ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2022, № 3, с. 40–55

УДК 539.376

УСТАНОВИВШАЯСЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ ДЛИННОЙ УЗКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕМБРАНЫ ВНУТРИ НИЗКОЙ ЖЕСТКОЙ МАТРИЦЫ ПРИ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ВЕЛИЧИНЫ ПОПЕРЕЧНОГО ДАВЛЕНИЯ ОТ ВРЕМЕНИ

© 2022 г. А. Ф. Ахметгалеев[a,*], А. М. Локощенко[a,], Л. В. Фомин[a,b,***]**

[a] *Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

[b] *Самарский государственный технический университет, Самара, Россия*

**e-mail Achmet206A@yandex.ru*

***e-mail loko@imec.msu.ru*

****e-mail fleonid1975@mail.ru*

Поступила в редакцию 04.03.2021 г.
После доработки 09.04.2021 г.
Принята к публикации 24.05.2021 г.

Исследуется задача об установившейся ползучести длинной узкой прямоугольной мембраны в стесненных условиях внутри жесткой матрицы при пропорциональном возрастании величины поперечного давления от времени (с разными скоростями). Задача решается с учетом геометрической и физической нелинейности. В задаче рассматривается длинная жесткая матрица прямоугольного сечения, в которой высота не больше половины ширины. Рассматриваются два варианта условий контакта мембраны и матрицы: идеальное скольжение и прилипание. В данной работе исследованы три стадии ползучести мембраны. На первой стадии мембрана деформируется в условиях установившейся ползучести вплоть до момента касания поперечной стенки матрицы. Вторая стадия заканчивается в момент касания мембраной продольных стенок матрицы. На третьей стадии мембрана контактирует с матрицей по поперечной и продольным сторонам. Расчет проводится до времени практически полного прилегания мембраны к матрице. Представляет интерес сравнение этих времен при различных контактных условиях. В общем случае соотношение этих времен зависит от двух параметров: показателя степени в определяющем уравнении установившейся ползучести материала мембраны и величины безразмерной высоты матрицы. В данной задаче при различных скоростях возрастания величины поперечного давления и при различных степенях близости мембраны к матрице времена окончания стадий нагружения при идеальном скольжении меньше, чем при прилипании. Результаты исследований могут быть использованы при расчетах формовки мембраны в жесткой матрице.

Ключевые слова: длинная узкая мембрана, установившаяся ползучесть, низкая жесткая матрица, поперечное давление, идеальное скольжение, прилипание

DOI: 10.31857/S0572329922020027

1. Введение. Данная работа посвящена аналитическому исследованию установившейся ползучести в стесненных условиях длинной узкой прямоугольной мембраны, закрепленной вдоль длинных сторон и нагруженной равномерным поперечным давлением q, которое может изменяться во времени t по заданному закону. Решение этой задачи в свободных условиях при различных физических и геометрических условиях приведено в монографиях Одквиста [1], Л.М. Качанова [2], Сторакерса [3].

В [4] проведено экспериментальное измерение деформации мембран из разных эластомеров. В [5] исследовано раздувание круглой мембраны при больших деформациях. Вязкоупругие характеристики материала мембраны описываются нелинейным интегральным определяющим уравнением. Представленный численный метод решения сочетает методы решения нелинейных интегральных уравнений Вольтерра и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

В [6–8] приведены результаты теоретического исследования ползучести и длительной прочности мембран из анизотропных материалов. В [6] приведена математическая модель процесса изотермического свободного деформирования узкой прямоугольной мембраны из анизотропного листового материала, подчиняющегося энергетическому варианту кинетической теории ползучести и длительной прочности. Установлено, что с ростом коэффициента нормальной анизотропии предельные возможности исследованных процессов формоизменения возрастают. В [6, 7] приведена математическая модель процесса изотермического свободного деформирования узкой прямоугольной мембраны из анизотропного листового материала, подчиняющегося энергетическому варианту кинетической теории ползучести и длительной прочности. Показано влияние анизотропии механических свойств материала, геометрических размеров заготовки и накопления поврежденности на напряженное деформированное состояние заготовки, силовые режимы и предельные возможности формообразования. На основе разработанных математических моделей деформирования выполнены теоретические исследования процессов изотермического свободного деформирования узкой прямоугольной мембраны, формообразования угловых элементов многослойных конструкций, штамповки и калибровки трапециевидных элементов трехслойных листовых конструкций из анизотропных высокопрочных материалов в режиме кратковременной ползучести [8]. Выполнено сопоставление результатов расчетов при анализе изотермического свободного деформирования узкой прямоугольной мембраны в предположении переменной и постоянной толщин стенки вдоль дуги окружности.

Особый интерес представляет исследование ползучести рассматриваемой мембраны внутри жесткой матрицы. Ефимов А.Б. с соавторами [9] составили обзор основных феноменологических закономерностей, описывающих постановку задачи контактного взаимодействия общего вида.

В монографиях [10, 11] рассмотрен цикл задач о ползучести такой мембраны внутри жесткой матрицы. В [11] приведены решения задач при учете различных форм матриц: клиновидной [12], криволинейной [13] и прямоугольной при различных условиях на контакте мембраны и матрицы. Во всех приведенных решениях величина равномерного поперечного давления q не зависит от времени t. В различных решениях использовались разные модели ползучести: установившаяся, неустановившаяся, дробно-степенная. В случае применения дробно-степенной модели ползучести [14] в зависимости от контактных условий с течением времени мембрана либо заполняет пространство внутри матрицы за конечное или бесконечное время, либо разрушается внутри матрицы [12]. В [15] приведено решение аналогичной задачи об установившейся ползучести мембраны при кусочно-постоянной зависимости скорости изменения величины поперечного давления от времени.

В [12] проведено моделирование деформирования длинной узкой прямоугольной мембраны внутри жесткой клиновидной матрицы при различных подходах и различных краевых условиях. Получены все основные соотношения, характеризующие напряженно-деформированное состояние мембраны на различных стадиях деформирования. Приведены результаты численных экспериментов, в которых исследуются особенности деформирования мембран вплоть до разрушения. Аналогичное решение для П-образной матрицы приведено в [16].

В [17] исследована деформация нелинейной вязкоупругой однородной сферической мембраны, содержащей несжимаемую жидкость между двумя жесткими параллельными пластинами. Материал мембраны моделируется нелинейным интегральным определяющим соотношением, которое в частном случае включает квазилинейную вязкоупругость.

