ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2022, № 2, с. 3–13

УДК 539.4

К ТЕОРИИ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ТЕНЗОРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПЛОЩАДИ МИКРОПОЛЯРНОГО КОНТИНУУМА, ПОГРУЖЕННОГО ВО ВНЕШНЕЕ ПЛОСКОЕ ПРОСТРАНСТВО

Е. В. Мурашкин[a,*], Ю. Н. Радаев[a,]**

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*
**e-mail: evmurashkin@gmail.com*
***e-mail: radayev@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 09.09.2021 г.
После доработки 10.10.2021 г.
Принята к публикации 11.10.2021 г.

В статье обсуждаются вопросы вычисления элементарного тензорного объема (площади) M-ячейки для многообразия, погруженного в “плоское” конечномерное пространство. Соответствующие рассмотрения подразумевают выбор ориентации репера, определяющего элемент объема (площади). Последнее обстоятельство имеет исключительное значение в микрополярных теориях упругости. Указанные теории корректно развивать только в рамках псевдотензорного формализма. В особенности это касается теории гемитропных упругих сред. Приводятся необходимые сведения из алгебры псевдотензоров. Рассматриваются многообразия заданные Гауссовой параметризацией. Вводится понятие M-ячейки на многообразии и ее ориентации. Описывается алгоритм сравнения ориентаций M-мерных ячеек. Определяется понятие тензорного элемента объема (площади) M-ячейки. Указывается формула преобразования естественного элемента объема к инвариантному элементу объема. Отмечаются важные приложения для механики микрополярного континуума. Вводятся определения тензоров силовых и моментных напряжений с использованием естественных элементов объема и площади поверхности.

Ключевые слова: фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, псевдотензор, M-ячейка, тензорный элемент объема, ориентация репера, микрополярный континуум тензор силовых напряжений, тензор моментных напряжений

DOI: 10.31857/S0572329922020155

1. Введение. Современные математические модели континуума основываются на понятии о дифференцируемом многообразии (или дифференцируемом пространстве) [1, 2]. Подобные модели вполне пригодны для описания механического поведения твердых деформируемых тел, включая твердые тела с микроструктурой [3]. Континуум при этом мыслится как дифференцируемое многообразие некоторой данной размерности M в прикладных вопросах обычно достаточно полагать, что $M = 3$.

На дифференцируемом многообразии часто приходится вводить дополнительные структуры. Например, риманова структура на многообразии позволяет говорить о целом классе дифференцируемых пространств [1, 2], которые имеют важное прикладное значение. Для континуума с римановой структурой особенно просто может быть разработана теория конечных деформаций.

Исторически теория многообразий восходит к геометрии искривленных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве. Со временем концепция многообразия освободилась от необходимости существования “внешнего пространства”, в котором располагалось бы многообразие; сформировалась специальная часть теории — внутренняя геометрия многообразий. Однако в механике континуума внешнее пространство, в которое “погружены” материальные объекты, до сих пор выступает как неизменный атрибут теории.

Относительные тензоры естественным образом возникают в математических моделях микрополярного материала [4—6]. Литературный поиск показывает, что применение относительных тензоров в теориях механики сплошных сред не имеет широкого распространения, несмотря на глубокие математические исследования (алгебра, теория инвариантов и дифференцирование относительных тензоров) [7—13].

В ходе изложения вопросов связанных с многомерной геометрией будем следовать терминологии и идеям [13, 14]. Минимальные сведения о тензорных элементах объема и площади можно найти в [10], см. приложение Дж.Л. Эриксена. Вопросы применения алгебры псевдотензоров к задачам механики растущих тел и микрополярной теории упругости обсуждаются в работах [4, 5].

В представленной работе рассмотрим вопросы вычисления элементарного тензорного объема (площади) M-ячейки для многообразия, погруженного в “плоское” конечномерное пространство. Соответствующие рассмотрения подразумевают выбор ориентации репера, определяющего элемент объема (площади). Последнее обстоятельство имеет исключительное значение в микрополярных теориях упругости [15—17]. Указанные теории корректно развивать только в рамках псевдотензорного формализма. В особенности это касается теории гемитропных упругих сред [4, 5]. Рассматриваются альтернативные определения тензоров силовых и моментных напряжений с использованием естественных элементов объема и площади поверхности. Веса псевдотензоров в N-мерном плоском пространстве и псевдотензоров, ассоциированные с M-мерным многообразием приведены в таблицах 1 и 2 соответственно.

