

УДК. 539.374

ВЛИЯНИЕ МОДЕЛИ ПОВЕДЕНИЯ ТОНКОГО АДГЕЗИОННОГО СЛОЯ НА ЗНАЧЕНИЕ J -ИНТЕГРАЛА

© 2022 г. В. В. Глаголев^{а,*}, А. А. Маркин^{а,**}

^а Тульский государственный университет, Тула, Россия

*e-mail: vadim@tsu.tula.ru

**e-mail: markin-nikram@yandex.ru

Поступила в редакцию 23.09.2021 г.

После доработки 26.09.2021 г.

Принята к публикации 27.09.2021 г.

Рассматривается сравнение двух моделей поведения материала тонкого адгезионного слоя и их влияние на значение J -интеграла для конкретного экспериментального образца с заданными механическими и геометрическими свойствами. Исследуется линейно упругая модель поведения и модель, учитывающая зону ослабленных связей, с конечным линейным распределением поля напряжений. Значение J -интеграла определяется через произведение удельной работы напряжений на толщину слоя адгезива в зоне обрыва связей адгезива. Предполагается, что толщина адгезива конечна, но мала по сравнению с толщиной консоли ДКБ-образца. Конечность толщины слоя дает возможность определять его деформации на относительно малых толщинах и находить соответствующее энергетическое произведение. Распределение напряжений в модели с зоной ослабленных связей, вносит определяющее значение на величину J -интеграла. Для адгезива с выраженными пластическими свойствами расчет J -интеграла с учетом конечности напряженного состояния дает близкий к эксперименту результат по сравнению с упругой моделью.

Ключевые слова: линейный размер, трещина нормального отрыва, энергетическое произведение, J -интеграл

DOI: 10.31857/S0572329922020118

Введение. Нахождение критических состояний адгезионных слоев в композиционных материалах основано на классическом представлении трещиноподобного дефекта в виде математического разреза [1–3]. В этом случае продолжение математического разреза в массив слоистого композита ассоциируется с адгезионным слоем нулевой толщины. Отсутствие материального объема в адгезиве не дает возможности рассматривать его реальные механические свойства при построении соответствующих моделей деформирования. Как и для механики квазихрупкого разрушения основными моделями здесь являются либо сингулярная трещина Гриффитса либо когезионная трещина Баренблатта [4].

Введение в модель адгезионного слоя толщины [5–7] дает возможность отразить его реальные механические свойства. Однако в этом случае возникает вопрос о влиянии данных свойств на критическое внешнее воздействие. Определение предельных состояний тонких, но конечных адгезионных слоев в данной работе связываем с нахождением J_C -интеграла [5]. В работе обсуждаются результаты исследования линейно-упругой модели поведения адгезионного слоя и модели с линейным распределением поля напряжений в зоне ослабленных связей слоя на значение J_C -интеграла.

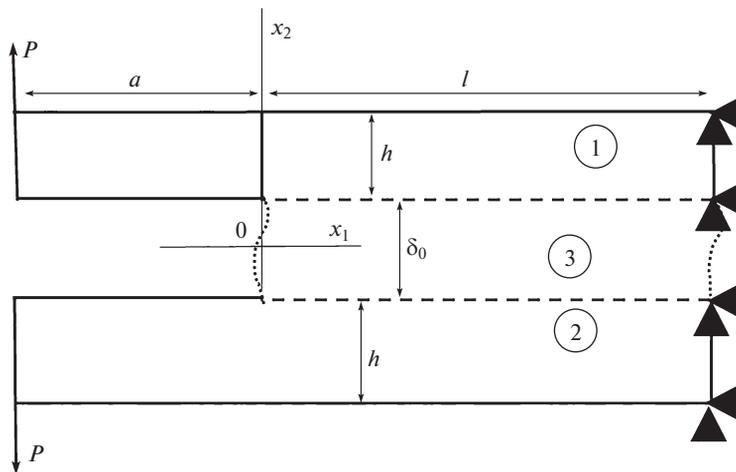


Рис. 1. Схема нагружения.