В статье Р.А. Васина с соавторами [18] приведено экспериментально-теоретическое исследование ползучести мембран в стесненных условиях. Сформулированы особенности процедуры идентификации определяющих соотношений (нахождения материальных констант) по результатам экспериментов. Приведены методика и результаты определения материальных констант из экспериментов по формовке цилиндрических и сферических оболочек из листовых заготовок.

Методика идентификации определяющих соотношений уравнения ползучести, основанная на использовании упрощенной инженерной модели процесса сверхпластической формовки листового проката в прямоугольную матрицу, построена в рамках основных предположений безмоментной теории оболочек [19]. Применимость этой упрощенной модели обоснована путем прямого сопоставления результатов аналитических расчетов с экспериментальными данными.

Авторы [20] представили теоретическое и численное исследования деформирования нелинейной вязкоупругой прямоугольной мембраны, нагруженной равномерным давлением.

Авторами [21] описаны большие контактные деформации и явление адгезии между раздутой гиперупругой мембраной и жесткой подложкой. Исходная форма мембраны – плоская, круглая, закрепленная по краю. Допустимы два условия контакта между мембраной и подложкой: контакт без трения и прилипание. Проведен анализ энергетического баланса без учета диссипации энергии.

В [22] изучается контакт длинной прямоугольной упругой мембраны с жесткой подложкой. Построенная модель основана на теории конечных деформаций. Учтены два условия контакта: идеальное скольжение и прилипание, для контакта без трения получено точное решение в замкнутой форме.

2. Постановка задачи. В данной работе исследуется установившаяся ползучесть мембраны толщины H_0 внутри жесткой матрицы прямоугольной формы. Ширина, длина и высота матрицы равны соответственно $2a$, L, b. Отношение высоты матрицы к половине ширины удовлетворяет неравенству $\frac{b}{a} \le 1$ (рис. 1). Ширина мембраны $2a$ и ее длина L удовлетворяет неравенству $\frac{2a}{L} \ll 1$. Здесь рассматривается не постоянная величина поперечного давления $q(t) = \mathrm{const}$, а пропорциональная зависимость величины $q(t)$

$$q(t) = q_0 k \frac{t}{t_0} \tag{2.1}$$

Для описания деформирования мембраны при $t > 0$ (t – время) используется степенная модель установившейся ползучести материала

$$\frac{dp_u}{dt} = \frac{1}{t_0}\left(\frac{\sigma_u}{\sigma_0}\right)^n \tag{2.2}$$

в которой σ_u и $\dot{p}_u$ – интенсивности напряжений и скоростей деформаций ползучести соответственно, σ_0, t_0 и n – постоянные величины соответствующей размерности.

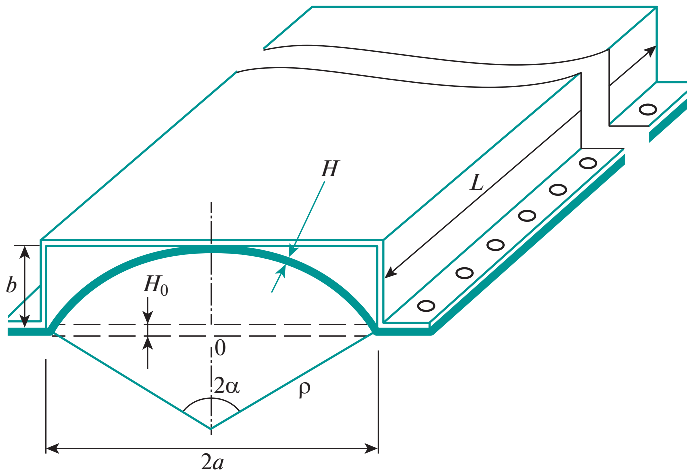

Рис. 1. Общий вид.

Координаты поперечного сечения мембраны и матрицы назовем x и y (рис. 2). На первой стадии мембрана, плоская в начальном состоянии, под действием давления q деформируется, приобретая форму незамкнутой круговой цилиндрической оболочки с центральным углом 2α. При этом на первой стадии мембрана деформируется в условиях установившейся ползучести вплоть до касания поперечной стенки жесткой матрицы; можно показать, что угол раствора мембраны в конце этой стадии равен

$$2\alpha_1 = 2\arcsin\left(\frac{2ab}{a^2 + b^2}\right)$$

При моделировании напряженно-деформированного состояния мембраны рассматриваются главные напряжения (радиальное σ_{rr}, окружное $\sigma_{\theta\theta}$ и осевое σ_{zz}) и соответствующие компоненты тензора деформаций ползучести p_{rr}, $p_{\theta\theta}$ и p_{zz}.

Рассматривая элемент мембраны (рис. 3), принимая напряжения в элементе равномерно распределенными по толщине и записывая уравнения равновесия в проекциях на нормаль и касательную, получаем:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{q\rho}{H}, \quad d\left(\sigma_{\theta\theta}H\right) = 0 \tag{2.3}$$

где ρ — радиус кривизны срединной поверхности, H — толщина мембраны.

Следовательно,

$$\sigma_{\theta\theta}H = \text{const} \tag{2.4}$$

Сопоставляя (2.3) и (2.4), заключаем, что в случае равномерного давления радиус кривизны срединной поверхности во всех ее точках один и тот же $(\rho = \text{const})$, т.е. срединная поверхность мембраны при ее деформировании является частью поверхности кругового цилиндра с некоторым углом раствора 2α [3]. В этом случае очевидно, что если толщина мембраны до деформации постоянна, то она постоянна и после деформации. Следовательно, согласно (2.3) окружное напряжение по длине окружности радиуса ρ не изменяется.

3. Свободное деформирование мембраны в условиях ползучести (первая стадия). Введем безразмерные переменные:

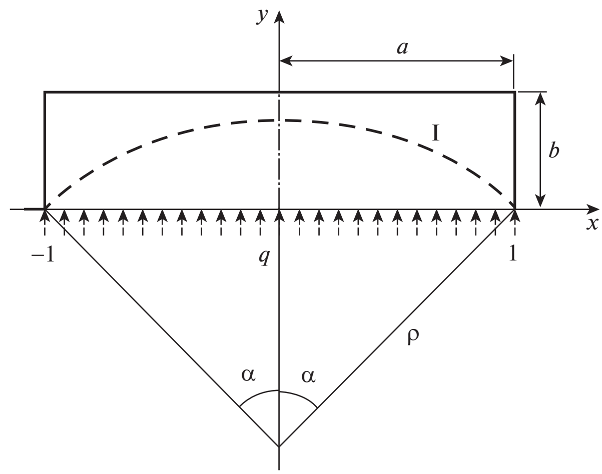

Рис. 2. Первая стадия деформирования.