2. Псевдотензоры в N-мерном пространстве. В данной работе мы не будем воспроизводить определение и свойства псевдотензоров. Подробное изложение алгебры псевдотензоров можно найти в руководствах по тензорному анализу [9—13] и в статьях [4, 5]. В дальнейшем изложении сверху корневого символа относительного тензора в квадратных скобках будем отмечать его вес. Нулевой вес, присущий абсолютным тензорам, не отражается нами в обозначениях.

Одним из фундаментальных объектов многомерной геометрии является абсолютный тензор $\delta^{j_1 j_2 \dots j_M}_{i_1 i_2 \dots i_M}$, называемый обобщенной дельтой Кронекера. $\delta^{j_1 j_2 \dots j_M}_{i_1 i_2 \dots i_M}$ можно определить в N-мерном пространстве для $M \le N$ согласно правилу

$$\delta^{j_1 j_2 \dots j_M}_{i_1 i_2 \dots i_M} = \\ = \begin{cases} +1, & \text{если } j_1, j_2, \dots, j_M \text{ различные натуральные числа } 1, 2, \dots, N \\ & \text{и если } i_1, i_2, \dots, i_M \text{ является четной перестановкой } j_1, j_2, \dots, j_M \\ -1, & \text{если } j_1, j_2, \dots, j_M \text{ различные натуральные числа } 1, 2, \dots, N \\ & \text{и если } i_1, i_2, \dots, i_M \text{ является нечетной перестановкой } j_1, j_2, \dots, j_M \\ -0, & \text{во всех остальных случаях} \end{cases} \tag{2.1}$$

С помощью тензора $\delta^{j_1 j_2 \dots j_M}_{i_1 i_2 \dots i_M}$ можно легко вычислить символы перестановок:[1]

1. относительный ковариантный M-вектор $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_M}$ веса -1

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_M} = \delta^{12 \dots M}_{i_1 i_2 \dots i_M} \tag{2.2}$$

[1] В литературе используется несколько названий для символов перестановок: дискриминатнный тензор, тензор перестановок, альтернирующий тензор, символы Леви—Чивита

Таблица 1. Основные псевдотензоры в N-мерном плоском пространстве

Терминологическое обозначение	Корневое символьное обозначение	Вес (weight)	Преобразование к абсолютному тензору
Фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр (fundamental orienting pseudoscalar)	e	+1	$\overset{[+1]}{e} = e$
Знак фундаментального ориентирующего псевдоскаляра (fundamental orienting pseudoscalar sign)	$\operatorname{sgn} e$	–	
Метрический тензор (metric tensor)	g_{ij}	0	
Фундаментальный тензор (fundamental tensor)	g^{ij}	0	
Детерминант метрического тензора (metric tensor determinant)	g	+2	$\overset{[+2]}{g} = e^2$
Знак детерминанта метрического тензора (metric tensor determinant sign)	$\operatorname{sgn} g$	0	
Обобщенная дельта Кронекера (generalized Kronecker delta)	$\delta^{j_1 j_2 \ldots j_M}_{i_1 i_2 \ldots i_M}$	0	
Альтернирующий псевдотензор (alternating pseudotensor)	$\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_N}$	+1	$e^{i_1 i_2 \ldots i_N} = \dfrac{1}{e} \overset{[+1]}{\varepsilon}{}^{i_1 i_2 \ldots i_N}$
Альтернирующий псевдотензор (alternating pseudotensor)	$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_N}$	−1	$e_{i_1 i_2 \ldots i_N} = e \overset{[-1]}{\varepsilon}{}_{i_1 i_2 \ldots i_N}$

Таблица 2. Основные псевдотензоры, ассоциированные с M-мерным многообразием

Терминологическое обозначение	Корневое символьное обозначение	Вес (weight)	Преобразование к абсолютному тензору
Тензорный элемент площади (tensor element of area)	$(M \le N)\ d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_M}$	0	
Естественный элемент объема (natural volume element)	$(M = N)\ d\tau^{12 \ldots N}$	−1	$d\tau = e\, \overset{[-1]}{d\tau}{}^{12 \ldots N}$
Инвариантный элемент объема (invariant volume element)	$(M = N)\ d\tau$	0	
Тензорный элемент площади поверхности (tensor element of area)	$(N = 3, M = 2)$ $d\tau^{ij}$	0	
Псевдовекторный элемент площади поверхности (pseudovector element of area)	$(N = 3, M = 2)$ dA_k	−1	$\overset{[-1]}{dA_k} = e dS_k$
Векторный элемент площади поверхности (vector element of area)	$(N = 3, M = 2)$ dS_k	−1	
Инвариантный элемент площади поверхности (invariant element of area)	$(N = 3, M = 2)$ dS	0	
Естественный элемент площади поверхности (natural element of area)	$(N = 3, M = 2)$ dA	−1	$dS = e\, \overset{[-1]}{dA}$