1. Постановка задачи. На рис. 1 показано нагружение нормальным отрывом двухконсольной балки (ДКБ-образца) длиной $l + a$ с тонким адгезионным слоем конечной толщины δ_0 . Тела 1 и 2 с одинаковыми толщинами h связаны по длине l адгезивом. Материал пластин принимаем линейно упругим, с нулевым коэффициентом Пуассона. Правый торец образца жестко закреплен от горизонтальных и вертикальных перемещений, на левых торцах консолей действует вертикальная симметричная нагрузка интенсивностью P . Вся остальная поверхность образца свободна от внешней нагрузки. Рассматривается состояние плоской деформации.

Для описания взаимодействия адгезива 3 с телами 1 и 2 применим концепцию “слоя взаимодействия”, развитую в [5, 6]. В этом случае условия равновесия тел 1 и 2 запишем в вариационной форме для тела 1:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\delta \epsilon} ds + \int_l \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + \int_l \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^+ dx_1 + 0.5\delta_0 \left(\int_l \bar{\sigma}_{11} \frac{d\delta u_1^+}{dx_1} dx_1 + \int_l \bar{\sigma}_{12} \frac{d\delta u_2^+}{dx_1} dx_1 \right) = \int_{L_1} \mathbf{P}^1 \cdot \delta u dL \quad (1.1)$$

и тела 2:

$$\int_{S_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\delta \epsilon} ds - \int_l \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^- dx_1 - \int_l \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^- dx_1 + 0.5\delta_0 \left(\int_l \bar{\sigma}_{11} \frac{d\delta u_1^-}{dx_1} dx_1 + \int_l \bar{\sigma}_{12} \frac{d\delta u_2^-}{dx_1} dx_1 \right) = \int_{L_2} \mathbf{P}^2 \cdot \delta u dL \quad (1.2)$$

где $\cdot \cdot$ – двойное скалярное умножение; \cdot – скалярное умножение; S_1, S_2 – площади тел 1 и 2; $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}$ – тензоры напряжений и деформаций; $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ – тензор средних напряжений слоя; $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ – тензор средних деформаций слоя с компонентами:

$$\bar{\epsilon}_{22}(x_1) = \frac{u_2^+(x_1) - u_2^-(x_1)}{\delta_0}, \quad \bar{\epsilon}_{11}(x_1) = 0.5 \left(\frac{du_1^+(x_1)}{dx_1} + \frac{du_1^-(x_1)}{dx_1} \right) \quad (1.3)$$

$$\bar{\varepsilon}_{21}(x_1) = \bar{\varepsilon}_{12}(x_1) = 0.5 \left(\frac{u_1^+(x_1) - u_1^-(x_1)}{\delta_0} + 0.5 \left(\frac{du_2^+(x_1)}{dx_1} + \frac{du_1^-(x_1)}{dx_1} \right) \right) \quad (1.4)$$

где u_k^\pm – компоненты векторов перемещений верхней и нижней границ слоя соответственно; $i = 1, 2$; L_1, L_2 – граница приложения внешней нагрузки для тела 1 и 2. Постулируется жесткое сцепление между границами области 3 и областями 1, 2.

Для материала пластин 1 и 2 примем определяющие соотношения в форме закона Гука с нулевым коэффициентом Пуассона:

$$\sigma_{ij} = E\varepsilon_{ij} \quad (1.5)$$

где E – модуль упругости; $j = 1, 2$.

Предполагаем, что напряженное состояние слоя для данного вида нагружения однородно по его толщине и определяется одной компонентой тензора средних напряжений $\bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{12} = 0$, что соответствует представлению связей Прандтля [8–10].

В силу симметрии задачи проекции поля перемещений удовлетворяют условиям $u_1^1(x_1, x_2) = u_1^2(x_1, x_2) = u_1(x_1, x_2)$, $u_2^1(x_1, x_2) = -u_2^2(x_1, x_2) = u_2(x_1, x_2)$, а вектор распределенной внешней нагрузки $-\mathbf{P}^1 = -\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$. Таким образом, достаточно ограничиться рассмотрением тела 1. С учетом ограничения на напряженное состояние в слое система уравнений (1)–(2) преобразуется в вариационное уравнение:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} ds + \int_l \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 = \int_{L_1} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} dL \quad (1.6)$$