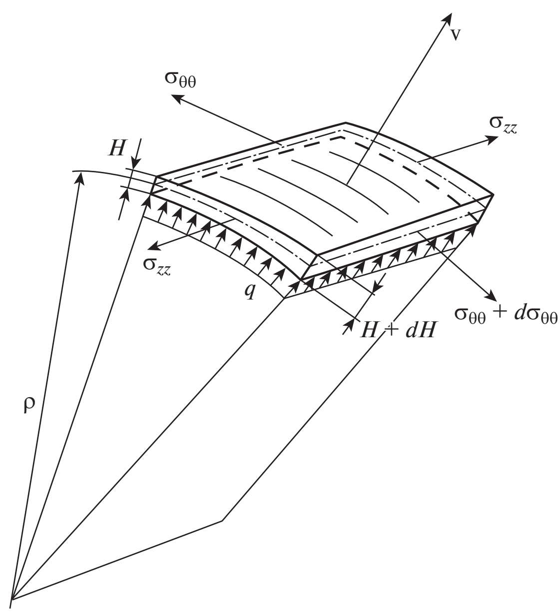

Рис. 3. Элемент мембраны.

$$
\begin{gathered}
\bar{q} = \frac{q}{\sigma_0}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \bar{H} = \frac{H}{H_0}, \quad \bar{H}_0 = \frac{H_0}{a}, \quad \bar{b} = \frac{b}{a}, \quad \bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{y} = \frac{y}{a} \\
\bar{x}_0 = \frac{x_0}{a}, \quad \bar{y}_0 = \frac{y_0}{a}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{a}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0} \quad (i, j = 1, 2, 3)
\end{gathered} \tag{3.1}
$$

x и y — горизонтальная и вертикальная координаты поперечного сечения матрицы, x_0 и y_0 — координаты точек касания мембраны и матрицы.

Далее черточки над всеми безразмерными переменными (3.1) опустим. При этом под скоростями всюду понимаются производные по безразмерному времени.

В качестве связи компонент тензоров напряжений и скоростей деформаций ползучести примем гипотезу пропорциональности соответствующих девиаторов (см., например, [4]):

$$\dot{p}_{ij} = \frac{3f(\sigma_u)}{2\sigma_u}(\sigma_{ij} - \sigma), \quad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})$$
$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2 + 6(\sigma_{r\theta}^2 + \sigma_{\theta z}^2 + \sigma_{rz}^2)} \tag{3.2}$$

В рассматриваемом плоском деформированном состоянии скорость осевой деформации ползучести $\dot{p}_{zz}$ принимается равной нулю:

$$\dot{p}_{zz} = 0 \tag{3.3}$$

Далее всюду будем обозначать $H_i(t)$ толщину мембраны на i-й стадии $(i = 1 \div 3)$.

Примем, как обычно, для тонкостенных цилиндрических оболочек равенство:

$$\sigma_{rr} = 0 \tag{3.4}$$

в этом случае из гипотезы пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций ползучести (3.2) при учете (3.4) следует:

$$\sigma_{zz} = 0.5\sigma_{\theta\theta}, \quad \sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{q\rho}{H_0 H_1} \tag{3.5}$$

Рассматривая два близких деформированных состояния мембраны, определим приращение окружной деформации ползучести, учитывая, что деформированное состояние однородное:

$$dp_{\theta\theta} = \frac{(\rho + d\rho)(\alpha + d\alpha) - \rho\alpha}{\rho\alpha} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\alpha}{\alpha}$$

Следовательно, скорость окружной деформации ползучести равна

$$\dot{p}_{\theta\theta} = \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \tag{3.6}$$

Поскольку

$$\rho\sin\alpha = 1 \tag{3.7}$$

то

$$\dot{\rho}\sin\alpha + \rho\dot{\alpha}\cos\alpha = 0$$

Поэтому выражение (3.6) преобразуется к виду:

$$\dot{p}_{\theta\theta} = \left(\frac{1}{\alpha} - \mathrm{ctg}\alpha\right)\dot{\alpha} \tag{3.8}$$

Из условия несжимаемости в случае плоского деформированного состояния получаем:

$$\dot{p}_{rr} + \dot{p}_{\theta\theta} + \dot{p}_{zz} = 0, \quad \dot{p}_{zz} = 0, \quad \dot{p}_{rr} = -\dot{p}_{\theta\theta}$$
$$\dot{p}_u = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\dot{p}_{rr} - \dot{p}_{\theta\theta})^2 + (\dot{p}_{\theta\theta} - \dot{p}_{zz})^2 + (\dot{p}_{zz} - \dot{p}_{rr})^2 + 6[(\dot{p}_{\theta r})^2 + (\dot{p}_{\theta z})^2 + (\dot{p}_{zr})^2]} \tag{3.9}$$
$$\dot{p}_u = \frac{2}{\sqrt{3}}\dot{p}_{\theta\theta}$$

Так как скорость радиальной деформации ползучести равна

$$\dot{p}_{rr} = \frac{\dot{H}_1}{H_1}$$

то согласно равенствам (3.8)–(3.9) получаем:

$$-\frac{\dot{H}_1}{H_1} = \left(\frac{1}{\alpha} - \mathrm{ctg}\alpha\right)\dot{\alpha} \tag{3.10}$$

Проинтегрируем уравнение (3.10) при начальных условиях: $t = 0, \alpha = 0, H_1(0) = 1$:

$$H_1 = \frac{\sin\alpha}{\alpha} \tag{3.11}$$

Полученные выражения (2.1), (2.3), (3.5), (3.7), (3.9) и (3.11) позволяют представить окружное напряжение $\sigma_{\theta\theta}$ и интенсивность напряжений σ_u в зависимости от угла раствора α:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{q\rho}{H_1 H_0} = \frac{q_0 kt\alpha}{H_0 \sin^2\alpha}, \quad \sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{q_0\alpha kt}{H_0\sin^2\alpha} \tag{3.12}$$