2. относительный контравариантный M-вектор $\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_M}$ веса $+1$

$$\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_M} = \delta^{i_1 i_2 \ldots i_M}_{12 \ldots M} \tag{2.3}$$

Определение косого произведения N абсолютных векторов $\underset{1}{\mathbf{a}}, \underset{2}{\mathbf{a}}, \ldots, \underset{N}{\mathbf{a}}$ в N-мерном пространстве

$$\lceil \underset{1}{\mathbf{a}}, \underset{2}{\mathbf{a}}, \ldots, \underset{N}{\mathbf{a}} \rfloor = e_{i_1 i_2 \ldots i_N} \underset{1}{a}^{i_1} \underset{2}{a}^{i_2} \cdots \underset{N}{a}^{i_N} \tag{2.4}$$

где $e_{i_1 i_2 \ldots i_N} = e \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_N}$, $e = e_{12 \ldots N}$ – псевдоскаляр веса $+1$. $e = e_{12 \ldots N}$ позволяет ввести понятие фундаментального ориентирующего псевдоскаляра и разделить правые и левые локальные базисные системы. В самом деле, если в качестве системы векторов $\underset{1}{\mathbf{a}}, \underset{2}{\mathbf{a}}, \ldots, \underset{N}{\mathbf{a}}$ принять векторы ковариантного базиса $\underset{1}{\boldsymbol{\iota}}, \underset{2}{\boldsymbol{\iota}}, \ldots, \underset{N}{\boldsymbol{\iota}}$ в N-мерном пространстве, то на основании (2.4) находим

$$\lceil \underset{1}{\boldsymbol{\iota}}, \underset{2}{\boldsymbol{\iota}}, \ldots, \underset{N}{\boldsymbol{\iota}} \rfloor = e \tag{2.5}$$

В трехмерном пространстве e определяется смешанным произведением базисных векторов

$$e = \overset{[+1]}{e} = \lceil \underset{1}{\boldsymbol{\iota}}, \underset{2}{\boldsymbol{\iota}}, \underset{3}{\boldsymbol{\iota}} \rfloor = (\underset{1}{\boldsymbol{\iota}} \times \underset{2}{\boldsymbol{\iota}}) \cdot \underset{3}{\boldsymbol{\iota}} \tag{2.6}$$

а фундаментальный ориентирующей псевдоскаляр отрицательного веса -1 есть

$$\frac{1}{e} = \overset{[-1]}{e}{}^{-1} = \lceil \overset{1}{\boldsymbol{\iota}}, \overset{2}{\boldsymbol{\iota}}, \overset{3}{\boldsymbol{\iota}} \rfloor = (\overset{1}{\boldsymbol{\iota}} \times \overset{2}{\boldsymbol{\iota}}) \cdot \overset{3}{\boldsymbol{\iota}} \tag{2.7}$$

Здесь $\overset{1}{\boldsymbol{\iota}}, \overset{2}{\boldsymbol{\iota}}, \overset{3}{\boldsymbol{\iota}}$ векторы базиса взаимного (reciprocal) с базисом $\underset{1}{\boldsymbol{\iota}}, \underset{2}{\boldsymbol{\iota}}, \underset{3}{\boldsymbol{\iota}}$.

Отметим, что фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр позволяет легко преобразовывать псевдотензоры произвольного веса W в абсолютные тензоры.[2] Введем тензор $\mathbf{T}$ согласно

$$\mathbf{T} = e^{-W} \overset{[W]}{\mathbf{T}} \tag{2.8}$$

Сравнивая веса, приходим к заключению о том, что $\mathbf{T}$ является абсолютным тензором. Веса основных псевдотензоров в N-мерном плоском пространстве приведем в таблице 1. В дальнейшем изложении у фундаментальных символов, таких как ε, e и g, указание на их вес будем опускать.

