ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2022, № 2, с. 82–89

УДК 539.735

К ВОПРОСУ О КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЕЙ ИЗ УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОГО ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ, ПРИ ЛИНЕАРИЗОВАННОМ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Б. Г. Миронов[a,*], Ю. Б. Миронов[b,]**

[a] *Российский университет транспорта, Москва, Россия*
[b] *Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия*
**e-mail: mbg.chspu@yandex.ru*
***e-mail: i.b.mironov@mtuci.ru*

Поступила в редакцию 22.10.2021 г.
После доработки 24.10.2021 г.
Принята к публикации 25.10.2021 г.

В работе исследовано кручение стержней из анизотропно упрочняющегося жесткопластического материала при линеаризованном условии пластичности. Предполагается, что стержень находится под действием внешнего давления, линейно меняющегося вдоль образующей. Определены напряженное и деформированное состояния стержня. Найдены линии разрыва напряжений.

Ключевые слова: пластичность, неоднородность, упрочнение, кручение, анизотропия, деформация, напряжение

DOI: 10.31857/S0572329922020143

Кручение является одним из распространенных видов деформации тел. Оно довольно часто встречается в инженерной практике. Теории кручения стержней из идеального жесткопластического материала посвящены многочисленные работы, в частности кручение изотропных и анизотропных стержней изложено в [1–3]. Работы [5, 6] и [8, 9] посвящены исследованию кручения неоднородных стержней из идеального жесткопластического материала. Кручение стержней из упрочняющегося материала приводит к определенным сложностям. В этом случае, задача не является статически определимой. Возникают трудности с точной постановкой задачи. Требует совместного рассмотрения поля напряжений и деформаций. Отдельные случаи в линеаризованной постановке рассмотрены в [4]. В [7] исследовано кручение стержней из анизотропного жесткопластического материала, находящегося под действием давления, меняющегося вдоль образующей.

Напряженно-деформированное состояние стержней из анизотропно упрочняющегося материала, находящихся под действием внешнего давления, линейно меняющегося вдоль образующей стержня, при кручении определяются из соотношений:

$$\begin{gathered}\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\lambda z + \mu \ (\lambda,\ \mu - \mathrm{const}) \\ \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}(x,y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x,y)\end{gathered} \tag{1}$$

— уравнение равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \lambda \tag{2}$$

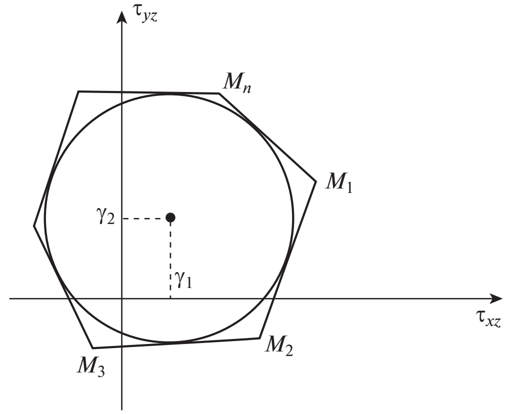

Рис. 1. Линеаризованное условие пластичности.

— условие текучести

$$(\tau_{xz} - ce_{xz})^2 + (\tau_{yz} - ce_{yz})^2 = k^2 \ (k - \mathrm{const}) \tag{3}$$

— соотношения ассоциированного закона течения

$$\frac{de_{xz}}{\tau_{xz} - ce_{xz}} = \frac{de_{yz}}{\tau_{yz} - ce_{yz}}, \quad e_x = e_y = e_z = e_{xy} = 0, \tag{4}$$

где e_{ij} — компоненты деформации, σ_{ij} — компоненты напряжения, k — предел текучести.

Предполагается, что упрочнение линейное (c – const).

В плоскости τ_{xz}, τ_{yz} уравнение (3) определяет окружность радиуса k (рис. 1) с центром в точке с координатами $\gamma_1 = ce_{xz}$, $\gamma_2 = ce_{yz}$.

Заменим условие текучести (3) уравнениями

$$A_i(\tau_{xz} - ce_{xz}) + B_i(\tau_{yz} - ce_{yz}) = k \tag{5}$$

где A_i, B_i – const, $A_i^2 + B_i^2 = 1$, $i = 1, 2, ..., n$.