Из (2.2) при учете (3.9) и (3.12) получаем зависимость угла раствора α от времени t:

$$\int_0^{t_1} t^n dt = \frac{t_1^{n+1}}{n+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\alpha_1}\left(\frac{1}{\alpha} - \mathrm{ctg}\alpha\right)\left(\frac{2H_0\sin^2\alpha}{\sqrt{3}q_0 k\cdot\alpha}\right)^n d\alpha \tag{3.13}$$

При исследовании первой стадии деформирования мембраны угол α изменяется в диапазоне от $\alpha = 0$ до α_1 – угла, при котором происходит касание мембраной поперечной стороны матрицы: $2\alpha(t_1) = 2\alpha_1$

Введем новое безразмерное время:

$$\tau^n = \left(\frac{q_0}{H_0}\right)^n \cdot t^{n+1} \tag{3.14}$$

Из (3.13)–(3.14) следует:

$$\frac{\tau^n}{(n+1)} = \left(\frac{q_0}{H_0}\right)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{k^n}\int_0^{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - \mathrm{ctg}\alpha\right)\left(\frac{\sin^2\alpha}{\alpha}\right)^n d\alpha$$

$$\tau_1^0 = \tau(\alpha_1) = \left\{(n+1)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{k^n}\int_0^{\alpha_1}\left(\frac{1}{\alpha} - \mathrm{ctg}\alpha\right)\left(\frac{\sin^2\alpha}{\alpha}\right)^n d\alpha\right\}^{\frac{1}{n}}$$

В конце первой стадии ($\tau = \tau_1^0$) максимальный раствор мембраны равен: $2\alpha(\tau_1^0) = 2\alpha_1$. Момент времени τ_1^0, при котором происходит окончание первой стадии, и толщина мембраны $H_1^{\text{o}} = H(\tau_1^0)$, вычисляемая с учетом зависимости (3.11), определяются согласно уравнениям:

$$\begin{gathered}\tau_1^0 = \tau\left(\alpha = \alpha_1 = \arcsin\left(\frac{2b}{1+b^2}\right)\right)\\ H_1^{\text{o}} = H_1(\tau = \tau_1^0) = \frac{\sin\alpha_1}{\alpha_1} = \left(\frac{2b}{(1+b^2)\arcsin\left(\frac{2b}{1+b^2}\right)}\right)\end{gathered} \tag{3.15}$$

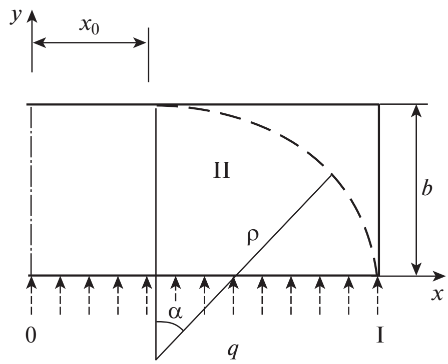

Рис. 4. Вторая стадия (идеальное скольжение и прилипание).

Далее рассматривается ползучесть мембраны внутри жесткой матрицы при различных контактных условиях.

4. Идеальное скольжение мембраны вдоль сторон матрицы. *4.1. Вторая стадия* ($0 \le x_0 \le 1 - b$). Решение задачи имеет различный характер для относительно высокой матрицы ($b \ge 1$) и относительно низкой матрицы ($b \le 1$). Для определенности в данной работе рассмотрена ползучесть мембраны внутри относительно низкой матрицы ($b \le 1$).

В связи с осевой симметрией мембраны и матрицы в процессе второй стадии рассматривается ползучесть правой половины мембраны в координатах $0 \le x \le 1 - b$, $0 \le y \le b$ (рис. 4).

Свободное деформирование мембраны было рассмотрено в предыдущем параграфе 3. В некоторый момент времени ($t = t_1$) мембрана соприкасается с поперечной стенкой матрицы. На этом свободное деформирование заканчивается, и в дальнейшем при $t > t_1$ часть поверхности мембраны прилегает к поперечной поверхности матрицы.

При исследовании второй стадии ползучести мембраны выделим два близких деформированных состояния: одно характеризуется длиной участка контакта x_0, а другое — длиной участка контакта ($x_0 + dx_0$). С помощью геометрических соотношений (рис. 4) получим соотношение для приращения окружной деформации ползучести $dp_{\theta\theta}$ в виде:

$$dp_{\theta\theta} = \frac{(\rho d\alpha + \alpha d\rho) + dx_0}{\rho\alpha + x_0} \tag{4.1}$$

Каждое из слагаемых числителя (4.1) содержит множитель dx_0, следовательно, можно их сгруппировать и ввести обозначения

$$\begin{gathered} \rho d\alpha + \alpha d\rho + dx_0 = B_1(x_0)\,dx_0 \\ \rho\alpha + x_0 = B_2(x_0) \end{gathered} \tag{4.2}$$

В этом случае

$$dp_{\theta\theta} = \frac{B_1(x_0)\,dx_0}{B_2(x_0)} \tag{4.3}$$

С помощью (4.3) вычислим характеристики деформированного состояния

$$\dot{p}_{\theta\theta} = \frac{B_1}{B_2}\frac{dx_0}{dt}, \quad d\dot{p}_u = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{B_1}{B_2}\frac{dx_0}{dt}$$

Проектируя наклонный радиус ρ (рис. 4) на горизонталь и вертикаль, получим следующие два уравнения:

$$\rho\sin\alpha = (1 - x_0)$$
$$\rho\cos\alpha = (\rho - b)$$

в результате получаем $\rho^2 = (1 - x_0)^2 + (\rho - b)^2$

Отсюда

$$(1 - x_0)^2 - 2\rho b + b^2 = 0, \quad \rho = \frac{(1 - x_0)^2 + b^2}{2b}$$
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{(1 - x_0)}{(\rho - b)} = \frac{2b(1 - x_0)}{[(1 - x_0)^2 - b^2]}$$

