ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2022, № 2, с. 99–105

УДК 539.374, 539.214

О КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ УПРУГО ПОДКРЕПЛЕННОЙ ПОЛОСЫ ПРИ СЖАТИИ

© 2022 г. Н. В. Минаева[a],*, А. И. Шашкин[a],, Е. Е. Александрова[a]**

[a] *Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*

**e-mail: nminaeva@yandex.ru*

***e-mail: dean@amm.vsu.ru*

Поступила в редакцию 12.04.2021 г.
После доработки 11.07.2021 г.
Принята к публикации 06.09.2021 г.

На основе сформулированного определения и соответствующей теоремы получены условия существования квазистатического поведения изучаемого объекта механики сплошных сред. Процесс квазистатического деформирования характеризуется решением системы дифференциальных уравнений. Определена граница квазистатического поведения упруго подкрепленной полосы при сжатии.

Ключевые слова: квазистатический процесс, асимптотическая устойчивость, упругость, упругоподкрепленная полоса, однопараметрическое основание

DOI: 10.31857/S057232992201007X

При решении динамических задач следует учитывать различные физические и геометрические нелинейности. Учет диссипации энергии значительно усложняет нахождение корректного решения. Во многих практических задачах возможно рассмотрение деформирования в квазистатической постановке [1–3]. При рассмотрении квазистатических процессов пренебрегают скоростью изменения параметра внешнего воздействия, а так же, как следствие, изменением со временем характеристик, описывающих поведение объекта. Это означает, что скорость изменения характеристик объекта непрерывно зависит от скорости изменения параметра воздействия. В [4] проведено исследование корректности использования жесткопластической модели в задачах квазистатического и динамического изгиба круглых пластин при малых и больших прогибах.

Известны работы по сформулированной проблеме, проведенные на основе различных критериев устойчивости [5–7]. В [6] анализируются классические задачи продольного изгиба стержня, выполненного из упругопластического материала. Получено достаточное условие применимости предложенного подхода. Приводится доказательство корректности квазистатической постановки. В [7] анализируется адекватность концепций касательного и приведенного модулей в теории квазистатического продольного изгиба упругопластических стержней (в геометрически линейной постановке).

В [8, 9] рассматривается проблема устойчивости квазистатического поведения различных механических систем на основе анализа непрерывной зависимости от начальных возмущений и от скорости квазистатического нагружения. В исследуемых сингулярных уравнениях малый параметр характеризует скорость приложения внешних сил. На механических примерах показаны сходство, различия и взаимосвязь между понятием динамическая устойчивость квазистатических траекторий и устойчивостью по Ляпунову. Получены достаточные условия для устойчивости квазистатических траекторий упругопластических систем с упрочнением. В подобных работах, как правило, на определенном этапе исследований задавалась траектория нагружения и параметры нагрузок переставали быть независимыми.

Пусть поведение изучаемого объекта характеризуется решением системы дифференциальных уравнений с начальными условиями:

$$\dot{w} = F\left(w, p(t)\right) \tag{1}$$

$$w(0) = w_0 \tag{2}$$

где $p(t)$ – внешнее воздействие.

Будем искать решение (1), (2) в виде

$$w = \upsilon + \eta^{(j)} \quad (1 \le j \le s) \tag{3}$$

Здесь динамическая составляющая υ найдена из задачи, полученной подстановкой (3) в (1), (2), т.е.

$$\dot{\upsilon} = F(\upsilon + \eta^{(j)}, p) - \frac{\partial \eta^{(j)}}{\partial p}\dot{p} \tag{4}$$

$$\upsilon(0) = w_0 - \eta^{(j)}\left(p(0)\right)$$

Статическая составляющая $\eta^{(j)}$ – одно из s решений системы

$$F\left(u, p(t)\right) = 0 \tag{5}$$

Сделаем некоторые ограничения на выбор пространств состояний. Будем рассматривать такие пары пространств, в которых производная Фреше отображения является изоморфизмом [10, 11]. Как правило, при исследовании напряженно-деформированного состояния различных упругопластических тел именно такие пространства с соответствующими нормами и используются, например, гильбертово пространство, $C^2([a,b], \mathbf{R}^m)$, $C^4([a,b],\mathbf{R}^m)$, пространства Гельдера и др. В этом случае будет справедливо утверждение теоремы.