Уравнения (5) на плоскости τ_{xz}, τ_{yz} представляет собой замкнутую ломанную $\mathrm{M_1M_2M_3 \ldots M_nM_1}$ (рис. 1) и являются линеаризованными соотношениями условия (3). Рассмотрим (5) в качестве пластического потенциала. Тогда вместо (4) имеем соотношения

$$\frac{de_{xz}}{A_i} = \frac{de_{yz}}{B_i} \tag{6}$$

В начальный момент закручивания компоненты деформации e_{ij} равны 0. Тогда из соотношений (6) и части соотношений (4) следует

$$\frac{e_{xz}}{A_i} = \frac{e_{yz}}{B_i}, \quad e_x = e_y = e_z = e_{xy} = 0 \tag{7}$$

Из соотношений (7) имеем

$$B_i e_{xz} - A_i e_{yz} = 0 \tag{8}$$

Учитывая, что компоненты перемещения u, v, w имеют вид

$$u = \theta yz, \quad v = -\theta xz, \quad w = w(x, y), \tag{9}$$

где w — депланация, θ — крутка, соотношения связи между компонентами деформации и компонентами перемещения запишем в виде

$$e_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta y\right), \quad e_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta x\right) \tag{10}$$

Из (10) получим

$$\frac{\partial e_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} = \theta \tag{11}$$

Согласно (8) из (11) получим

$$-B_i \frac{\partial e_{xz}}{\partial x} + A_i \frac{\partial e_{xz}}{\partial y} = A_i\theta \tag{12}$$

или

$$-B_i \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + A_i \frac{\partial e_{yz}}{\partial y} = B_i\theta \tag{13}$$

Характеристиками соотношений (12) и (13) являются прямые

$$A_i x + B_i y + C_i = 0 \tag{14}$$

Вдоль характеристик (14) имеют место интегралы соответственно соотношений (12) и (13)

$$-B_i e_{xz} = A_i\theta x + \alpha_{1i} \quad \text{или} \quad e_{xz} = \theta y + \alpha_{2i} \tag{15}$$

$$e_{yz} = -\theta x + \beta_{1i} \quad \text{или} \quad A_i e_{yz} = B_i\theta y + \beta_{2i} \tag{16}$$

$$\alpha_{1i} = A_i\beta_{1i}, \quad \alpha_{1i} = \theta C_i - B_i\alpha_{2i}, \quad \beta_{2i} = B_i\alpha_{2i}, \quad \beta_{2i} = \theta C_i + A\beta_{1i}$$

Из соотношений (3) следует

$$A_i\tau_{xz} + B_i\tau_{yz} = k + c(A_i e_{xz} + B_i e_{yz}) \tag{17}$$

Уравнению равновесия (2) удовлетворим, полагая

$$\tau_{xz} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\lambda}{2}x, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\lambda}{2}y \tag{18}$$

Подставляя выражения (18) в условия пластичности (17), получим

$$A_i \frac{\partial U}{\partial y} - B_i \frac{\partial U}{\partial x} = k + c(A_i e_{xz} + B_i e_{yz}) \tag{19}$$

Характеристики соотношения (19) имеют вид (14), а вдоль характеристик имеют место интегралы

$$-B_i U = kx - \frac{\lambda}{2}C_i x + c\theta\left(-\frac{1}{2}B_i(x^2 + y^2\right) + c(A_i\alpha_{2i} + B_i\beta_{1i})x + d_{1i} \tag{20}$$

$$A_i U = ky - \frac{\lambda}{2}C_i y + c\theta\left(\frac{1}{2}A_i(x^2 + y^2\right) + c(A_i\alpha_{2i} + B_i\beta_{1i})y + d_{2i} \tag{21}$$

Рассмотрим кручение стержня полигонального сечения. На контуре сечения вектор касательного напряжения $\vec{\tau} = (\tau_{xz}, \tau_{yz})$ параллелен контуру.

В случае идеально пластического материала характеристики направлены перпендикулярно контуру. В рассматриваемом случае характеристики (14) фиксированы и не зависят от величины деформации, поэтому для данного контура сечения стержня все-

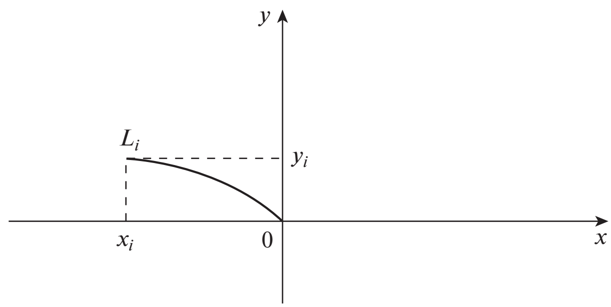

Рис. 2. Линия разрыва напряжений.