3. Тензорные элементы площади M-многообразия. Поскольку континуум моделируется некоторым дифференцируемым многообразием, то немедленно встает вопрос о возможности его погружения во внешнее пространство.[3] Хорошо известно, что такое погружение в трехмерное плоское пространство не всегда возможно. Так, например, риманово многообразие размерности М в общем случае погружается в плоское пространство размерности $N = M(M+1)/2$. В любом случае можно считать выполненным следующее неравенство:

[2] Указанное обстоятельство неявно используется в подавляющем числе публикаций, посвященных микрополярной упругости, где изложение ведется в терминах абсолютных тензоров [15–17]. В случае когда параметры материала чувствительны к преобразованиям зеркальных отражений и инверсий пространства, т.е. для полуизотропных (гемитропных) сред, корректное описание возможно только при использовании формализма алгебры псевдотензоров [4, 5].

[3] Тогда многие объекты на M-мерном многообразии могут интерпретироваться как векторы в “плоском” пространстве с естественной евклидовой метрикой.

$$N \geq M \tag{3.1}$$

Уточним понятие плоского пространства. Плоское пространство лучше всего определить как специальный класс римановых пространств (см. [1, 2]): риманово пространство называется плоским, если в нем существует координатная система, в которой компоненты метрического тензора пространства постоянны. В плоском пространстве всегда имеется такая предпочтительная система координат $y^j (j = 1, 2, \ldots, N)$, что его метрика определяется квадратичной дифференциальной формой

$$ds^2 = \sum_{j=1}^{N} c_j dy^j dy^j \tag{3.2}$$

где постоянные $c_j = \pm 1$ в зависимости от типа пространства. Для координатной системы y^j используется термин декартова система координат. Ясно, что для внешнего пространства декартова система координат является предпочтительной.

В N-мерном "плоском" пространстве выберем криволинейную систему координат $x^k (k = 1, 2, \ldots, N)$. Рассмотрим погруженное в него многообразие (поверхность) Σ размерности M $(M \leq N)$. Пусть многообразие Σ задано его Гауссовой параметризацией $u^\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, M)$

$$x^k = x^k(u^1, u^2, \ldots, u^M) \tag{3.3}$$

В формуле (3.3) x^k являются внешними координатами для Σ, а u^α – внутренними.

Разобьем многообразие Σ на систему M-ячеек (M-cell). Каждая M-ячейка задается угловым репером, который характеризуется угловой вершиной (с внешними координатами x^k и внутренними координатами u^α) и концевыми точками репера, имеющими внутренние координаты

$$u^\alpha + \underset{\mathfrak{c}}{d} u^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, M \tag{3.4}$$

и внешние координаты

$$x^k + \underset{\mathfrak{c}}{d} x^k, \quad k = 1, 2, \ldots, N \tag{3.5}$$

где индекс $\mathfrak{c}$ нумерует реперные направления ($\mathfrak{c} = 1, 2, \ldots, M$). С внешней (пространственной) точки зрения направления рассматриваемого репера задаются абсолютными контравариантными векторами

$$\underset{1}{d} x^k, \quad \underset{2}{d} x^k, \quad \underset{M}{d} x^k, \quad k = 1, 2, \ldots, N \tag{3.6}$$

Рассмотрим два репера с различными угловыми точками x^k и $\bar{x}^k$ и концевыми точками $x^k + \underset{\mathfrak{c}}{d} x^k$ и $\bar{x}^k + \underset{\mathfrak{c}}{d} \bar{x}^k$, изображенными на рис. 1. Тогда координаты векторов первого и второго реперов будут $\underset{\mathfrak{c}}{d} x^k$ и $\underset{\mathfrak{c}}{d} \bar{x}^k$ соответственно. Всегда существует линейное преобразование одного репера к другому, действующее по формуле

$$\underset{\mathfrak{c}}{d} \bar{x}^k = P_{\cdot\mathfrak{c}}^{\alpha\cdot} \underset{\alpha}{d} x^k \tag{3.7}$$