Теорема 1. Пусть для дифференциального уравнения (4) выполняется:

1. $p_0 \le p(t) \le p_1$

2. $\left\|\dfrac{\partial \eta^{(j)}}{\partial p}\right\| \le \mathrm{M}$, где M – некоторая положительная константа

3. Для каждого $c \in [p_0, p_1]$ имеет место асимптотическая устойчивость тривиального решения уравнения

$$\dot{\upsilon} = F(\upsilon, \eta^{(j)}, c) \tag{6}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что для $\|\dot{p}(t)\| \le \delta_1\ (t \ge 0)$ и $\|\upsilon(0)\| \le \delta_2$ будет выполняться $\|\upsilon(t)\| \le \varepsilon$ при всех $t \ge 0$.

Рассмотрим следующее определение.

Определение. Будем считать, что при $p \in D$ квазистатический процесс, описываемый решением системы (1), существует, если для любых $\varepsilon > 0$, $p_0 \in D$ и $p_1 \in D$, а также для каждого w_0 найдутся такие $r(t)$, величина t_0 и соответствующее решение системы (5), что при выполнении условий:

$$r(t) \equiv p_0 \quad \text{при} \quad 0 \le t \le t_0$$

$$p(t) \equiv r(t) \quad \text{при} \quad t \geq t_0 \tag{7}$$

$$\lim_{t \to \infty} r(t) = p_1$$

будет иметь место

$$\|\upsilon(t) <\| \leq \varepsilon \quad \text{при} \quad t \geq t_0 \tag{8}$$

В приведенном определении “соответствующим решением” называется то решение (5), области притяжения которого принадлежит точка (p_0 , w_0).

Сформулируем следующую теорему:

Теорема 2. Пусть $p_0 \in D$, $p_1 \in D$ и области D не принадлежат особые точки (5), т.е. $\left\|\frac{\partial \eta^j}{\partial p}\right\| \leq \mathrm{M}$ при всех $1 \leq j \leq s$. Для каждого $c \in [p_0, p_1]$ имеет место асимптотическая устойчивость тривиального решения уравнения (6) при соответствующем решении $\eta^{(j)}$. Тогда существует квазистатический процесс, соответствующий решению задачи (1), (2), в смысле приведенного выше определения.

Для доказательства теоремы построим ступенчатую функцию $r(t)$. Выберем некоторые величины p_0 и w_0 такие, что точка $\upsilon(0) = w_0 - u(p_0)$ принадлежит области притяжения решения $u = \eta^{(j)}$. Из асимптотической устойчивости тривиального решения уравнения (6) для указанного $\eta^{(j)}$ следует, что для заданного $\varepsilon > 0$ при каждом постоянном $p \in D$ найдется некоторая положительно определенная функция $\delta = \delta(p)$.

Обозначим

$$\min_{p \in D} \delta(p) = \delta_0$$

Предположим, что начальное условие w_0 таково, что

$$\delta_0 < \|\upsilon(0)\| = \|w(0) - u(p_0)\|$$

Зафиксируем в момент времени $t = 0$ внешнее воздействие, т.е. пусть $p \equiv p_0$. Поскольку тривиальное решение задачи (6) асимптотически устойчиво, то найдется такой момент времени $t = t_0$, когда будет выполняться условие

$$\|\upsilon(t)\| \leq \delta_0 - \delta_1 \quad (0 \leq \delta_1 \leq \delta_0) \quad \text{при} \quad t \geq t_0$$

Рассмотрим для случая $p_1 > p_0$ некоторую возрастающую при $t \geq t_0$ функцию $r_1(t)$. Пусть при $p = r_1(t)$ процесс будет описываться решением системы уравнений (4). Предположим, что при $t = t_1$ это решение удовлетворяет условию $\|\upsilon(t_1)\| = \delta_0$ ($\|\upsilon\| < \delta_0$ при $t \geq t_0$). Зафиксируем в момент времени $t = t_1$ функцию $p(t)$. Тогда при $t \geq t_1$ процесс будет описываться снова решением уравнения (6) при $p(t) = r_1(t_1)$. Из асимптотической устойчивости тривиального решения системы уравнений (6) при $p(t) = r_1(t_1)$ следует $\|\upsilon(t)\| < \varepsilon$ при $t \geq t_1$ и найдется величина t_2 такая, что будет выполняться неравенство

$$\|\upsilon(t)\| < \delta_0 - \delta_1 \quad \text{при} \quad t \geq t_2 \tag{9}$$