Решение уравнения (1.6) с учетом (1.5) и заданных определяющих соотношений в слое сводится к нахождению поля перемещений $\mathbf{u}(x_1, x_2)$ в теле 1 (см. рисунок) с учетом граничных условий на его торцах:

$$u_1(x_1, x_2)|_{x_1=l} = 0, \quad u_2(x_1, x_2)|_{x_1=l} = 0 \quad (1.7)$$

$$\sigma_{11}|_{x_1=-a} = 0, \quad \sigma_{12}|_{x_1=-a} = -P \quad (1.8)$$

Для упрощения задачи принимаем, что поле перемещений в теле 1 определено следующим образом:

$$u_1(x_1, x_2) = u_1^+(x_1) - \varphi(x_1)(x_2 - \delta_0/2), \quad u_2(x_1, x_2) = u_2^+(x_1) \quad (1.9)$$

Входящий в представление (1.9) параметр φ имеет геометрический смысл малого угла поворота материальной нормали к плоскости $x_2 = \delta_0/2$ в теле 1. Согласно распределению (1.9) деформации в консоли будут определяться в виде:

$$\varepsilon_{11} = \frac{du_1^+(x_1)}{dx_1} - \varphi'(x_1)(x_2 - \delta_0/2), \quad \varepsilon_{12} = 0.5 \left(\frac{du_2^+(x_1)}{dx_1} - \varphi(x_1) \right), \quad \varepsilon_{22}(x_1, x_2) = 0 \quad (1.10)$$

Выражения (1.10) подобно теории Тимошенко [11] и работам [12, 13], учитывают сдвиговые деформации и повороты нормалей в теле.

Подставив (1.10) в (1.6) и приравняв слагаемые при равных вариациях, приходим к двум системам дифференциальных уравнений равновесия для участка $x_1 \in [-a; 0]$:

$$\frac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0, \quad \frac{dQ_{11}}{dx_1} = 0, \quad \frac{dQ_{12}}{dx_1} = 0 \quad (1.11)$$

для участков $x_1 \in (0; l]$:

$$\frac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0, \quad \frac{dQ_{11}}{dx_1} = 0, \quad \frac{dQ_{12}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{22} \quad (1.12)$$

с условиями сопряжения:

$$u_1^+ \Big|_{x_1=-0} = u_1^+ \Big|_{x_1=+0}, \quad \varphi \Big|_{x_1=-0} = \varphi \Big|_{x_1=+0}, \quad u_2^+ \Big|_{x_1=-0} = u_2^+ \Big|_{x_1=+0}, \quad M_{11} \Big|_{x_1=-0} = M_{11} \Big|_{x_1=+0}, \quad Q_{12} \Big|_{x_1=-0} = Q_{12} \Big|_{x_1=+0}, \quad Q_{11} \Big|_{x_1=-0} = Q_{11} \Big|_{x_1=+0}$$
 и естественным граничным условиям на левом торце:

$$Q_{12} \Big|_{x_1=-a} = -Q_2, \quad Q_{11} \Big|_{x_1=-a} = 0, \quad M_{11} \Big|_{x_1=-a} = 0 \quad (1.13)$$

На правом торце из (1.7), (1.8) с учетом (1.11), (1.12) рассматриваем граничные условия:

$$u_1^+ \Big|_{x_1=l} = 0, \quad \varphi \Big|_{x_1=l} = 0, \quad u_2^+ \Big|_{x_1=l} = 0 \quad (1.14)$$

где $Q_{11}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11} dx_2$, $Q_{12}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{12} dx_2$ – обобщенные силы; $M_{11}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11}(x_2 - \delta_0/2) dx_2$ – обобщенный момент.

С учетом (1.10) и условия плоской деформации ($\varepsilon_{33} = 0$), определяющие соотношения (1.5) для тела 1 представим в виде:

$$\sigma_{11} = E \left(\frac{du_1^+(x_1)}{dx_1} - \varphi'(x_1)(x_2 - \delta_0/2) \right), \quad \sigma_{12} = \frac{E}{2} \left(\frac{du_2^+(x_1)}{dx_1} - \varphi(x_1) \right) \quad (1.15)$$

Запишем выражения обобщенных сил и момента с учетом (1.15):

$$Q_{11}(x_1) = E \left(h \frac{du_1^+}{dx_1} - \frac{h^2}{2} \varphi' \right), \quad (1.16)$$

$$Q_{12}(x_1) = \frac{Eh}{2} \left(\frac{du_2^+}{dx_1} - \varphi \right), \quad M_{11}(x_1) = E \left(\frac{h^2}{2} \frac{du_1^+}{dx_1} - \frac{h^3}{3} \varphi' \right)$$

В результате задача (1.11)–(1.16), (1.6) с учетом определяющих соотношений для адгезива становится замкнутой относительно трех неизвестных функций: $u_1^+(x_1)$, $u_2^+(x_1)$, $\varphi(x_1)$.