Дифференциалы $d\rho(x_0)$ и $d\alpha(x_0)$ принимают следующий вид

$$d\rho = -\frac{2(1 - x_0)}{2b}dx_0 = -\frac{(1 - x_0)}{b}dx_0$$

$$d\alpha = d(\mathrm{arc\,tg}\alpha(x_0)) = d\left(\mathrm{arc\,tg}\frac{2b(1 - x_0)}{[(1 - x_0)^2 - b^2]}\right) =$$

$$= \frac{\dfrac{-2b}{(1 - x_0)^2 - b^2} + \dfrac{4b(1 - x_0)^2}{[(1 - x_0)^2 - b^2]^2}}{1 + \left[\dfrac{2b(1 - x_0)}{[(1 - x_0)^2 - b^2]}\right]^2}dx_0 = \frac{-2b[(1 - x_0)^2 - b^2] + 4b(1 - x_0)^2}{4b^2(1 - x_0)^2 + [(1 - x_0)^2 - b^2]^2}dx_0 =$$

$$= \frac{2b}{[(1 - x_0)^2 + b^2]}dx_0$$

Подставляя $d\rho(x_0)$ и $d\alpha(x_0)$ в (4.2), получим

$$\rho d\alpha = \frac{(a - x_0)^2 + b^2}{2b}\frac{2b}{[(1 - x_0)^2 + b^2]}dx_0 = dx_0,$$
$$\alpha d\rho = \alpha\left[-\frac{2(1 - x_0)}{2b}\right]dx_0 = -\frac{(1 - x_0)}{b}\alpha dx_0$$
$$B_1(x_0)dx_0 = -\frac{1 - x_0}{b}\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{2b(1 - x_0)}{[(1 - x_0)^2 - b^2]}\right)\right)dx_0 + 2dx_0$$
$$B_2(x_0) = \frac{[(1 - x_0)^2 + b^2]}{2b}\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{2b(1 - x_0)}{[(1 - x_0)^2 - b^2]}\right)\right) + x_0$$

Из условия несжимаемости при учете (3.3) получаем: $d\dot{p}_{\theta\theta} = -d\dot{p}_{rr}$

Согласно определению $\dot{p}_{rr}$ имеем $\dot{p}_{rr} = \dfrac{\dot{H}_2}{H_2}$. Следовательно,

$$\dot{p}_{\theta\theta} = -\frac{\dot{H}_2}{H_2}, \quad dp_{\theta\theta} = \frac{B_1(x_0)\,dx_0}{B_2(x_0)} = -\frac{dH_2}{H_2}$$

$$\int\limits_{H_1^0}^{H_2(x_0)} \frac{dH_2}{H_2} = -\int\limits_0^{x_0} \frac{B_1(x_0)\,dx_0}{B_2(x_0)}, \quad H_2(x_0) = H_1^0 \exp\left[-\int\limits_0^{x_0} \frac{B_1(x_0)\,dx_0}{B_2(x_0)}\right]$$

$$H_2^0 = H_2(x_0 = 1-b) = \frac{1}{\left(1 - b + \frac{1}{2}\pi b\right)}$$

Последнее равенство следует из учета постоянства толщины H мембраны вдоль всего рассматриваемого участка мембраны в конце второй стадии. Интенсивности деформаций ползучести и напряжений определяются следующими выражениями:

$$\dot{p}_u = \frac{2}{\sqrt{3}}\dot{p}_{\theta\theta}, \quad \sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{q(t)\rho}{H_0 H_2(x_0)}$$

Подставляя эти выражения в (2.2), получаем связь x_0 и t:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{B_1(x_0)\,dx_0}{B_2(x_0)\,dt} = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{q\rho}{H_0 H_2(x_0)}\right]^n$$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} t^n dt = \int\limits_0^{x_0} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{B_1(x_0)}{B_2(x_0)}}{\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{q_0 k\rho}{H_0 H_2(x_0)}\right]^n} dx_0 = \int\limits_0^{x_0} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{B_1(x_0)}{B_2(x_0)}}{\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{q_0 k((1-x_0)^2 + b^2)}{H_0 H_2(x_0)\,b}\right]^n} dx_0, \quad t_2 = t(x_0 = 1-b)$$

Используя замену (3.14), получим:

$$\tau_2(x_0) = \left((\tau_1^0)^n + (n+1)\frac{1}{k^n}\int\limits_0^{x_0} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{B_1(x_0)}{B_2(x_0)}}{\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{((1-x_0)^2 + b^2)}{H_2(x_0)\,b}\right]^n} dx_0\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \tau_2^0 = \tau(x_0 = 1-b)$$

4.2. Третья стадия $(1 - b \le x_0 \le 1 - \Delta)$. На третьей стадии ползучести мембрана касается обеих сторон матрицы ($1-b \le x_0 \le 1-\Delta$, $0 \le y_0 \le b$) (рис. 5). При этом профиль мембраны представляет собой полуокружность радиуса $(1 - x_0)$ и размеры областей контакта по продольной и поперечной осям равны $\left(x_0 - (1-b)\right) = y_0$. С учетом принятых допущений компоненты тензора деформаций ползучести примут вид:

$$dp_{\theta\theta} = \frac{\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)dx_0}{\left[2x_0 + \frac{\pi}{2}(1 - x_0) + (1 - b)\right]} = \frac{(2 - 0.5\pi)\,dx_0}{[(b + 0.5\pi - 1) + (2 - 0.5\pi)\,x_0]}$$

$$dp_{\theta\theta} = F(x_0)dx_0, \quad F(x_0) = \frac{(2 - 0.5\pi)}{[(b + 0.5\pi - 1) + (2 - 0.5\pi)\,x_0]}$$

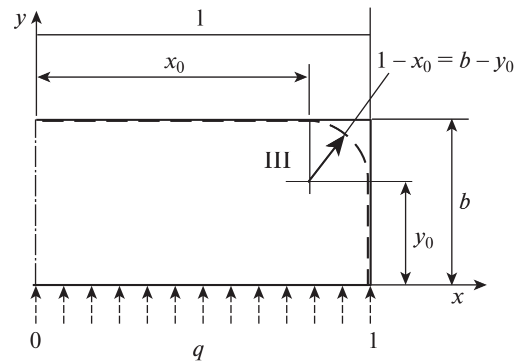

Рис. 5. Третья стадия (идеальное скольжение и прилипание).

$$p_{\theta\theta} = -\int_{H_2^0}^{H_3(x_0)} \frac{dH_3}{H_3} = \int_{1-b}^{x_0} F(x_0)dx_0 = \ln\frac{H_2^0}{H_3(x_0)} = \ln\left[\frac{(b + 0.5\pi - 1) + (2 - 0.5\pi)x_0}{1 - b + 0.5\pi b}\right]$$

$$H_3(x_0) = H_2^0 \frac{1 - b + 0.5\pi b}{[(b + 0.5\pi - 1) + (2 - 0.5\pi)x_0]} = \frac{1}{[(b + 0.5\pi - 1) + (2 - 0.5\pi)x_0]}$$

Окончание третьей стадии происходит при значении x_0^0, удовлетворяющем неравенству $(1 - x_0^0) = \Delta \ll 1$, где $(1 - x_0^0)$ – радиус кривизны мембраны вблизи угла матрицы.