При $p = r_2(t)$, где $r_2(t)$ – некоторая возрастающая функция при $t \geq t_2$, процесс снова будет описываться решением системы уравнений (4). Предположим, что при $t = t_3$ это решение удовлетворяет условию $\|\upsilon(t)\| < \delta_0$. Зафиксируем в момент времени $t = t_3$ функцию $p(t) \equiv r_2(t_3)$ и т.д.

Из приведенного построения функции $r(t)$ следует, что для заданного $\varepsilon > 0$ выполняется условие $\|\upsilon(t)\| < \varepsilon$ при $t \geq t_0$ и $p = r(t)$, что и требовалось доказать (поскольку $t_2 - t_1 > 0$, $t_3 - t_2 > 0$ и т.д., то $\lim_{t\to\infty} r(t) = p_1$).

Таким образом, получаем, что если параметр внешнего воздействия p принадлежит интервалу $[p_0, p_1]$ и тривиальное решение системы (6) будет асимптотически устойчиво, то условие существования квазистатического процесса равносильно изучению попадания в $[p_0, p_1]$ особых точек уравнения (5).

В соответствии с условиями теоремы о неявной функции [12, 13], с учетом указанных выше ограничений на пространства состояний существование и ограниченность величин $\left\|\frac{\partial\eta^j}{\partial p}\right\|$, определенных соотношением (5), выполняется при

$$|F'(\eta^{(j)}, p)| \neq 0 \tag{10}$$

В случае потенциального внешнего воздействия для каждой пары p_0 и w_0 мы сможем найти соответствующее решение статики $\eta^{(j)}$. При этом при переходе p через особую точку условие (10) нарушается. Тривиальное решение уравнения (6) становится неустойчивым. Таким образом, при потенциальных внешних силах требование (10) будет достаточным для существования квазистатического состояния (в смысле приведенного выше определения), соответствующего w из (1), (2), при $p \in D$ и любых $1 \leq j \leq s$.

Если параметр внешнего воздействия p будет n-мерным вектором, то последнее слагаемое $\frac{\partial\eta^j}{\partial p}\dot{p}$ из (4) примет вид $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\eta^j}{\partial p_i}\dot{p}_i$. Функция $r(t)$ в условиях (7) и (8) описывает изменение параметра внешних воздействий вдоль траектории нагружения зависимости от времени.

Если w из (1), (2) является еще и функцией пространственных переменных (система с распределенными параметрами), то необходимо будет проверять соответствующие условия теоремы о неявных функциях [12, 13] для уравнений статики.

Пусть приложенные внешние силы потенциальны, и для найденного $u = \eta^j(p)$ выполняется (10) для любого $p \in D$. Очевидно, что в этом случае, если при каком-то $p_1 \in D$ тривиальное решение (6) асимптотически устойчиво, то оно будет также асимптотически устойчиво при любом фиксированном $p \in D$. Таким образом, если траектория нагружения не выходит за пределы области D, условие (10) будет достаточным для существования квазистатического состояния, соответствующего $u = \eta^{(j)}(p)$ из (5). Причем точка (p_0, w_0) будет принадлежать области притяжения тривиального решения, соответствующего (6). В частности p_1 может равняться нулю, и тогда тривиальное решение уравнения (6) является асимптотически устойчивым. Следовательно, если внешние силы отсутствуют, находить область осуществления квазистатического поведения, соответствующего $u = \eta^{(j)}(p)$, также можно на основе статической модели.

Рассмотрим квазистатическое деформирование упругоподкрепленной полосы, выполненной из упругого несжимаемого материала. Форма ее поперечного сечения близка к прямоугольной. Полоса сжата давлением p, приложенным по боковым кромкам $x = \pm\ell$.