гда можно выбрать линеаризованное условие текучести (5) таким образом, чтобы характеристики (14) оставались перпендикулярными к контуру во время всего процесса пластического деформирования.

Особо следует остановиться на линиях разрыва напряжений. Линии разрыва напряжений являются следом исчезающих жестких областей, на них всегда

$$e_{xz} = e_{yz} = 0 \tag{22}$$

Рассмотрим область, ограниченную замкнутой ломанной $Ox_iL_iy_iO$ (рис. 2). Пусть Ox_i и Oy_i – части контура поперечного сечения стержня. OL_i – линия разрыва напряжений. Оси координат расположим так, как показано на рис. 2.

Уравнения линий разрыва напряжений OL_i запишем в виде

$$y = \varphi_i(x) \quad \text{или} \quad x = \psi_i(y) \tag{23}$$

Положим $A_i = 0, B_i = 1$ для того, чтобы характеристики (14) были ортогональны к контуру Oy_i. Условие (17) запишется в виде

$$\tau_{yz} = k + ce_{yz} \tag{24}$$

Характеристики (14) примут вид

$$y + C_i = 0 \tag{25}$$

Согласно (15), (16) из (22) получим

$$e_{xz} = 0, \quad e_{yz} = -\theta(x - \psi_i(y)) \tag{26}$$

С учетом (26) из (24) имеем

$$\tau_{yz} = k - c\theta(x - \psi_i(y)) \tag{27}$$

В рассматриваемом случае из (20) следует

$$U = -kx - \frac{\lambda}{2}xy + \frac{1}{2}c\theta(x^2 + y^2) - c\theta\psi_i(y)x + d_{1i} \tag{28}$$

Полагая $U = 0$ на контуре поперечного сечения стержня (в данном случае Oy_i), из (28) получим

$$U = -kx - \frac{\lambda}{2}xy + \frac{1}{2}c\theta x^2 - c\theta\psi_i(y)x \tag{29}$$

Из (18) и (29) следует

$$\tau_{xz} = (\lambda - c\theta\psi_i'(y))x, \quad \psi_i'(y) = \frac{d\psi_i}{dy} \tag{30}$$

Для того, чтобы характеристики (14) были ортогональны к контуру Ox_i, следует положить $A_i = 1, B_i = 0$. Условие (17) в рассматриваемом случае примет вид

$$\tau_{xz} = k + ce_{xz} \tag{31}$$

Характеристики (14) запишутся в виде

$$x + C_i = 0 \tag{32}$$

Согласно (15), (16) из (22) получим

$$e_{xz} = \theta(y - \varphi_i(x)), \quad e_{yz} = 0 \tag{33}$$

С учетом (33) из (31) имеем

$$\tau_{xz} = k + c\theta(y - \varphi_i(x)) \tag{34}$$

В рассматриваемом случае из (20) следует

$$U = ky - \frac{\lambda}{2}xy + \frac{1}{2}c\theta(x^2 + y^2) - c\theta\varphi_i(x)y + d_{2i} \tag{35}$$

Полагая $U = 0$ на контуре поперечного сечения стержня (в данном случае Ox_i), из (35) получим

$$U = ky - \frac{\lambda}{2}xy + \frac{1}{2}c\theta y^2 - c\theta\varphi_i(x)y \tag{36}$$

Из (18) и (36) следует

$$\tau_{yz} = (\lambda + c\theta\varphi_i'(x))y, \quad \varphi_i'(x) = \frac{d\varphi_i}{dx} \tag{37}$$

Согласно (27), (30) и (34), (37) имеем следующее дифференциальное уравнение для определения линии разрыва напряжений OL_i

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c\theta x - \lambda y + k}{\lambda x + c\theta y + k} \tag{38}$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (38), получим

$$c\theta(y^2 - x^2) + 2\lambda xy - 2k(x + y) = 0 \tag{39}$$

Из (39) находим

$$\psi_i(y) = \frac{1}{c\theta}\left(\lambda y - k + \sqrt{(\lambda y - k)^2 - 2kc\theta y + (c\theta y)^2}\right) \tag{40}$$

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{c\theta}\left(-\lambda y + k - \sqrt{(\theta x - k)^2 + 2kc\theta x + (c\theta x)^2}\right) \tag{41}$$

Рассмотрим стержень, поперечное сечение которого есть квадрат $m_1m_2m_3m_4$ со стороной длины $2l$ (рис. 3).