2. Упругое деформирование слоя. Полагаем определяющие соотношения для адгезива в виде:

$$\bar{\sigma}_{22} = E_3 \bar{\varepsilon}_{22}, \quad \bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{12} = 0 \quad (2.1)$$

где E_3 – модуль упругости материала слоя.

Рассмотрим решение задачи на участке сопряжения слоя и консоли. Из системы уравнений (1.11) осуществим перенос граничных условий (1.13) в точку $x_1 = 0$:

$$Q_{12} \Big|_{x_1=0} = -Q_2, \quad Q_{11} \Big|_{x_1=0} = 0, \quad M_{11} \Big|_{x_1=0} = -Q_2 a \quad (2.2)$$

Полагая $E_3/E \geq 6\delta_0/h$, запишем решение (1.12) для участка $x_1 \in (0; l \rightarrow \infty)$ в виде [14]:

$$u_1^+ = \frac{h}{2} \varphi, \quad u_2^+ = A e^{\lambda_2 x_1} + B e^{\lambda_4 x_1}, \quad \varphi = A \left(\lambda_2 - \frac{K1}{\lambda_2} \right) e^{\lambda_2 x_1} + B \left(\lambda_4 - \frac{K1}{\lambda_4} \right) e^{\lambda_4 x_1} \quad (2.3)$$

$$K1 = \frac{4}{h\delta_0} \frac{E_3}{E}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{\frac{2}{h\delta_0} \frac{E_3}{E} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{6\delta_0 E}{hE_3}} \right)}, \quad \lambda_4 = -\sqrt{\frac{2}{h\delta_0} \frac{E_3}{E} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{6\delta_0 E}{hE_3}} \right)}$$

$$A = \frac{Q_2}{(\lambda_2 - \lambda_4)} \left(\frac{12a}{Eh^3\lambda_4} - \lambda_2^2 \frac{\delta_0}{2E_3} \right), \quad B = -\frac{Q_2}{(\lambda_2 - \lambda_4)} \left(\frac{12a}{Eh^3\lambda_2} - \lambda_4^2 \frac{\delta_0}{2E_3} \right)$$

Из (2.3) найдем вертикальное перемещение в вершине слоя:

$$u_2^+ \Big|_{x_1=0} = A + B = Q_2 \left(\frac{12a}{Eh^3\lambda_2\lambda_4} - (\lambda_2 + \lambda_4) \frac{\delta_0}{2E_3} \right) \quad (2.4)$$

Рассмотрим представление (2.4) при условии $\delta_0/h \ll 1$

$$\lambda_2 = -2\sqrt{\frac{E_3}{h\delta_0 E}}, \quad \lambda_4 = -\sqrt{\frac{6}{h^2}}, \quad u_2^+ \Big|_{x_1=0} = \frac{Q_2\sqrt{2}}{\sqrt{EE_3}} \sqrt{\frac{\delta_0}{h}} \left(\sqrt{3} \frac{a}{h} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Из (1.3), (2.1) и последнего выражения находим значение напряжения в вершине слоя:

$$\bar{\sigma}_{22} \Big|_{x_1=0} = \frac{Q_2 2\sqrt{2}}{\sqrt{\delta_0 h}} \sqrt{\frac{E_3}{E}} \left(\sqrt{3} \frac{a}{h} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (2.5)$$

Из работы [5] следует выражение J_C -интеграла через критические значения термо-механических характеристик и толщину слоя в торцевом сечении адгезива:

$$J_C = \delta_0 \rho_0 (\psi_k + w_k) \quad (2.6)$$

где $\rho_0 \psi_k$ – критическое изменение удельной свободной энергии торцевого сечения; $\rho_0 w_k$ – критическое изменение удельной диссипации торцевого сечения.

В случае упругого деформирования выражение (2.6) приводит к связи J -интеграла с энергетическим произведением (ЭП) [6] $J = 2\gamma = \delta_0 \rho_0 \psi$. Для одноосного напряженного состояния в слое из (2.6) находим: $J = 2\gamma = \frac{\bar{\sigma}_{22}^2}{2E_3} \delta_0$.