Напряженно-деформированное состояние полосы описывается решением задачи [14]:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\left(\sigma_x-\omega\tau\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\tau-\omega\sigma_y\right)}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial\left(\tau+\omega\sigma_x\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\sigma_y+\omega\tau\right)}{\partial y}=0 \\
\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \quad \omega=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
\sigma_x-\sigma_y=4G\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau=G\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)
\end{gathered} \tag{11}
$$

$$
\tau_n\big|_{y=g_i}=0, \quad P_y\big|_{y=g_i}=-k\left[g_i(x)-y_i(x)\right], \quad (i=1,2) \tag{12}
$$

$$
\sigma_x\big|_{x=\pm\ell}=-p, \quad v\big|_{x=\pm\ell}=\varepsilon_y^0 y \tag{13}
$$

$$
\varepsilon_y^0=\frac{p}{4G-kh}
$$

Здесь k — коэффициент жесткости основания, функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ характеризуют деформированные верхнюю и, соответственно, нижнюю кромки сечения. В недеформированном стоянии они описываются функциями $y_1(x)=-h+\varphi_1(x), y_2(x)=h+\varphi_2(x)$.

Если пренебречь отличием формы сечения от прямоугольника ($\varphi_i(x)=0\,(i=1,2)$), то исходная задача (11)—(13) допускает решение

$$
\begin{gathered}
\sigma_x=\sigma_x^0=-p, \quad \sigma_y=\sigma_y^0=-kh\varepsilon_y^0, \quad \tau=\tau^0=0 \\
v=v^0=\varepsilon_y^0 y, \quad u=u^0=-\varepsilon_y^0 x
\end{gathered} \tag{14}
$$

Из [15], учитывая (14), получаем

$$
\begin{gathered}
g_1(x)=g_1^0(x)\equiv(1+\varepsilon_y^0)h \\
g_2(x)=g_2^0(x)\equiv-(1+\varepsilon_y^0)h
\end{gathered}
$$

Поскольку внешнее воздействие в рассматриваемой задаче потенциально, то условия теоремы 2, а также (10) будут удовлетворены, если решение задачи (11)—(13) непрерывно зависит от исходных данных. Согласно [13, 16], для исследования этой зависимости составим однородную линеаризованную задачу относительно ζ_i:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\zeta_4}{\partial x}+\frac{\partial\zeta_6}{\partial y}+\frac{\sigma_y^0}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial y}-\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}\right)=0, \quad \frac{\partial\zeta_6}{\partial x}+\frac{\partial\zeta_5}{\partial y}-\frac{p}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}-\frac{\partial\zeta_1}{\partial y}\right)=0 \\
\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}+\frac{\partial\zeta_2}{\partial y}=0, \quad \zeta_4-\zeta_5=4G\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}, \quad \zeta_6=G\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial y}+\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}\right)
\end{gathered} \tag{15}
$$

$$
\left(\zeta_5+k\zeta_2\right)_{y=\pm g_i^0(x)}=0, \quad \left(\zeta_6-\sigma_x^0\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}\right)_{y=\pm g_i^0(x)}=0, \tag{16}
$$

$$
\zeta_4\big|_{x=\pm\ell}=\zeta_2\big|_{x=\pm\ell}=0 \tag{17}
$$

Квазистатическое поведение полосы, соответствующее решению (14), возможно, если эта задача допускает только тривиальное решение.

Следуя [14], положим, что

$$
\zeta_1=\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad \zeta_2=-\frac{\partial\Phi}{\partial x} \tag{18}
$$

Используя выражения (15), получаем уравнения для определения функции $\Phi(x,y)$

$$\left(1+\frac{\sigma_y^0}{2G}\right)\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}+\left(2+\frac{\sigma_y^0}{2G}-\frac{p}{2G}\right)\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+\left(1-\frac{p}{2G}\right)\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}=0 \tag{19}$$

Удовлетворяя граничным условиям (17) $\left(\lambda = n\dfrac{\pi}{\ell}\right)$, ищем $\Phi(x, y)$ в таком виде

$$\Phi(x,y)=\varphi(y)\sin\lambda x \tag{20}$$

В результате подстановки (20) в (19), получаем уравнение для $\varphi(y)$

$$\begin{gathered}(1+\gamma_1)\frac{d^4\varphi}{dy^4}-(2+\gamma_1-\gamma)\lambda^2\frac{d^2\varphi}{dy^2}+(1-\gamma)\lambda^4\varphi=0\\ \gamma=\frac{p}{2G},\quad \gamma_1=\frac{\sigma_y^0}{2G}\end{gathered} \tag{21}$$