Интенсивность напряжений определяется следующим соотношением:

$$\sigma_u(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{q\rho}{H_0 \cdot H_3(x_0)}, \quad \rho = 1 - x_0$$

$$\sigma_u(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{q}{H_0}\cdot[(b + 0.5\pi - 1) + (2 - 0.5\pi)x_0]\cdot(1 - x_0)$$

Интенсивность скоростей деформаций ползучести равна:

$$\dot{p}_u = \frac{2}{\sqrt{3}}F(x_0)\frac{dx_0}{dt} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{(2 - 0.5\pi)}{[(b + 0.5\pi - 1) + (2 - 0.5\pi)x_0]}\frac{dx_0}{dt}$$

Подставляя σ_u и $\dot{p}_u$ в (2.2), получаем:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{(2 - 0.5\pi)}{[b + (0.5\pi - 1) + (2 - 0.5\pi)x_0]}\cdot\frac{dx_0}{dt} =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{q}{H_0}[(b + 0.5\pi - 1) + (2 - 0.5\pi)x_0]\cdot(1 - x_0)\right]^n$$

Отсюда

$$t_3^{n+1}(x_0) = t_2^{n+1} + (n + 1)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{(n+1)}\left(\frac{H_0}{kq_0}\right)^n \int_{1-b}^{x_0} \frac{(2 - 0.5\pi)dx_0}{[b + (0.5\pi - 1) + (2 - 0.5\pi)x_0]^{(n+1)}(1 - x_0)^n}$$

Используя замену (3.14), получим:

$$\tau_3(x_0) = \left[(\tau_2^0)^n + (n+1)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{(n+1)} \cdot \left(\frac{1}{k^n}\right) \cdot \int_{1-b}^{x_0} \frac{(2-0.5\pi)\,dx_0}{\left[b + (0.5\pi - 1) + (2 - 0.5\pi)x_0\right]^{(n+1)} \cdot (1-x_0)^n} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (4.4)$$

Время τ_3^0 практически полного заполнения матрицы мембраной определяется выражением (4.11) при замене в верхнем пределе интегрирования x_0 на $x_0^0 = 1 - \Delta$:

$$\tau_3{}^0 = \tau_3(x_0^0 = 1 - \Delta)$$

5. Прилипание мембраны вдоль сторон матрицы. 5.1. *Вторая стадия* $(0 \le x_0 \le 1 - b)$. В случае постепенного прилипания материала мембраны к матрице ее контактная часть (с переменной толщиной) не деформируется, а свободная часть (с постоянной толщиной) представляет собой часть дуги окружности. Окружная деформация в свободной части мембраны имеет вид (рис. 4):

$$dp_{\theta\theta} = \frac{(\rho d\alpha + \alpha d\rho) + dx_0}{\rho\alpha}$$

Аналогично (4.2) можно получить выражение

$$B_3(x_0) = \rho\alpha = \frac{[(1-x_0)^2 + b^2]}{2b}\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2b(1-x_0)}{[(1-x_0)^2 - b^2]}\right)\right)$$

$$dp_{\theta\theta} = \frac{B_1(x_0)\,dx_0}{B_3(x_0)}$$

Как известно, $\dot{p}_{rr} = \dfrac{\dot{H}_2}{H_2}$. Из условия несжимаемости $\dot{p}_{\theta\theta} = -\dot{p}_{rr}$, так что

$$\dot{p}_{\theta\theta} = -\frac{\dot{H}_2(x_0)}{H_2(x_0)}, \quad dp_{\theta\theta} = -\frac{dH_2}{H_2} = \frac{B_1(x_0)\,dx_0}{B_3(x_0)}$$

$$\int_{H_1^0}^{H_2(x_0)} \frac{dH_2}{H_2} = -\int_0^{x_0} \frac{B_1(x_0)\,dx_0}{B_3(x_0)}, \quad H_2(x_0) = H_1^0 \exp\left[-\int_0^{x_0} \frac{B_1(x_0)\,dx_0}{B_3(x_0)}\right], \quad H_2^0 = H_2(x_0 = 1 - b)$$

Интенсивности σ_u и $\dot{p}_u$ равны соответственно:

$$\sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{q\rho}{H_0 H_2(x_0)}, \quad \dot{p}_u = \frac{2}{\sqrt{3}}\dot{p}_{\theta\theta}$$

Подставляя выражения σ_u и $\dot{p}_u$ в (2.2), получаем:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{B_1(x_0)dx_0}{B_3(x_0)dt} = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{q\rho}{H_0 H_2(x_0)}\right]^n$$

$$t_2^{n+1} = t_1^{n+1} + (n+1)\int_0^{x_0} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{B_1(x_0)}{B_3(x_0)}}{\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{kq_0\rho}{H_0 H_2(x_0)}\right]^n} dx_0 = t_1^{n+1} + (n+1)\frac{1}{k^n}\left(\frac{H_0}{q_0}\right)^n \int_0^{x_0} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{B_1(x_0)}{B_3(x_0)}}{\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{((1-x_0)^2 + b^2)}{H_2(x_0)b}\right]^n} dx_0$$

Используя замену (3.14), получим:

$$\tau_2(x_0)=\left[(\tau_1^0)^n+(n+1)\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^{(n+1)}\cdot\left(\frac{1}{2k^n}\right)\cdot\int_0^{x_0}\frac{\dfrac{B_1(x_0)}{B_3(x_0)}}{\left[\dfrac{((1-x_0)^2+b^2)}{H_2(x_0)b}\right]^n}dx_0\right]^{\frac{1}{n}},\quad \tau_2^0=\tau(x_0=1-b)$$

