На рис. 7, a, b показаны зависимости этих величин от координаты n для различных значений коэффициента добротности Q_0^{-1}, на рис. 7, c – за-

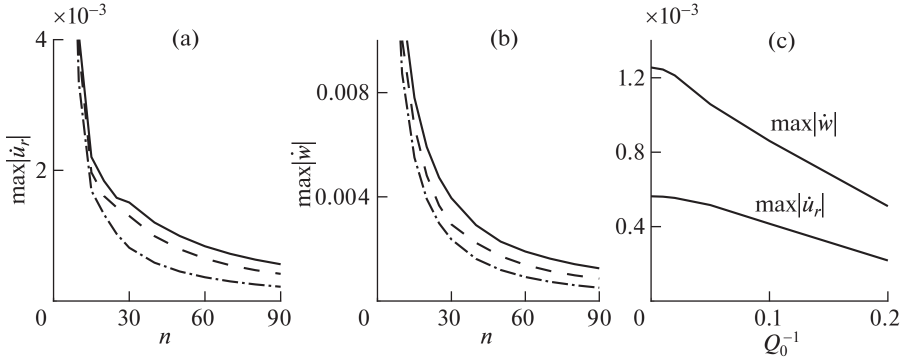

Рис. 7. Зависимости от координаты n максимальных значений абсолютных величин амплитуд радиальной (a) и вертикальной (b) скоростей блоков на поверхности блочного полупространства; (c) зависимости от коэффициента добротности Q_0^{-1} максимальных значений абсолютных величин радиальной и вертикальной скоростей блоков в точке (90, 0, 0). Сплошные кривые – $Q_0^{-1} = 0$, штриховые кривые – $Q_0^{-1} = 0.1$, штрихпунктирные кривые – $Q_0^{-1} = 0.2$.

висимости от коэффициента добротности Q_0^{-1} в точке (90, 0, 0). Видно, что при увеличении коэффициента Q_0^{-1} максимальные значения абсолютных величин амплитуд $\dot{u}_r$ и $\dot{w}$ падают быстрее с ростом n и их зависимость от коэффициента Q_0^{-1} близка к линейной.

На рис. 8 приведены графики зависимости от времени радиальной и вертикальной скоростей блоков в точке (60, 0, 0), рассчитанные при различных значениях коэффициента добротности Q_0^{-1} при действии импульса Гаусса ($\sigma = 5$). Вертикальные линии соответствуют моментам прихода продольных и рэлеевских волн. Видно, что с ростом Q_0^{-1} уменьшаются амплитуды скоростей блоков и увеличивается время наступления максимальных амплитуд скоростей. Последнее объясняется уменьшением скорости низкочастотных волн, что можно видеть на рис. 2.

На рис. 9 приведены результаты расчетов максимальных значений абсолютных величин амплитуд радиальной и вертикальной скоростей блоков на поверхности блочного полупространства при действии импульса Гаусса ($\sigma = 5$). На рис. 9, a, b показаны зависимости этих величин от координаты n для различных значений коэффициента добротности Q_0^{-1}, на рис. 9, c – зависимости от коэффициента добротности Q_0^{-1} в точке (100, 0, 0).

Для графиков, представленных на рис. 9, a, b получены приближенные аппроксимации степенной функцией результатов численных расчетов:

$$Q_0^{-1} = 0.2\colon \max|\dot{u}_r| = 0.0055n^{-0.695}, \quad \max|\dot{w}| = 0.0102n^{-0.738}$$

$$Q_0^{-1} = 0.1\colon \max|\dot{u}_r| = 0.0039n^{-0.546}, \quad \max|\dot{w}| = 0.0074n^{-0.607}$$

$$Q_0^{-1} = 0\colon \max|\dot{u}_r| = 0.0035n^{-0.495}, \quad \max|\dot{w}| = 0.0067n^{-0.562}$$

Анализ этих приближенных функций и графиков на рис. 9, a, b показывает, что с ростом коэффициента Q_0^{-1} скорость затухания максимальных по модулю значений $\dot{u}_r$, $\dot{w}$