Уравнение (21) легко интегрируется. После определения функции $\Phi(x, y)$ найдем ζ_1 и ζ_2, а из соотношений (15) и все остальные. Для дальнейшего необходимы следующие выражения

$$\begin{gathered}\zeta_2=\lambda(C_1\mathrm{sh}\lambda y+C_2\mathrm{ch}\lambda y+C_3\mathrm{sh}\lambda\gamma_2 y+C_4\mathrm{ch}\lambda\gamma_2 y)\cos\lambda x\\ \zeta_5=-G\lambda^2[2(C_1\mathrm{sh}\lambda y+C_2\mathrm{ch}\lambda y)+(\gamma_2^2+1)(C_3\mathrm{sh}\lambda\gamma_2 y+C_4\mathrm{ch}\lambda\gamma_2 y)]\sin\lambda x\\ \zeta_6=\left[-G\lambda^2\left(2C_1\mathrm{ch}\lambda y+2C_2\mathrm{sh}\lambda y+\frac{\gamma_2^2+1}{\gamma_2}C_3\mathrm{ch}\lambda\gamma_2 y+\frac{\gamma_2^2+1}{\gamma_2}C_4\mathrm{sh}\lambda\gamma_2 y\right)+\right.\\ \left.+\frac{p}{2}\frac{\lambda^2(\gamma_2^2-1)}{\gamma_2}(C_3\mathrm{ch}\lambda\gamma_2 y+C_4\mathrm{sh}\lambda\gamma_2 y)\right]\cos\lambda x\\ \gamma_2^2=\frac{1-\gamma}{1+\gamma_1}=\frac{2G-p}{2G+\sigma_y^0}\end{gathered} \tag{22}$$

Подставив (22) в граничные условия (16), получаем следующую линейную систему уравнений для нахождения произвольных постоянных C_i:

$$\sum_{j=1}^{4}\alpha_{ij}C_j=0\quad(i=1,\ldots,4) \tag{23}$$

где

$$\begin{gathered}\alpha_{11}=k_1\mathrm{sh}\beta-2\mathrm{ch}\beta,\quad \alpha_{12}=k_1\mathrm{ch}\beta-\mathrm{sh}\beta\\ \alpha_{13}=k_1\mathrm{sh}\gamma_2\beta-\frac{\gamma_2^2+1}{\gamma_2}(1-\gamma)\mathrm{ch}\gamma_2\beta,\quad \alpha_{14}=k_1\mathrm{ch}\gamma_2\beta-\frac{\gamma_2^2+1}{\gamma_2}(1-\gamma)\mathrm{sh}\gamma_2\beta\\ \alpha_{21}=-2(1+\gamma)\mathrm{sh}\beta,\quad \alpha_{22}=-2(1+\gamma)\mathrm{ch}\beta\\ \alpha_{23}=-(1+\gamma_2^2+2\gamma)\mathrm{sh}\gamma_2\beta,\quad \alpha_{24}=(1+\gamma_2^2+2\gamma)\mathrm{ch}\gamma_2\beta\\ \alpha_{31}=-k_1\mathrm{sh}\beta-2\mathrm{ch}\beta,\quad \alpha_{32}=k_1\mathrm{ch}\beta+2\mathrm{sh}\beta\\ \alpha_{33}=-k_1\mathrm{sh}\gamma_2\beta-\frac{\gamma_2^2+1}{\gamma_2}(1-\gamma)\mathrm{ch}\gamma_2\beta,\quad \alpha_{34}=k_1\mathrm{ch}\gamma_2\beta+\frac{\gamma_2^2+1}{\gamma_2}(1-\gamma)\mathrm{sh}\gamma_2\beta\\ \alpha_{41}=-\alpha_{21},\quad \alpha_{42}=\alpha_{22},\quad \alpha_{43}=-\alpha_{23},\quad \alpha_{44}=\alpha_{24},\quad k_1=\frac{k}{2G\lambda},\quad \beta=\lambda h\end{gathered}$$

