

УДК 539.3

ОБЗОР ВЯЗКОУПРУГИХ МОДЕЛЕЙ С ОПЕРАТОРАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА, ИСПОЛЪЗУЕМЫХ В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

© 2022 г. М. В. Шитикова^{a,b,*}

^a Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия

^b Московский государственный строительный университет, Москва, Россия

*e-mail: mvs@vgasu.vrn.ru

Поступила в редакцию 31.08.2020 г.

После доработки 09.03.2021 г.

Принята к публикации 11.03.2021 г.

Данная работа посвящена анализу научных исследований, выполненных за последние 10 лет и касающихся приложений дробного исчисления (исчисления дробного порядка) в моделях линейной вязкоупругости, используемых в динамических задачах механики деформируемого твердого тела. Дан краткий исторический обзор, отражающий вклад советских механиков в развитие наследственной механики. Проанализированы различные модели вязкоупругих материалов, построенные с помощью дробных производных, как без учета, так и с учетом объемной релаксации. Показано, что модели, в которых оператор Пуассона зависит от времени, позволяют описать свойства вязкоупругих ауксетиков, то есть материалов с отрицательными коэффициентами Пуассона. В следующей статье будет приведен обзор краевых динамических задач с использованием реологических моделей, рассмотренных в данной работе, и дана критическая оценка полученным за последнее десятилетие результатам в свете новых представлений о роли и месте дробного исчисления в инженерной практике.

Ключевые слова: дробное исчисление, вязкоупругость, реологические модели с дробными операторами, дробно-экспоненциальная функция Ю.Н. Работнова, алгебра безразмерных операторов Ю.Н. Работнова, отрицательный коэффициент Пуассона

DOI: 10.31857/S0572329921060118

1. Введение. Понятия дифференцирования и интегрирования нецелого порядка часто связывают с именами Ж. Лиувилля и Б. Римана. Но на самом деле, начиная с 1695 года, производными и интегралами дробного порядка интересовались многие выдающиеся математики: Я. Бернулли, Г. Лейбниц, Л. Эйлер, Н. Абель, Ж. Фурье, А. Грюнвальд, А.В. Летников, Н.Я. Сонин, П.А. Некрасов, М.М. Джрбашян и другие. Исторические обзоры развития дробного исчисления можно найти в работах [1–7].

В 1987 году вышла в свет монография С.Г. Самко, А.А. Килбаса и О.И. Маричева “Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения” (она была переведена на английский язык в 1993 году) [1], которая по праву считается непревзойденной энциклопедией дробного исчисления, поскольку содержит все необходимые сведения (определения, свойства, доказательства) о фактически всех известных формах дробного интегродифференцирования и их сравнительный анализ. Во многих случаях показано не только совпадение различных форм друг с другом на тех или иных классах функций, но и совпадение их областей определения.

После 1987 года вплоть до настоящего времени опубликовано огромное количество монографий авторами из разных стран (например, [7–21]), где рассматриваются различные аспекты дробного исчисления и его приложений, библиографические списки которых можно найти в [7, 16, 21–23].

Историю использования дробного исчисления в механике следует вести с Н. Абеля [24], который в своих работах 1823 и 1826 годов в связи с задачей о таутохроне (постановка и решение этой задачи приведены в “Энциклопедии по механике сплошных сред” [25], а так же в историческом обзоре [5]) приходит к конструкциям дробной производной и дробного интеграла. Как отмечено в [1], “хотя работы Н. Абеля и не были выполнены в русле идей обобщения понятия дифференцирования, они сыграли огромную роль в их развитии”.