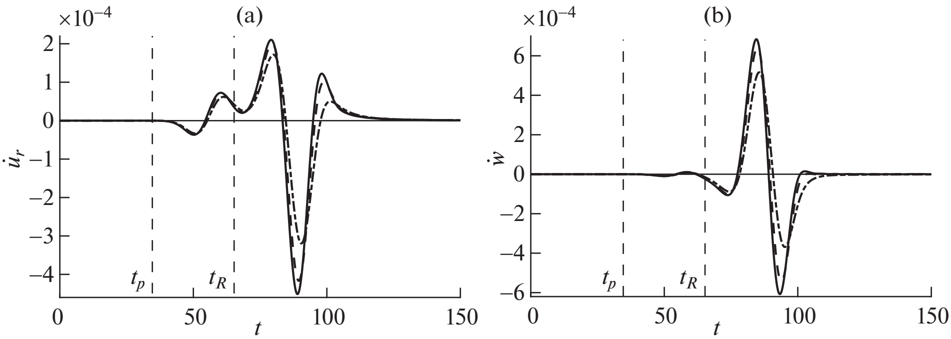

Рис. 8. Зависимости от времени радиальной (a) и вертикальной (b) скоростей блоков в точке (60,0,0) при действии импульса Гаусса. Сплошные кривые – $Q_0^{-1} = 0$, штриховые кривые – $Q_0^{-1} = 0.1$, штрих-пунктирные кривые – $Q_0^{-1} = 0.2$.

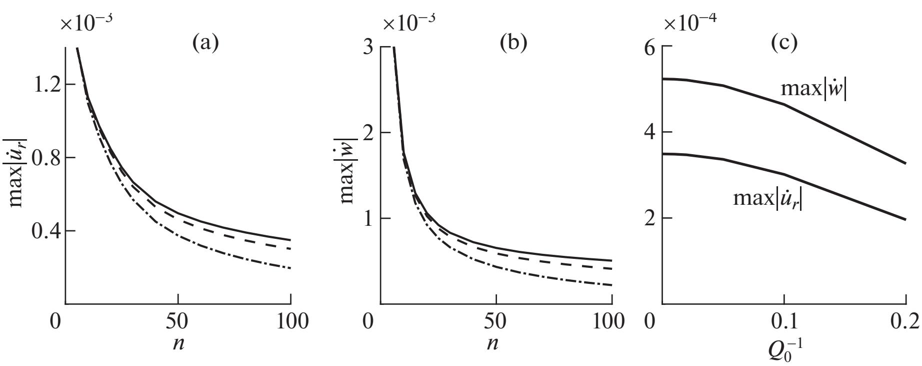

Рис. 9. Зависимости от координаты n максимальных значений абсолютных величин амплитуд радиальной (a) и вертикальной (b) скоростей блоков при различных значениях коэффициента добротности Q_0^{-1}; (c) зависимости от коэффициента добротности Q_0^{-1} максимальных значений абсолютных величин амплитуд радиальной и вертикальной скоростей в точке (100, 0, 0). Сплошные кривые – $Q_0^{-1} = 0$, штриховые кривые – $Q_0^{-1} = 0.1$, штрих-пунктирные кривые – $Q_0^{-1} = 0.2$.

с удалением от места воздействия растет. На рис. 9, с видно, что зависимость максимальных по модулю амплитуд скоростей блоков от коэффициента Q_0^{-1} близка к параболической.

6. Результаты численных расчетов задач *1* и *2* с учетом внутреннего трения. Ниже, на рис. 10 представлены результаты численных расчетов двух задач с учетом внутреннего трения при воздействии вертикального сосредоточенного импульса Гаусса, во-первых, на поверхность блочного полупространства (задача *1* – штриховые кривые) и, во-вторых, на поверхность блочного слоя, лежащего на блочном полупространстве, имеющем другие свойства (задача *2* – сплошные кривые).