С учетом (2.5) получаем:

$$2\gamma = \frac{12Q_2^2}{Eh} \left(\left(\frac{a}{h} \right)^2 + \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{a}{h} \right) + \frac{1}{6} \right) \quad (2.7)$$

В [15] для слоя нулевой толщины найдено выражение потока упругой энергии в рамках теории пластин с учетом сдвиговых деформаций. При $\nu = 0$ выражение потока упругой энергии принимает вид:

$$G_I^b = \frac{12Q_2^2}{Eh} \left(\left(\frac{a}{h} \right)^2 + \sqrt{\frac{2}{2.5}} \left(\frac{a}{h} \right) + \frac{1}{5} \right) \quad (2.8)$$

Таким образом закон распределения поля перемещений в виде (1.9) дает близкий результат к решению на основе теории пластин.

Согласно данным работы [16] для образца со следующими геометрическими и механическими характеристиками: $a = 0.055$ м, $h = 0.0127$ м, $b = 0.025$ м, $E = 2 \times 10^{11}$ Па, где b – толщина образца, оценим значение $G_1 = G_{IC}$ в момент инициализации трещины при критической внешней нагрузке. В работе [6] приведены экспериментальные значения внешней нагрузки при инициализации трещины в адгезиве, которые составили $P_{cr} = 1.1$ кН для смолы Araldite AV138, $P_{cr} = 1.5$ кН для смолы Araldite 2015, $P_{cr} = 3.1$ кН для смолы Sikaforce 7752.

Следуя данным работы [16], приведем в табл. 1 механические характеристики ряда адгезивов согласно данным производителя.

В табл. 1 приняты следующие обозначения: G_{IC} – критический поток энергии; σ_0 – предел текучести; σ_f – предел прочности.

Таблица 1. Механические свойства адгезивов

Механические свойства	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
E_3 (ГПа)	4.9	1.85	0.49
σ_0 (МПа)	36.49	12.63	3.24
σ_f (МПа)	39.45	21.63	11.48
G_{JC} (Н/м)	200	430	2360

Таблица 2. Расчетные значения потока энергии в вершину трещины

Расчетные характеристики	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
2γ (Н/м)	205	382	1631
G_{JC}^b (Н/м)	209	388	1658

В этом случае $Q_2 = Q_{cr} = P_{cr}/b$ где Q_{cr} – критическое значение внешней нагрузки. Поместим в табл. 2 результаты расчета по формулам (2.7) и (2.8).

Из данных табл. 1, табл. 2 видно, что чем более выраженные пластические свойства имеет адгезив, тем большее занижение критического потока энергии дает результат расчета по упругой модели. При этом для адгезива Sikaforce 7752 результат может отличаться значительно.

Отметим, что полученный результат предполагает, согласно (2.5), сингулярное распределение поля напряжений при $\delta_0 \rightarrow 0$. Рассмотрим построение J -интеграла при аппроксимации поля перемещений в консоли (1.9), с учетом конечности напряженного состояния и учета реальных механических свойств адгезива.

3. Решение задачи с учетом конечности напряженного состояния адгезива. Для материала слоя 3 определяющие соотношения при обратимом деформировании, когда $\bar{\sigma}_{22} \leq \sigma_0$, принимаем в виде (2.5). Стадия упругого деформирования продолжается до момента достижения в точке $x_1 = 0$ слоя взаимодействия предела текучести $\bar{\sigma}_{22} = \sigma_0$. Из формулы (2.5) находим значение внешней нагрузки в этот момент

$$Q_{2p} = \sqrt{\frac{E}{E_3}} \sigma_0 \sqrt{\delta_0 h} / 2\sqrt{2} \left(\sqrt{3} \frac{a}{h} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Из данной формулы следует, что стадия чисто обратимого деформирования при отсутствии диссипации возможна при конечном значении толщины адгезива. В случае вырождения в математический разрез стадия упругого деформирования, как и в модели Дагдейла [17], отсутствует.

Увеличение внешней нагрузки $Q_2 > Q_{2p}$ приводит к образованию зоны ослабленных связей длиной Δ . Данный участок ассоциируем с проявлением пластических свойств адгезива. При достижении внешней нагрузкой критического значения ($Q_2 = Q_{cr}$) длина зоны ослабленных связей достигает величины $\Delta = \Delta_{cr}$.