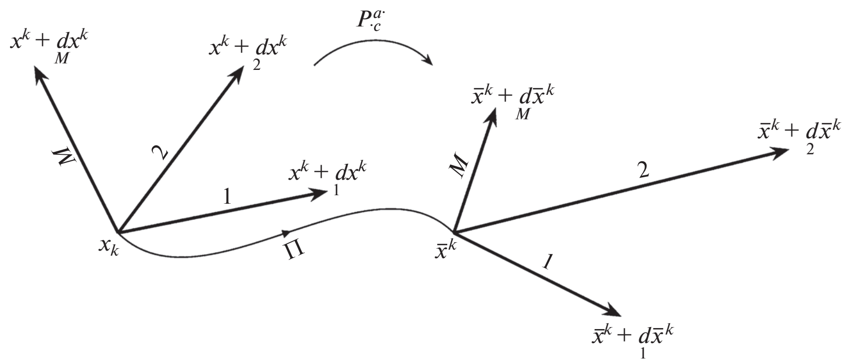

Рис. 1. Реперные направления M-ячеек. Сравнение ориентаций осуществляется путем непрерывного переноса вдоль Π одного репера к другому.

где $P^{\mathfrak{a}\cdot}_{\cdot\mathfrak{c}}$ – матрица перехода от старого базиса (репера) к новому [18–20][4]. В этом случае легко сформулировать критерий сравнения ориентаций реперов $\underset{\mathfrak{b}}{d}\, x^k$ и $\underset{\mathfrak{a}}{d}\, \bar{x}^k$. Для этого должен существовать непрерывный путь Π переноса одного M-репера в другой. Далее, если $\det(P^{\mathfrak{a}\cdot}_{\cdot\mathfrak{c}}) > 0$, то тогда считаем, что реперы имеют одинаковые ориентации или коориентированы, а если $\det(P^{\mathfrak{a}\cdot}_{\cdot\mathfrak{c}}) < 0$, то тогда реперы имеют противоположные ориентации.

В микрополярных теориях механики континуума [15–17] исключительное значение имеют ориентации реперов. Ясно, что ориентация репера задается нумерацией реперных направлений. При перестановке двух номеров реперных направлений ориентация всего репера изменяется на противоположную, т.е. правоориентированный репер становится левоориентированным. В механике континуума ориентацию *базисного* репера удобно задавать фундаментальным ориентирующим скаляром e [4, 5].

Составим из абсолютных контравариантных пространственных векторов $\underset{\mathfrak{b}}{d}\, x^k$ детерминанты

$$
d^{i_1 i_2 \ldots i_M} = \begin{vmatrix} \underset{1}{d}\, x^{i_1} & \underset{1}{d}\, x^{i_2} & \cdots & \underset{1}{d}\, x^{i_M} \\ \underset{2}{d}\, x^{i_1} & \underset{2}{d}\, x^{i_2} & \cdots & \underset{2}{d}\, x^{i_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underset{M}{d}\, x^{i_1} & \underset{M}{d}\, x^{i_2} & \cdots & \underset{M}{d}\, x^{i_M} \end{vmatrix} = \delta^{i_1 i_2 \ldots i_M}_{s_1 s_2 \ldots s_M}\, \underset{1}{d}\, x^{s_1}\, \underset{2}{d}\, x^{s_2} \cdots \underset{M}{d}\, x^{s_M} \qquad (3.8)
$$

Нетрудно заметить, что $d^{i_1 i_2 \ldots i_M}$ – абсолютный антисимметричный тензор, т.е. имеет нулевой вес. Детерминант (3.8) может изменять знак при изменении порядка нумерации реперных направлений M-ячейки, что приведет к перестановке строк в детерминанте (3.8).

С помощью (3.8) определим тензорный элемент объема M-ячейки (the tensor element of area [10, см. приложение Дж.Л. Эриксена])[5] согласно

[4] В руководствах по векторному анализу и конечномерным пространствам [18–20] иногда вводится матрица перехода, транспонированная к (3.7). Мы следуем определению, данному в [18].

[5] Согласно более архаичной терминологии (см. [13]) можно также использовать термин “протяженность M-ячейки” (the extension of the M-cell).

$$d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_M} = d^{i_1 i_2 \ldots i_M} \tag{3.9}$$

или, раскрывая детерминант (3.8), с помощью ε-символа находим

$$d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_M} = \varepsilon^{\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \ldots \mathfrak{b}_M} \underset{\mathfrak{b}_1}{d} x^{i_1} \underset{\mathfrak{b}_2}{d} x^{i_2} \cdots \underset{\mathfrak{b}_M}{d} x^{i_M} \tag{3.10}$$

Здесь $\varepsilon^{\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \ldots \mathfrak{b}_M}$ никак не изменяется при замене “внешней” координатной системы, т.е. выступает как абсолютный инвариант.