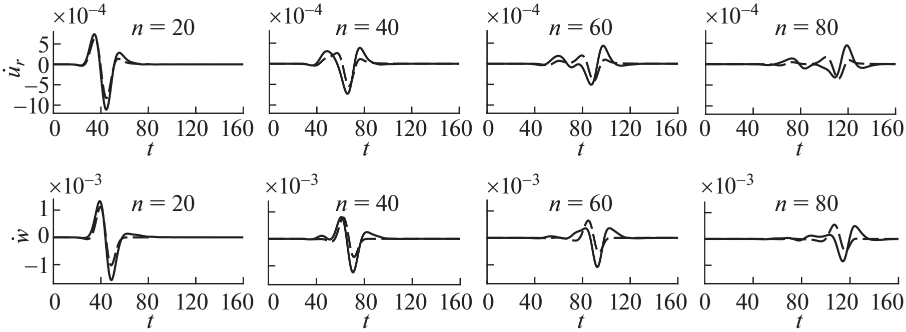

Рис. 10. Зависимости от времени радиальных и вертикальных скоростей блоков на поверхности блочного полупространства. Штриховые кривые – блочное полупространство, сплошные кривые – блочный слой на блочном полупространстве. Верхний ряд графиков – радиальные скорости блоков, нижний ряд – вертикальные скорости.

На рис. 10 показаны зависимости от времени радиальных и вертикальных скоростей блоков на поверхности блочного полупространства, находящихся на различном расстоянии от места воздействия ($n = 20, 40, 60, 80$). Коэффициент добротности $Q_0^{-1} = 0.1$ для блочного полупространства (задача *1*) и для слоя, лежащего на полупространстве (задача *2*). Коэффициент добротности $Q_0^{-1} = 0.05$ для блочного полупространства, лежащего под слоем (задача *2*). Кроме того, скорость распространения волн в блочном полупространстве и в блочном слое, лежащем на полупространстве, в два раза меньше, чем скорость распространения волн в полупространстве, лежащем под слоем.

Видно, что отражение и преломление волн на нижней границе слоя приводит к перестройке волны, бегущей по поверхности полупространства. В задаче для полупространства максимальная амплитуда скоростей блоков меньше, чем в задаче для слоя на полупространстве.

7. Заключение. Проведено математическое моделирование процесса распространения волн в блочной среде с учетом внутреннего трения при нестационарном воздействии. Предложенная модель является новой и основана на идее, что динамическое поведение блочной среды можно грубо описать как движение жестких блоков за счет сжимаемости прослоек между ними, и что деформация прослоек может быть приблизительно описана элементами Максвелла и Фойгта.

Использование реологической модели прослоек между блоками с двумя элементами Максвелла и одним элементом Фойгта позволяет подбирать параметры вязкости и жесткости этих элементов, так чтобы коэффициент добротности материала отличался от заданного постоянного значения не больше, чем на 5% на интервале частот от 4% до 100% от максимальной частоты, представляющей интерес.

С помощью этой модели численно решена задача Лэмба, а именно, изучено распространение сейсмических волн в блочной среде при нестационарном сосредоточенном вертикальном воздействии на поверхность полупространства и на поверхность слоя, лежащего на полупространстве. Для задачи Лэмба исследована степень затухания максимальных амплитуд скоростей перемещений блоков на поверхности блочного полупространства в зависимости от коэффициента добротности материала и расстояния от места воздействия. Показано, что в задаче для полупространства максимальная амплитуда скоростей блоков меньше, чем в задаче для слоя на полупространстве.

В отличие от работы [8], в которой использовалась модель Фойгта для моделирования деформации прослоек, предложенная в этой статье модель с почти постоянным коэффициентом добротности демонстрирует более равномерное затухание амплитуд возмущений для всего спектра интересующих частот.