Распределение напряжений для участка ослабленных связей принимаем в виде:

$$\bar{\sigma}_{22} = \sigma_0 + k \frac{\Delta - x_1}{\Delta_{cr}}, \quad \bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{12} = 0, \quad k = \sigma_f - \sigma_0 \quad (3.1)$$

Условия равновесия (1.15) для участка консоли $x_1 \in (0; \Delta)$ запишем с учетом (3.1) в виде:

$$\frac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0, \quad \frac{dQ_{11}}{dx_1} = 0, \quad \frac{dQ_{12}}{dx_1} = \sigma_0 + k \frac{\Delta - x_1}{\Delta_{cr}} \quad (3.2)$$

Осуществим перенос граничных условий (2.2) в точку $x_1 = \Delta$ с учетом (3.2):

$$Q_{12}|_{x_1=\Delta} = \left(\sigma_0 + \frac{k\Delta}{2\Delta_{cr}} \right) \Delta - Q_2, \quad Q_{11}|_{x_1=0} = 0, \quad M_{11}|_{x_1=\Delta} = \frac{\Delta^2}{2} \left(\sigma_0 + \frac{2}{3} k \frac{\Delta}{\Delta_{cr}} \right) - Q_2 (a + \Delta) \quad (3.3)$$

Запишем решение (1.12) на участке $x_1 \in (\Delta; l \rightarrow \infty)$ для случая $\delta_0/h \ll 1$ в виде:

$$u_1^+ = \frac{h}{2} \varphi, \quad u_2^+ = A_1 e^{\lambda_2 x_1} + B_1 e^{\lambda_4 x_1}, \quad \varphi = A_1 \left(\lambda_2 - \frac{K1}{\lambda_2} \right) e^{\lambda_2 x_1} + B_1 \left(\lambda_4 - \frac{K1}{\lambda_4} \right) e^{\lambda_4 x_1} \quad (3.4)$$

$$A_1 = \frac{e^{-\lambda_2 \Delta}}{(\lambda_2 - \lambda_4)} \left(\frac{12a}{Eh^3 \lambda_4} \left(Q_2 (a + \Delta) - \frac{\Delta^2}{2} \left(\sigma_0 + \frac{2}{3} k \frac{\Delta}{\Delta_{cr}} \right) \right) + \lambda_2^2 \left(\left(\sigma_0 + \frac{k\Delta}{2\Delta_{cr}} \right) \Delta - Q_2 \right) \frac{\delta_0}{2E_3} \right)$$

$$B_1 = -\frac{e^{-\lambda_4 \Delta}}{(\lambda_2 - \lambda_4)} \left(\frac{12a}{Eh^3 \lambda_2} \left(Q_2 (a + \Delta) - \frac{\Delta^2}{2} \left(\sigma_0 + \frac{2}{3} k \frac{\Delta}{\Delta_{cr}} \right) \right) + \lambda_4^2 \left(\left(\sigma_0 + \frac{k\Delta}{2\Delta_{cr}} \right) \Delta - Q_2 \right) \frac{\delta_0}{2E_3} \right)$$

Из (3.4) запишем выражение вертикального перемещения в точке $x_1 = \Delta$:

$$u_2^+(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{EE_3}} \sqrt{\frac{\delta_0}{h}} \left(\frac{\sqrt{6}}{h} \left(Q_2 (a + \Delta) - \frac{\Delta^2}{2} \left(\sigma_0 + \frac{2}{3} k \frac{\Delta}{\Delta_{cr}} \right) \right) - \left(\left(\sigma_0 + \frac{k\Delta}{2\Delta_{cr}} \right) \Delta - Q_2 \right) \right) \quad (3.5)$$

и с учетом (1.3), (2.1) напряжения в слое:

$$\bar{\sigma}_{22}(\Delta) = \frac{2}{\sqrt{\delta_0 h}} \sqrt{\frac{E_3}{E}} \left(\frac{\sqrt{6}}{h} \left(Q_2 (a + \Delta) - \frac{\Delta^2}{2} \left(\sigma_0 + \frac{2}{3} k \frac{\Delta}{\Delta_{cr}} \right) \right) - \left(\left(\sigma_0 + \frac{k\Delta}{2\Delta_{cr}} \right) \Delta - Q_2 \right) \right) \quad (3.6)$$

Основной неизвестной предлагаемой модели поведения адгезива является значение Δ_{cr} .