Если определитель системы (23) равен нулю, она имеет нетривиальное решение:

$$\Delta = 2(\alpha_{22}\alpha_{14} - \alpha_{24}\alpha_{12})(\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{31}\alpha_{23}) + \\ + 2(\alpha_{22}\alpha_{34} - \alpha_{24}\alpha_{32})(\alpha_{11}\alpha_{23} - \alpha_{21}\alpha_{13}) = 0 \quad (24)$$

Итак, соотношение (24) на плоскости параметров k_1 и γ определяет границу области, в пределах которой возможно квазистатическое деформирование рассматриваемой полосы, соответствующее решению (14).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Серенсен С.В.* Квазистатическое и усталостное разрушение материалов и элементов конструкций. Избранные труды. Т. 3. Киев: Наук. думка, 1985. 232 с.
2. *Терегулов И.Г., Муртазин Р.З.* Квазистатический изгиб и устойчивость оболочек при ползучести (теория наследственности) // Исследование по теории пластин и оболочек / Ред. *К. З. Галимов*. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1964. С. 145–158.
3. *Russell B.P., Liu T., Fleck N.A., Deshpande V.S.* Quasi-static three-point bending of carbon fiber sandwich beams with square honeycomb cores // J. Appl. Mech. 2011. V. 78. № 3. P. 031008. https://doi.org/10.1115/1.4003221
4. *Imai Y., Nishitani K., Fortin G., Ohtani A., Hamada H.* Relationship between the initial fracture stress and fatigue limit-simple prediction method of tensile fatigue limit of composite // Open J. Compos. Mater. 2019. V. 9. № 4. P. 338–354. https://doi.org/10.4236/ojcm.2019.94021
5. *Mitenkov F.M., Kodochigov N.G., Lebedev S.V., Hodykin A.V.* Comparing the Quality of a controlling rotor with active magnetic bearings for linear and non-linear system structures // J. Machin. Manufact. Reliab. 2011. V. 40. № 6. P. 561–564. https://doi.org/10.3103/S1052618811060136
6. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: ГИФМЛ, 1961. 339 с.
7. *Пановко Я.Г.* Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 384 с.
8. *Ванько В.И.* Очерки об устойчивости элементов конструкций. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. 224 с.
9. *Ванько В.И., Перелыгина Е.С.* Продольный изгиб упругопластического стержня: обсуждение классических результатов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2012. № 4 (4). С. 9–15. https://doi.org/10.18698/2308-6033-2012-4-156
10. *Martins J.A.C., Rebrova N.V., Sobolev V.A.* On the (in)stability of quasi-static paths of smooth systems: Definitions and sufficient conditions // Math. Meth. Appl. Sci. 2006. V. 29. № 6. P. 741–750. https://doi.org/10.1002/mma.707
11. *Martins J.A.C., Marques M.D.P.M., Petrov A., etc.* (In)stability of quasi-static paths of some finite dimensional smooth or elastic-plastic systems // J. Phys.: Conf. Ser. 2005. V. 22. № 1. P. 124–138. https://doi.org/10.1088/1742-6596/22/1/008
12. *Зачепа В.Р., Сапронов Ю.И.* Локальный анализ фредгольмовых уравнений. Воронеж: Изд-во Воронежск. госунивер., 2002. 185 с.
13. *Darinsky B.M., Sapronov Y.I., Tsarev S.L.* Bifurcations of extremals of Fredholm functionals // J. Math. Sci. 2007. V. 145. № 6. P. 5311–5453. https://doi.org/10.1007/s10958-007-0356-2
14. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.
15. *Минаева Н.В.* Адекватность математических моделей деформируемых тел. М.: Научная книга, 2006. 236 с.
16. *Ершов Л.В., Ивлев Д.Д.* Об устойчивости полосы при сжатии // ДАН СССР. 1961. Т. 138. № 5. С. 1047–1049.
17. *Minaeva N.V.* Strain State of the Elastic Strip with Nearly Rectangular Cross Section // J. Phys.: Conf. Ser. 2018. V. 973. P. 012012. https://doi.org/10.1088/1742-6596/973/1/012012
18. *Минаева Н.В., Шашкин А.И.* Анализ и исследование проблемы существования квазистатического процесса // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: механика предельного состояния. 2014. № 4 (22). С. 124–128.