На основании (3.8) имеем также [21, 22]

$$d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_M} = M! \underset{1}{d} x^{[i_1} \underset{2}{d} x^{i_2} \cdots \underset{M}{d} x^{i_M]} \tag{3.11}$$

Здесь в квадратные скобки заключены индексы по которым выполняется альтернирование.

Учитывая следующую формулу для дифференциалов внешних координат вдоль реперных направлений M-ячейки

$$\underset{\mathfrak{b}}{d} x^k = (\partial_\alpha x^k) \underset{\mathfrak{b}}{d} u^\alpha \tag{3.12}$$

соотношение (3.8) можно записать в виде

$$\begin{aligned} d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_M} &= \delta^{i_1 i_2 \ldots i_M}_{s_1 s_2 \ldots s_M} \partial_{\alpha_1} x^{s_1} \partial_{\alpha_2} x^{s_2} \cdots \partial_{\alpha_M} x^{sL} \underset{1}{d} u^{\alpha_1} \underset{2}{d} u^{\alpha_2} \cdots \underset{M}{d} u^{\alpha_M} = \\ &= M! \partial_{\alpha_1} x^{[i_1} \partial_{\alpha_2} x^{i_2} \cdots \partial_{\alpha_M} x^{i_M]} du^{\alpha_1} du^{\alpha_2} du^{\alpha_M} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Несложно заметить, что формулу (3.13) можно представить в следующем виде [13, см. с. 256—257]

$$d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_M} = \delta^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_M}_{\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_M} \partial_{\alpha_1} x^{i_1} \partial_{\alpha_2} x^{i_2} \cdots \partial_{\alpha_M} x^{i_M} \underset{1}{d} u^{\gamma_1} \underset{2}{d} u^{\gamma_2} \cdots \underset{M}{d} u^{\gamma_M} \tag{3.14}$$

или, переходя к символам перестановок,

$$d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_M} = \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_M} \partial_{\alpha_1} x^{i_1} \partial_{\alpha_2} x^{i_2} \cdots \partial_{\alpha_M} x^{i_M} \det(\underset{\mathfrak{b}}{d} u^\gamma) \tag{3.15}$$

Если элементарные M-ячейки нарезаны с помощью координатных поверхностей $u^\alpha = c^\alpha$, то тогда для $\mathfrak{c} \neq \gamma$ имеем

$$\underset{\mathfrak{c}}{d} u^\gamma = 0$$

а для случая $\mathfrak{c} = \gamma$

$$\underset{\mathfrak{c}}{d} u^\gamma = du^\gamma$$

В результате находим

$$\det(\underset{\mathfrak{c}}{d} u^\gamma) = du^1 du^2 \cdots du^M$$

Для случая $M = N$ получим

$$d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_M} = \overset{[-1]}{d\tau}{}^{12\ldots M} \overset{[+1]}{\varepsilon}{}_{i_1 i_2 \ldots i_M} \tag{3.16}$$

где $\overset{[-1]}{d\tau}{}^{12\ldots M}$ – естественный элемент объема, представляющий собой псевдоскаляр веса –1, который определяется, следующим образом

$$\overset{[-1]}{d\tau}{}^{12\ldots M} = \det(\partial_\alpha x^k) du^1 du^2 \cdots du^M \tag{3.17}$$

Если

$$x^1 = u^1, \quad x^2 = u^2, \dots\ x^M = u^M$$

то тогда $\det(\partial_\alpha x^k) = 1$ и

$$\overset{[-1]}{d\tau}{}^{12\dots M} = dx^1 dx^2 \cdots dx^M \tag{3.18}$$

С помощью псевдоскаляра $\overset{[-1]}{d\tau}{}^{12\dots M}$ и фундаментального ориентирующего скаляра e можно образовать абсолютный скаляр $d\tau$, являющийся инвариантным элементом объема

$$d\tau = e\overset{[-1]}{d\tau}{}^{12\dots M} \tag{3.19}$$

4. Тензорные элементы объема и площади поверхности в трехмерном пространстве. Рассмотрим случай трехмерного пространства. В качестве многообразия выберем поверхность, заданную естественной (Гауссовой) параметризацией u^1, u^2 и 2 ячейками, нарезанными координатными линиями $u^1 = c^1, u^2 = c^2$. Для этого случая в данных выше формулах принимается $N = 3$, $M = 2$. Тогда тензорный элемент площади поверхности (3.15) преобразуется к виду

$$d\tau^{ij} = \varepsilon^{\alpha_1\alpha_2}\partial_{\alpha_1}x^i\partial_{\alpha_2}x^j du^1 du^2 = 2\partial_1 x^{[i}\partial_2 x^{j]} du^1 du^2 \tag{4.1}$$