Из (3.6) получим выражение критической длины зоны ослабленных связей при условиях: $Q_2 = Q_{cr}$, $\Delta = \Delta_{cr}$, $\bar{\sigma}_{22}(\Delta) = \sigma_0$ и известном значении k :

$$\Delta_{cr} = C \left(\sqrt{\left(1 + \frac{k}{2\sigma_0} \right)^2 + 6 \left(\frac{Q_{cr}}{\sigma_0 h} \right)^2} + \frac{2\sqrt{6}Q_{cr}}{\sigma_0 h} \left(\frac{a}{C} + \frac{k}{6\sigma_0} \right) - \sqrt{\frac{\sqrt{6}\delta_0 E}{hE_3 C}} - 1 - \frac{k}{2\sigma_0} + \frac{\sqrt{6}Q_{cr}}{\sigma_0 h} \right) \quad (3.7)$$

$$\text{где } C = \frac{h}{\sqrt{6} \left(1 + \frac{2k}{3\sigma_0} \right)}.$$

При $\delta_0 = 0$ выражение (3.7) может рассматриваться в качестве длины когезионной трещины [4] с конечностью напряженного состояния в точке сопряжения сил сцепления и поврежденной среды.

Запишем решение (3.2) в области ослабленных связей $0 \leq x_1 < \Delta$. С учетом (1.16) и граничных условий (3.3) получим

$$u_1^+ = \frac{h}{2} \varphi + c_1, \quad \varphi = -\frac{2x_1^3 m}{Eh^3} + \frac{kx_1^4}{2Eh^3 \Delta_{cr}} + \frac{6Q_2}{Eh^3} x_1^2 + \frac{12Q_2 a}{Eh^3} x_1 + c_2, \quad m = \sigma_0 + k \frac{\Delta}{\Delta_{cr}} \quad (3.8)$$

$$u_2^+ = \frac{kx_1^5}{10Eh^3 \Delta_{cr}} - \frac{x_1^4 m}{2Eh^3} + \left(\frac{2Q_2}{Eh^3} - \frac{k}{3\Delta_{cr} Eh} \right) x_1^3 + \left(\frac{m}{Eh} + \frac{6Q_2 a}{Eh^3} \right) x_1^2 + \left(c_2 - \frac{2Q_2}{Eh} \right) x_1 + c_3$$

Таблица 3. Значение J_C -интеграла

Расчетные характеристики	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
J_C (Н/м)	104	354	2772

где c_1, c_2, c_3 – постоянные интегрирования.

Постоянные интегрирования найдем из условий непрерывности функций u_1^+, u_2^+, φ в точке $x_1 = \Delta$ с учетом решения (3.4):

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \varphi(\Delta) + \frac{2\Delta^3 m}{Eh^3} - \frac{k\Delta^4}{2Eh^3\Delta_{cr}} - \frac{6Q_2\Delta^2}{Eh^3} - \frac{12Q_2\Delta}{Eh^3}$$

$$c_3 = u_2^+(\Delta) + \frac{2k\Delta^5}{5Eh^3\Delta_{cr}} +$$

$$+ \frac{3\Delta^4 m}{2Eh^3} + \left(\frac{4Q_2}{Eh^3} + \frac{k}{3\Delta_{cr}Eh} \right) \Delta^3 - \left(\frac{m}{Eh} - \frac{6Q_2a}{Eh^3} \right) \Delta^2 - \left(\varphi(\Delta) - \frac{2Q_2}{Eh} \right) \Delta$$

В критическом состоянии выражение (2.6) принимает вид:

$$J_C = (\sigma_0 + \sigma_f) u_2^f - \frac{\sigma_f \sigma_0}{2E_3} \bar{\delta}_0 \quad (3.9)$$

где u_2^f – предельное значение перемещения в точке $x_1 = 0$; $u_2^f = c_3(\Delta_{cr})$.

Нахождение (3.9) показывает, что имеет место вычислительная сходимость результата при $\bar{\delta} = \delta_0/h \rightarrow 0$. Так для $\bar{\delta} \leq 10^{-5}$ значение (3.9) практически не меняется. Приведем в табл. 3 расчетные данные J_C – интеграла для $\bar{\delta} = 10^{-10}$ и характеристик адгезивов из табл. 1.