В рассматриваемом случае линеаризованное условие пластичности (5) выберем таким образом, чтобы отрезок m_im_{i+1} контура поперечного сечения стержня был параллелен вектору $\vec{r_i} = (A_i, B_i)$ (рис. 3).

Получим четыре линеаризованных условия текучести

$$\tau_{yz} - ce_{yz} = k \tag{42}$$

$$\tau_{xz} - ce_{xz} = k \tag{43}$$

$$\tau_{yz} - ce_{yz} = -k \tag{44}$$

$$\tau_{xz} - ce_{xz} = -k \tag{45}$$

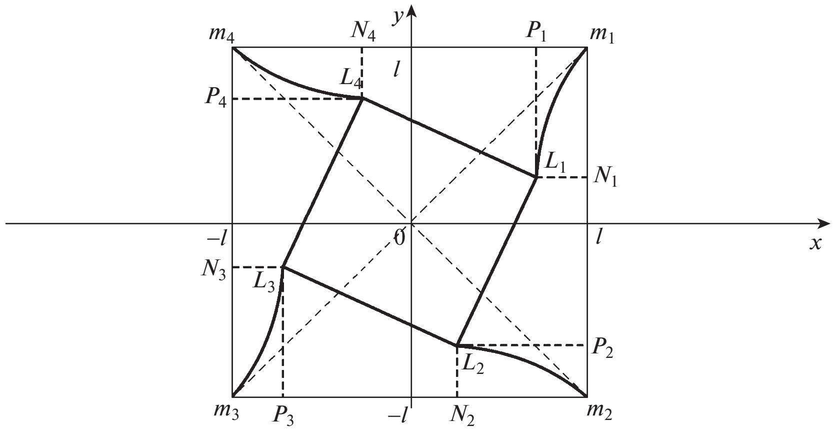

Рис. 3. Расположение линий разрыва напряжений в сечении стержня.

Рассмотрим линии разрыва напряжений. Имеем следующие линии разрыва напряжений

$$m_1L_1 : y = \varphi_1(x) \quad \text{или} \quad x = \psi_1(y) \tag{46}$$

$$m_2L_2 : y = \varphi_2(x) \quad \text{или} \quad x = \psi_2(y) \tag{47}$$

$$m_3L_3 : y = \varphi_3(x) \quad \text{или} \quad x = \psi_3(y) \tag{48}$$

$$m_4L_4 : y = \varphi_4(x) \quad \text{или} \quad x = \psi_4(y) \tag{49}$$

$$L_iP_i : x = x_i (i = 1;3) \tag{50}$$

$$L_iN_i : y = y_i (i = 1;3) \tag{51}$$

$$L_jP_j : y = y_j (j = 2;4) \tag{52}$$

$$L_jN_j : x = x_j (j = 2;4) \tag{53}$$

где

$$\psi_1(y) = l + \frac{1}{c\theta}(\lambda(y-l) - k + \sqrt{(\lambda(y-l)-k)^2 + 2kc\theta(y-l) + (c\theta(y-l))^2})$$

$$\varphi_1(x) = l + \frac{1}{c\theta}(-\lambda(x-l) - k + \sqrt{(\lambda(x-l)+k)^2 + 2kc\theta(x-l) + (c\theta(x-l))^2})$$

$$\psi_2(y) = l + \frac{1}{c\theta}(\lambda(y+l) - k + \sqrt{(\lambda(y+l)-k)^2 - 2kc\theta(y+l) + (c\theta(y+l))^2})$$

$$\varphi_2(x) = -l + \frac{1}{c\theta}(-\lambda(x-l) + k - \sqrt{(\lambda(x-l)-k)^2 + 2kc\theta(x-l) + (c\theta(x-l))^2})$$

$$\psi_3(y) = -l + \frac{1}{c\theta}(\lambda(y+l) + k - \sqrt{(\lambda(y+l)+k)^2 - 2kc\theta(y+l) + (c\theta(y+l))^2})$$