или

$$d\tau^{ij} = (\partial_1 x^i \partial_2 x^j - \partial_2 x^i \partial_1 x^j) du^1 du^2 \tag{4.2}$$

Соотношение (4.2) определяет тензорный элемент площади поверхности, играющий исключительно важную роль при определении тензоров силовых и моментных напряжений в механике континуума.

Антисимметричному абсолютному тензору $d\tau^{ij}$ сопутствует ковариантный псевдовектор веса –1:

$$\overset{[-1]}{dA_k} = \frac{1}{2}\varepsilon_{kij} d\tau^{ij} \tag{4.3}$$

определяющий псевдовекторный элемент площади, а абсолютный вектор

$$dS_k = \frac{1}{2} e_{kij} d\tau^{ij} = e_{kij}\partial_1 x^i \partial_2 x^j du^1 du^2 \tag{4.4}$$

задает векторный элемент площади поверхности.

Векторный и псевдовекторный элементы площади поверхности связаны соотношением

$$dS_k = e\overset{[-1]}{dA_k} \tag{4.5}$$

Естественный элемент площади поверхности задается следующей формулой

$$\overset{[-1]}{dA} = \operatorname{sgn} e \sqrt{\overset{[-1]}{dA}{}^k \overset{[-1]}{dA_k}} \tag{4.6}$$

Инвариантный элемент площади поверхности задается следующей формулой

$$dS = \sqrt{dS^k dS_k} \tag{4.7}$$

Ясно, что

$$dS = \overset{[-1]}{e}\, dA \tag{4.8}$$

Сравнивая формулы (4.4) и (2.4), заметим, что определение векторного элемента площади поверхности (4.4) строится на векторном (косом) произведении касательных векторов $\partial_1 x^i$ и $\partial_2 x^j$ к поверхности. Веса основных псевдотензоров, ассоциированных с M-мерным мноогобразием приведем в таблице 2.

В качестве примера, рассмотрим определения тензоров силовых и моментных напряжений. Выберем внутри тела элементарную двумерную площадку с инвариантным элементом площади dS и единичным вектором нормали n_k.

Единичный вектор нормали, в случае неявного задания поверхности

$$f(x^k) = 0$$

вычисляется согласно формуле

$$n_k = \frac{\partial_k f}{\sqrt{g^{ij}\partial_i f \partial_j f}} = \frac{\nabla_k f}{\sqrt{g^{ij}\nabla_i f \nabla_j f}}$$

где $f(x^i)$ является абсолютным скаляром (можно считать, что $f(x^i)$ имеет вес, не равный 0, но тогда его можно привести к абсолютному скаляру, домножив на соответствующую степень псевдоскаляра e). Откуда заключаем, что единичный вектор нормали n_i является абсолютным вектором.

Равнодействующие поверхностных сил и моментов, действующих на элементарную двумерной площадку сведется к абсолютному вектору поверхностных сил t^k и псевдовектору поверхностных моментов $\overset{[-1]}{m}_k$, отнесенных к инвариантному элементу площади dS. Следуя стандартному подходу, для произвольно ориентированной элементарной площадки определим тензоры силовых t^{ik} и моментных напряжений $\overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$ соотношениями

$$t^k = n_i t^{ik}, \quad \overset{[-1]}{m}_k = n_i \overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k} \tag{4.9}$$

Откуда заключаем, что тензор силовых напряжений t^{ik} имеет нулевой вес и является абсолютным тензором, а псевдотензор моментных напряжений $\overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$ имеет вес -1.

Далее рассмотрим ту же самую элементарную площадку, приписывая ей естественный элемент площади[6] $\overset{[-1]}{dA}$. Тогда вместо векторов t^k и m_k, появляются псевдовектор поверхностных сил $\overset{[+1]}{t}{}^k$ и абсолютный вектор поверхностных моментов m_k. Определения тензоров силовых и моментных напряжений, для этого случая, примут вид

$$\overset{[+1]}{t}{}^k = n_i \overset{[+1]}{t}{}^{ik}, \quad m_k = n_i \mu^{i\cdot}_{\cdot k} \tag{4.10}$$

[6] Литературный поиск показывает, что идея использования псевдоинвариантных элементов объема и площади при определения тензора силовых напряжений t^{ik}, по-видимому, принадлежит Я.А. Схоутену (см. [11, с. 201—204]).