5.2. Третья стадия $(1-b\le x_0\le 1-\Delta)$. На третьей стадии ползучесть мембраны характеризуется касанием ею продольных и поперечной сторон матрицы (рис. 5):

$$dp_{\theta\theta}=\frac{[b-1+2(x_0+dx_0)+0.5\pi(1-(x_0+dx_0))]-[b-1+2x_0+0.5\pi(1-x_0)]}{[0.5\pi(1-x_0)]}=$$

$$=\frac{(2-0.5\pi)dx_0}{[0.5\pi(1-x_0)]}$$

$$dp_{\theta\theta}=F(x_0)dx_0,\quad F(x_0)=\frac{2-0.5\pi}{0.5\pi(1-x_0)}=\frac{4-\pi}{\pi(1-x_0)}$$

$$p_{\theta\theta}=-\int_{H_2^o}^{H_3(x_0)}\frac{dH_3}{H_3}=\int_{1-b}^{x_0}F(x_0)dx_0=\ln\frac{H_2^0}{H_3(x_0)}=\frac{4-\pi}{\pi}\ln\left[\frac{b}{(1-x_0)}\right]$$

$$\frac{H_2^o}{H_3(x_0)}=\left(\frac{b}{(1-x_0)}\right)^{\frac{(4-\pi)}{\pi}},\quad H_3(x_0)=H_2^o\left(\frac{b}{(1-x_0)}\right)^{-\frac{(4-\pi)}{\pi}}$$

Окончание третьей стадии происходит при значении x_0^0, удовлетворяющем неравенству $(1-x_0^0)=\Delta\ll 1$.

Интенсивность напряжений определяется следующим соотношением:

$$\sigma_u(x_0)=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{q\rho}{H_3(x_0)H_0},\quad \rho=1-x_0,\quad \sigma_u(x_0)=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{q}{H_0}\frac{(1-x_0)}{H_3(x_0)}\tag{5.1}$$

Интенсивность скоростей деформаций ползучести равна:

$$\dot{p}_u=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{(4-\pi)}{\pi}\cdot\frac{1}{(1-x_0)}\frac{dx_0}{dt}\tag{5.2}$$

Подставляя (5.1) и (5.2) в (2.2), получаем:

$$t_3^{n+1}(x_0)=t_2^{n+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}(n+1)\int_{1-b}^{x_0}\left[\frac{2H_3H_0}{\sqrt{3}q_0k(1-x_0)}\right]^n\frac{(4-\pi)dx_0}{\pi(1-x_0)}=$$

$$=t_2^{n+1}+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{(n+1)}(n+1)\cdot\left(\frac{H_0}{q_0k}\right)^n\cdot\int_{1-b}^{x_0}\left(\frac{4-\pi}{\pi}\right)\cdot\frac{(H_3(x_0))^n}{(1-x_0)^{(n+1)}}dx_0$$

Используя замену (3.14), получим:

$$\tau_3(x_0)=\left[(\tau_2^0)^n+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{(n+1)}(n+1)\cdot\left(\frac{1}{k^n}\right)\int_{1-b}^{x_0}\left(\frac{4-\pi}{\pi}\right)\cdot\frac{(H_3(x_0))^n}{(1-x_0)^{(n+1)}}dx_0\right]^{\frac{1}{n}}$$

Время практически полного прилегания мембраны к матрице определяется выражением:

$$\tau_3^0=\tau_3(x_0=x_0^0)$$

Таблица 1. Значения времен τ_1^0, τ_2^0 и τ_3^0 в конце каждой стадии в случае идеального скольжения

k	τ_1^0	τ_2^0	$\Delta = 0.01$ τ_3^0	$\Delta = 0.001$ τ_3^0	$\Delta = 0.0001$ τ_3^0
0.5	1.14	2.23	29.1	134.2	622
1.0	0.568	1.12	14.6	67.1	311
1.5	0.379	0.745	9.70	44.7	207

Таблица 2. Значения времен τ_1^0, τ_2^0 и τ_3^0 в конце каждой стадии в случае прилипания

k	τ_1^0	τ_2^0	$\Delta = 0.01$ τ_3^0	$\Delta = 0.001$ τ_3^0	$\Delta = 0.0001$ τ_3^0
0.5	1.14	2.45	49.7	264.8	1411.0
1.0	0.568	1.22	24.8	132.4	705.7
1.5	0.379	0.816	16.6	88.2	470.5

6. Анализ результатов. В качестве примера рассмотрим ползучесть мембраны внутри матрицы высотой $b = 0.5$ со следующими выбранными параметрами:

$$n = 3, \quad k = 0.5, \ 1.0, \ 1.5, \ \Delta = 0.01, \ 0.001, \ 0.0001$$

Величина $\Delta = 1 - x_0^0$ соответствует минимальному расстоянию между поперечной стороной матрицы и мембраной.

Значения времен τ_1^0, τ_2^0 и τ_3^0 в конце каждой стадии приведены в таблицах 1 и 2 для идеального скольжения и прилипания соответственно. На рис. 6 приведены зависимости $\alpha(\tau_1)$ в случае свободного деформирования, на рис. 7 – зависимости $x_0(\tau)$ в случае идеального скольжения (сплошная кривая) и зависимости $x_0(\tau)$ в случае прилипания (пунктирная кривая) при $\Delta = 0.01$.

Вычисления показывают, что при заданных значениях используемых параметров длительность деформирования мембраны вплоть до практически полного прилегания мембраны к матрице при идеальном скольжении меньше, чем при прилипании. При степенях близости мембраны к матрице $\Delta = 0.01$, $\Delta = 0.001$, $\Delta = 0.0001$ отношения этих времен при различных значениях k и Δ составляют значения от 0.43 до 0.59.

7. Заключение. Приведено исследование ползучести длинной прямоугольной мембраны в стесненных условиях (внутри жесткой матрицы) под действием переменного поперечного давления, величина которого пропорциональна длительности его действия. В данной работе принимается, что высота матрицы не больше половины ее ширины. Рассматриваются два варианта условий на контакте мембраны и матрицы: идеальное скольжение и прилипание. В работе рассматриваются три последовательные стадии деформирования мембраны: ползучесть в свободных условиях, ползучесть мембраны при контакте с поперечной стороной матрицы и ползучесть мембраны при контакте со всеми сторонами матрицы. Анализ проводится до времени практически полного прилегания мембраны к матрице. Показано, что это время при условии идеального скольжения меньше, чем при условии прилипания при рассмотренных значениях n, k и Δ.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-19-00062).