$$\varphi_3(x) = -l + \frac{1}{c\theta}(-\lambda(x+l) + k - \sqrt{(\lambda(x+l)-k)^2 - 2kc\theta(x+l) + (c\theta(x+l))^2})$$

$$\psi_4(y) = -l + \frac{1}{c\theta}(\lambda(y-l) + k - \sqrt{(\lambda(y-l)+k)^2 + 2kc\theta(y-l) + (c\theta(y-l))^2})$$

$$\varphi_4(x) = l + \frac{1}{c\theta}(-\lambda(x+l) - k + \sqrt{(\lambda(x+l)+k)^2 - 2kc\theta(x+l) + (c\theta(x+l))^2})$$

$$c\theta(y_1 - l) + \lambda(x_1 - l) + k = 0$$

$$c\theta(x_2 - l) - \lambda(y_2 + l) + k = 0$$

$$c\theta(y_3 + l) + \lambda(x_3 + l) - k = 0$$

$$c\theta(x_4 - l) - \lambda(y_4 + l) - k = 0$$

Согласно (46)–(53) из (26), (27), (30) и (33), (34), (37) с учетом (42)–(45) имеем следующие соотношения для компонент напряжений и деформаций:

в области $m_1L_1N_1$

$$e_{xz} = 0, \quad e_{yz} = -\theta(x - \psi_1(y))$$

$$\tau_{yz} = k - c\theta(x - \psi_1(y)), \quad \tau_{xz} = (\lambda - c\theta\psi_1'(y))x$$

в области $N_1L_1L_2P_2$

$$e_{xz} = 0, \quad e_{yz} = -\theta\left(x - x_1 - \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}(y - y_1)\right)$$

$$\tau_{yz} = k - c\theta\left(x - x_1 - \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}(y - y_1)\right), \quad \tau_{xz} = \left(\lambda - c\theta\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\right)x$$

в области $m_2L_2P_2$

$$e_{xz} = 0, \quad e_{yz} = -\theta(x - \psi_2(y))$$

$$\tau_{yz} = k - c\theta(x - \psi_2(y)), \quad \tau_{xz} = (\lambda - c\theta\psi_2'(y))x$$

Компонента напряжения τ_{xz} терпит разрыв на отрезках L_1N_1, L_2P_2. Контактирующее напряжение τ_{yz} при переходе через L_1N_1, L_2P_2 непрерывно. Аналогично, определяются компоненты напряжений и деформаций и в других областях. В область, ограниченную ломанной $L_1L_2L_3L_4L_1$ решение не может быть продолжено. Вдоль ломанной $L_1L_2L_3L_4L_1$ действуют касательные напряжения, направленные вдоль оси z, которые уравновешивают перепад давления σ_z.

Таким образом, в работе

1) определено напряженное и деформированное состояние стержня из анизотропно упрочняющегося материала, находящегося под действием внешнего давления, линейно меняющегося вдоль образующей, при кручении для линеаризованного условия пластичности;

2) исследовано предельное состояние стержня из анизотропно упрочняющегося материала с квадратным поперечным сечением, находящегося под действием внешнего давления, линейно меняющегося вдоль образующей, в процессе кручения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соколовский В.В.* Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
2. *Прагер В., Ходж Ф.Г.* Теория идеально пластических тел. М.: ИЛ, 1956. 398 с.
3. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
4. *Ивлев Д.Д.* Механика пластических сред. В 2 т. Т. 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. М.: Физматлит, 2002. 448 с.
5. *Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В.* Теория пластичности неоднородных тел. М.: Мир, 1964. 156 с.

6. *Миронов Б.Г.* К теории кручения неоднородных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4 (22). С. 236–240.
7. *Миронов Б.Г., Козлова Л.С.* Кручение призматических стержней при действии давления, линейно меняющегося вдоль образующей // Известия РАН. МТТ. 2014. № 3. С. 107–113.
8. *Mironov B.G., Mironov Yu.B.* Torsion anisotropic and composite cylindrical rod // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1203. P. 012009.
https://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012009
9. *Mironov B.G., Mironov Yu.B.* Torsion of non-uniform cylindrical and prismatic rods made of ideally plastic material under linearized yield criterion // Mech. Solids. 2020. V. 55. № 6. P. 813–819.
https://doi.org/10.3103/S0025654420060102