Откуда замечаем, что псевдотензор силовых напряжений $\overset{[+1]}{t}{}^{ik}$ имеет вес $+1$, а тензор моментных напряжений $\mu^{i\cdot}_{\cdot k}$ оказывается абсолютным тензором.

Заключение. В статье обсуждаются вопросы вычисления тензорных элементов площади для M-мерного многообразия, погруженного в “плоское” конечномерное пространство.

1. Приводятся необходимые сведения из алгебры псевдотензоров, включая символы перестановок, дельта—символы и фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр.

2. Рассматриваются многообразия, заданные внутренней Гауссовой параметризацией. Вводится понятие M-ячейки на многообразии и определяется ее репер.

3. Обсуждаются представление об ориентациях тензорного элемента объема и критерий коориентированности M-реперов в разных точках M-многообразия.

4. Вводится понятие тензорного элемента объема M-ячейки и тензорного элемента площади M-многообразия.

5. Определяются: естественный элемент объема, инвариантный элемент объема в 3-мерном пространстве, псевдовекторный, векторный, естественный и инвариантный элементы площади поверхности.

6. В качестве примера рассматриваются два варианта определения тензоров силовых и моментных напряжений, пригодные для использования в микрополярных теориях.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты (№№ 19-51-60001, 20-01-00666).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Эйзенхарт Л.П.* Риманова геометрия. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. 316 с. Eisenhart L.P. Riemannian geometry. Princeton, Princeton University, 1926. 272 p.
2. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.
3. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Об одном дифференциальном ограничении в асимметричных теориях механики растущих тел // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 6. С. 38–46. https://doi.org/10.1134/S0572329919060102
4. *Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В.* Псевдотензорная формулировка механики гемитронных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82. № 4. С. 399–412. https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412
5. *Murashkin E.V., Radayev Yu.N.* On a micropolar theory of growing solids // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24. № 3. С. 424–444. https://doi.org/10.14498/vsgtu1792
6. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* К теории линейных гемитронных микрополярных сред // Вестн. Чув. гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния. 2020. № 4 (46). С. 16–24. https://doi.org/10.37972/chgpu.2020.89.81.031
7. *Veblen O., Thomas T.Y.* Extensions of Relative Tensors // Trans. Am. Math. Society. 1924. V. 26. P. 373–377.
8. *Veblen O.* Invariants of quadratic differential forms. Cambridge: The University Press, 1933. 102 p. Веблен О. Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 139 с.
9. Гуревич Г.Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с. Gurevich G.B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.
10. *Truesdell C., Toupin R.* The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie. Ed. by *S. Flügge*. Berlin, Heidel-

berg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2

11. *Schouten J.A.* Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p. Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965, 456 с.
12. *Sokolnikoff I.* Tensor Analysis: Theoryand Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc., 1964. 361 p. Сокольников И.С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.
13. *Synge J.L., Schild A.* Tensor calculus. Toronto: Toronto University Press, 1949. V. 5. 334 p.
14. *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. М.: Наука, 1966.
15. *Besdo D.* Ein beitrag zur nichtlinearen theorie des Cosserat-kontinuums // Acta Mech. 1974. V. 20. № 1. P. 105–131.
https://doi.org/10.1007/BF01374965
16. *Nowacki W.* Theory of micropolar elasticity. Springer, 1972. 286 p.
https://doi.org/10.1007/978-3- 7091-2720-9
17. *Nowacki W.* Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 p.
18. *Шилов Г.Е.* Введение в теорию линейных пространств. М.: ГТТЛ, 1956. 340 с.
19. *Сушкевич А.К.* Основы высшей алгебры. М.: ОНТИ, 1937. 476 с.
20. *Лагалли М.* Векторное исчисление. М.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. 345 с.
21. *Poincar'e H.* Sur les residus des integrales doubles // Acta Math. 1887. V. 6. P. 321–380.
https://doi.org/10.1007/BF02406742
22. *Poincar'e H.* Analysis situs // J. Ecole Polytech. 1895. V. 2. № 1. P. 1–123.