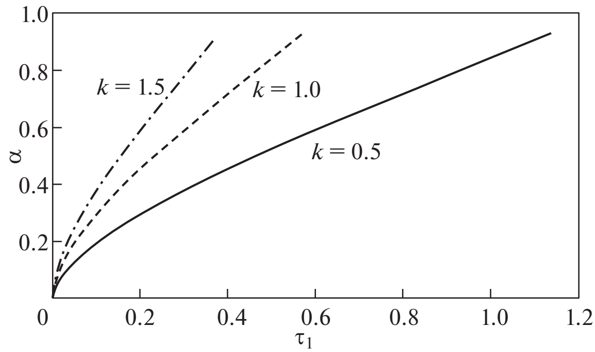

Рис. 6. Зависимости $\alpha(\tau_1)$ на первой стадии деформирования.

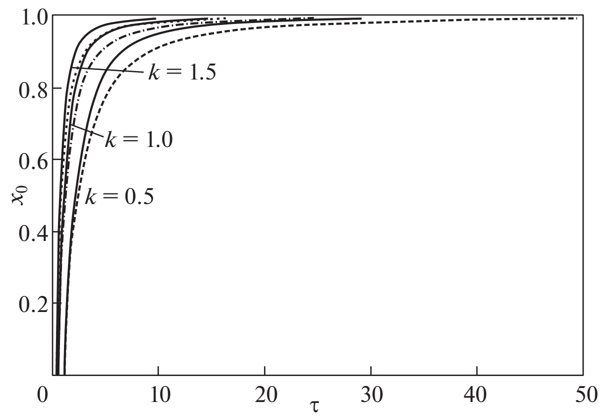

Рис. 7. Зависимости $x_0(\tau)$ в случае идеального скольжения (сплошная) и прилипания (пунктирная линия).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Odqvist F.K.G.* Mathematical theory of creep and creep rupture. Second edition. Oxford at the Clarendon Press, 1974. 200 p.

2. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.

3. *Storakers B.* Finite creep of a circular membrane under hydrostatic pressure // Acta Polytech. Scand. Mech. Eng. Ser. 1969. № 44. 107 pp.

4. *Apratim Majumder, Chayanjit Ghosh, Mohit U. Karkhanis, Aishwaryadev Banerjee, Rugved Likhite, Carlos H. Mastrangelo, and Tridib Ghosh*. Creep deformation in elastomeric membranes of liquid-filled tunable-focus lenses // Appl. Optics. 2019. V. 58. № 23. P. 6446–6454. https://doi.org/10.1364/AO.58.006446

5. *Wineman A.* Nonlinear viscoelastic membranes // Comput. Math. Appl. 2007. V. 53. № 2. P 168–181. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2006.02.017

6. *Ларин С.Н., Бессмертный А.В.* Изотермическое свободное деформирование узкой прямоугольной мембраны из анизотропного листового материала при кратковременной ползучести // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. 2010. № 1. С. 44–51.

7. *Яковлев С.С., Ларин С.Н.* Деформирование анизотропной прямоугольной мембраны в условиях ползучести // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. 2010. № 3. С. 37–46.

8. *Яковлев С.П., Чудин В.Н., Яковлев С.С., Соболев Я.А.* Изотермическое деформирование высокопрочных анизотропных металлов. М.: Машиностроение, Изд-во ТулГУ, 2004. 427 с.

9. *Ефимов А.Б., Романюк С.Н., Чумаченко Е.Н.* Об определении закономерностей трения в процессах обработки металлов давлением // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 6. С. 82–98.

10. *Малинин Н.Н.* Ползучесть в обработке металлов. М.: Машиностроение, 1986. 216 с.

11. *Локощенко А.М.* Ползучесть и длительная прочность металлов М.: Физматлит, 2016. 504 с. (Lokoshchenko A.M. Creep and long-term strength of metals. Boca. Raton. London. NewYork: CRC Press. Taylor & Francis Group, 2018.)

12. *Локощенко А.М., Терауд В.В.* Ползучесть длинной узкой мембраны в стесненных условиях вплоть до разрушения // ПМТФ. 2013. Т. 54. № 3. С. 126–133.

13. *Демин В.А., Локощенко А.М., Жеребцов А.А.* Ползучесть длинной прямоугольной мембраны внутри криволинейной матрицы // Изв. вузов. Машиностроение. 1998. № 4–6. С. 41–46.

14. *Шестериков С.А., Юмашева М.А.* Конкретизация уравнения состояния в теории ползучести // Известия АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 86–91.

15. *Локощенко А.М., Абросимова Е.А.* Установившаяся ползучесть длинной мембраны внутри жесткой матрицы при кусочно-постоянной зависимости скорости поперечного давления от времени // ПМТФ. 2019. № 1. С. 103–113.
https://doi.org/10.15372/PMTF20190112

16. *Тeрауд В.В., Локощенко А.М., Шеварова Е.А.* Ползучесть мембраны внутри П-образной матрицы при переменном поперечном давлении // Сборник трудов в 4 томах. XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Т. 3: Механика деформируемого твердого тела. – Уфа: РИЦ БашГУ. 2019. С. 382–384.
https://doi.org/10.22226/2410-3535-2019-congress-v3

17. *Nhung Nguyen, Wineman A., Waas A.* Contact problem of a non-linear viscoelastic spherical membrane enclosing incompressible fluid between two rigid parallel plates // Int. J. Non-Lin. Mech. 2013. V. 50. P. 97–108.
https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2012.11.009

18. *Васин Р.А., Еникеев Ф.У., Круглов А.А., Сафиуллин Р.В.* Об идентификации определяющих соотношений по результатам технологических экспериментов // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 2. С. 111–123.

19. *Сафиуллин Р.В., Еникеев Ф.У.* Расчет режимов сверхпластической формовки протяженной прямоугольной мембраны // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением. 2001. № 3. С. 35–40.

20. *Srivastava A., Hui C.-Y.* Nonlinear viscoelastic contact mechanics of long rectangular membranes // Proc. Royal Soc. A: Math. Phys. Eng. Sci. 2014. A V. 470. P. 20140528.
https://doi.org/10.1098/rspa.2014.0528

21. *Long R., Shull K., Hui C.-Y.* Large deformation adhesive contact mechanics of circular membranes with a flat rigid substrate // J. Mech. Phys. Solids. 2010. V. 58. № 9. P. 1225–1242.
https://doi.org/10.1016/j.jmps.2010.06.007

22. *Srivastava A., Hui C.-Y.* Large deformation contact mechanics of long rectangular membranes. I. Adhesionless contact // Proc. Roy. Soc. A: Math. Phys. Eng. Sci. 2013. A 469: P. 20130424.
https://doi.org/10.1098/rspa.2013.0424