Полученные выше результаты показывают, что наличие блочной структуры в среде приводит к следующим изменениям ее поведения по сравнению с тем, что предсказывает модель однородной упругой среды, механические свойства которой получены путем усреднения механических свойств блочной среды: (а) в отличие от однородной упругой среды, в блочной среде волны распространяются с дисперсией; (б) скорости распространения низкочастотных продольных и рэлеевских волн на поверхности блочной среды намного меньше соответствующих скоростей в однородной упругой среде; (в) основной вклад в волновой процесс на поверхности блочной среды вносят низкочастотные волны в окрестности фронта волны Рэлея; (г) за фронтом волны Рэлея в блочной среде наблюдаются высокочастотные колебания, отсутствующие в однородной упругой среде; (д) скорость распространения низкочастотных волн и степень их затухания определяются массой блоков, их размерами и свойствами прослоек; (е) диссипативные свойства прослоек приводят к дополнительному затуханию на поверхности полупространства низкочастотных возмущений вблизи фронта волны Рэлея и высокочастотных осцилляций за фронтом волны Рэлея.

Работа выполнена в рамках проекта НИР, номер государственной регистрации 121062200075-4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Садовский М.А.* Естественная кусковатость горной породы // ДАН СССР. 1979. Т. 247. № 4. С. 829–832.
2. *Курленя М.В., Опарин В.Н., Востриков В.И.* Волны маятникового типа. Ч. II: Методика экспериментов и основные результаты физического моделирования // ФТПРПИ. 1996. № 4. С. 3–38.
3. *Курленя М.В., Опарин В.Н., Востриков В.И. и др.* Волны маятникового типа. Ч. III: Данные натурных измерений // ФТПРПИ. 1996. № 5. С. 3–27.
4. *Шер Е.Н., Черников А.Г.* Об оценке параметров структуры блочных сред на модельном примере сейсмического зондирования кирпичной стены // ФТПРПИ. 2020. № 4. С. 11–17.
5. *Александрова Н.И.* О распространении упругих волн в блочной среде при импульсном нагружении // ФТПРПИ. 2003. № 6. С. 38–47.
6. *Курленя М.В., Опарин В.Н., Востриков В.И.* О формировании упругих волновых пакетов при импульсном возбуждении блочных сред. Волны маятникового типа U_μ // ДАН СССР. 1993. Т. 333. № 4. С. 3–13.
7. *Александрова Н.И., Черников А.Г., Шер Е.Н.* Экспериментальная проверка одномерной расчетной модели распространения волн в блочной среде // ФТПРПИ. 2005. № 3. С. 46–55.
8. *Aleksandrova N.I.* Seismic waves in a three-dimensional block medium // Proc. R. Soc. A. 2016. V. 472. № 2192. P. 20160111.
https://doi.org/10.1098/rspa.2016.0111
9. *Александрова Н.И.* Волны маятникового типа на поверхности блочного породного массива при динамическом воздействии // ФТПРПИ. 2017. № 1. С. 64–69.
10. *Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V.* Supercomputer modeling of wave propagation in blocky media accounting fractures of interlayers // Nonlinear Wave Dynamics of Materials and Structures. Advanced Structured Materials. V. 122 / Ed. by *H. Altenbach, V. Eremeyev, I. Pavlov, A. Porubov*. Springer, 2020. P. 379–398.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-38708-2_22.
11. *Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V.* Numerical algorithm based on implicit finite-difference schemes for analysis of dynamic processes in blocky media // Russ. J. Num. Anal. Math. Modell. 2018. V. 33. № 2. P. 111–121.
https://doi.org/10.1515/rnam-2018-0010

12. *Zener C.M.* Elasticity and anelasticity of metals. 1st. ed. Chicago: University of Chicago Press, 1948.
13. *Biot M.A.* Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena // J. Appl. Phys. 1954. V. 25. P. 1385–1391. https://doi.org/10.1063/1.1721573
14. *Fung Y.C.* Fundations of solid mechanics. Prentice Hall, Inc, 1965.
15. *Bielak J., Karaoglu H., Taborda R.* Memory-efficient displacement-based internal friction for wave propagation simulation // Geophys. 2011. V. 76. № 6. T131–T145. https://doi.org/10.1190/geo2011-0019.1
16. *Toksöz M., Johnston D.* Seismic wave attenuation. Tulsa, Okla.: Society of Exploration Geophysicists, 1981.
17. *Kjartansson E.* Constant *Q*-wave propagation and attenuation // J. Geophys. Res. 1979. V. 84. P. 4737–4748. https://doi.org/10.1029/JB084iB09p04737