Сравнивая результаты расчетов J_C – интеграла по упругой модели (см. табл. 2) и модели, учитывающей конечность напряженного состояния (см. табл. 3), с критическим потоком упругой энергии из табл. 3 видим, что модель с зоной ослабленных связей лучше согласуется с экспериментальными данными для адгезивов с выраженными пластическими свойствами.

Заключение. При заданном законе распределения поля перемещений в консолях ДКБ-образца для упругого поведения материала слоя получено аналитическое выражение J -интеграла. Данное решение не зависит от модуля упругости адгезива и практически совпадает с известным решением в рамках теории пластин для адгезионного слоя нулевой толщины.

Для материала адгезива, учитывающего конечность напряженного состояния, найдена аналитическая зависимость J_C -интеграла от предела текучести и предела прочности материала адгезива. Показано, что при малой, но конечной относительной толщине слоя, имеет место сходимость J_C -интеграла. Для заданной длины трещины и критической внешней нагрузке адгезива Sikaforce 7752 с выраженными пластическими свойствами значение J_C -интеграла существенно (в 1.7 раза) отличается от значения, найденного при упругом поведении материала слоя.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и правительства Тульской области в рамках научного проекта № 19-41-710001 p_a.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. Самара: Изд-во Самарского ун-та, 2001. 632 с.
2. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
3. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 502 с.
4. Varenblatt G.I. The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture // Adv. Appl. Mech. 1962. V. 7. P. 55–129.
[https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70121-2](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70121-2)
5. Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A. Relationship between J_c and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite // Int. J. Fract. 2020. V. 224. № 2. P. 277–284.
<https://doi.org/10.1007/s10704-020-00464-0>
6. Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // Int. J. Solids Struct. 2019. V. 158. P. 141–149.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002>
7. Turusov R.A., Andreev V.I., Tsybin N.Y. The contact layer stiffness influence assessment on the stress-strain state of a multilayer beam // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Engineering. 2020. V. 913 (3). P. 032053.
<https://doi.org/10.1088/1757-899X/913/3/032053>
8. Prandtl L., Knauss W.G. A thought model for the fracture of brittle solids // Int. J. Fract. 2011. V. 171. № 2. P. 105–109.
<https://doi.org/10.1007/s10704-011-9637-3>
9. Ентов В.М., Салганик Р.Л. К модели хрупкого разрушения Прандтля // Изв. АН СССР. МТТ. 1968. № 6. С. 87–99.
10. Салганик Р.Л., Мищенко А.А., Федотов А.А. Модель трещины Прандтля и ее применение для решения задачи механики контактного взаимодействия. Ижевск: Инст. комп. иссл., 2012. 180 с.
11. Timoshenko S, Woinowsky-Krieger S. Theory of plate and shells. New York, Toronto, London: McGraw-Hill, 1959. = Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 636 с.
12. Mattei O., Bardella L. A structural model for plane sandwich beams including transverse core deformability and arbitrary boundary conditions // Eur. J. Mech. A-Solid. 2016. V. 58. P. 172–186.
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2016.01.015>
13. Panettieri E., Fanteria D., Danzi F. Delaminations growth in compression after impact test simulations: Influence of cohesive elements parameters on numerical results // Compos. Struct. 2016. V. 137. P. 140–147.
<https://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUCT.2015.11.018>
14. Berto F., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. About the influence of the elastoplastic properties of the adhesive on the value of the J-integral in the DCB sample // Int. J. Fract. 2021. V. 232. P. 43–54.
<https://doi.org/10.1007/s10704-021-00590-3>
15. Bruno D, Greco F. Mixed-mode delamination in plates: a refined approach // Int. J. Solids. Struct. 2001. V. 38. № 50–51. P. 9149–9177.
[https://doi.org/10.1016/s0020-7683\(01\)00179-2](https://doi.org/10.1016/s0020-7683(01)00179-2)
16. Lopes R.M., Campilho R.D.S.G., da Silva F.J.G., Faneco T.M.S. Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints // Int. J. Adhes. Adhes. 2016. V. 67. P. 103–111.
<https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2015.12.032>
17. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids. 1960. V. 8. № 2. P. 100–104.
[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(60\)90013-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(60)90013-2)