Впервые дробные производные находят приложение в механике сплошных сред в работах А. Геманта (1936 [26]), Ж.В. Скотт-Блэра (1944 [27]) и А.Н. Герасимова (1948 [28]), в которых вводится модель с дробной производной для описания поведения вязкой жидкости, которая в некоторой степени также обладает и упругими свойствами. Идея описания поведения твердых тел при помощи вязкоупругих моделей, которые содержат операторы дробного порядка и связывают напряжения с деформациями, принадлежит Ю.Н. Работнову [29]. В своей классической работе 1948 года (которая в 2014 году была переведена на английский язык и опубликована в журнале *Fractional Calculus and Applied Analysis* [29] в честь празднования столетнего юбилея со дня рождения академика Ю.Н. Работнова) он не только предлагает вязкоупругую модель с оператором дробного порядка для описания процессов ползучести и релаксации в твердых телах, но и показывает эквивалентность этой модели интегральному соотношению между деформацией и напряжением с ядром в виде некоторой функции, которую он обозначает через $\varepsilon_\gamma(t)$, а интегральный оператор с ε_γ -функцией – через ε_γ^* , где t – время, γ ($0 \leq \gamma < 1$) – так называемый параметр дробности. Функцию $\varepsilon_\gamma(t)$ Ю.Н. Работнов называет дробной экспонентой, поскольку при $\gamma = 1$ она переходит в обычную экспоненту. Он пишет: “Как уже отмечалось, интегральные соотношения с экспоненциальными ядрами нулевого порядка эквивалентны дифференциальным соотношениям.

Аналогично интегральное соотношение с ε_γ^* -операторами произвольного порядка соответствует дифференциальному уравнению с дробными производными, которое решается при помощи ε_γ -функций”. При этом Ю.Н. Работнов замечает, что “Вряд ли целесообразно развивать эту точку зрения, поскольку дробные производные деформаций или напряжений лишены наглядного механического смысла, а вычисления удобнее вести непосредственно с интегральными операторами. Наоборот, во многих случаях целесообразно переходить от дифференциальных соотношений к интегральным”.

Функции Ю.Н. Работнова обращаются в бесконечность при $t = 0$, однако интеграл от них остается конечным, т.е. ε_γ -функции имеют интегрируемую (слабую) особенность, и следовательно, деформация в момент приложения нагрузки остается конечной. Что же касается скорости деформации, то в момент приложения нагрузки она становится бесконечно большой, что как раз и наблюдается в экспериментах на ползучесть [9]. Этот факт оправдывает использование слабосингулярных ядер $\varepsilon_\gamma(t)$ или дробных производных в реологических моделях вязкоупругих тел.

Приведенная выше статья Ю.Н. Работнова была незаслуженно забыта и пролежала невостребованной около 20 лет. Только в 1966 году появляется работа Т.Д. Шермергора [30] и в 1967 году С.И. Мешкова [31], в которых авторы, основываясь на идеях Ю.Н. Работнова и будучи его докторантами в те годы, обобщают простейшие вязкоупругие модели Фойгта, Максвелла и стандартного линейного тела, заменяя в этих моделях обычные производные по времени дробными. В 60-е годы Т.Д. Шермергор и С.И. Мешков работали в Воронежских вузах и по праву считаются основоположниками Воронежской

школы механиков, развивающей приложение дробного исчисления в механике деформируемого твердого тела и в строительной механике [32].

В 1959 году была опубликована статья Ш. Ватанабэ [33], в которой автор сначала использовал модель Скотт-Блэра для описания вязкоупругих свойств полиизобутилена, а затем записал модель Фойгта с дробной производной и применил ее для анализа свойств нейлона-6.

Параллельно и независимо от Т.Д. Шермергора [30] в Италии, на родине основоположника наследственной механики В. Вольтерра, модель Фойгта с дробной производной была приведена в работах М. Капуто (1966 [34]; 1967 [35]). Чуть позже, через четыре года, модели Максвелла и стандартного линейного тела с дробными производными появились в статьях М. Капуто и Ф. Маинарди (1971 [36, 37]).

Таким образом, анализ литературы показал, что, судя по всему, впервые модель Кельвина–Фойгта с дробной производной появилась в статье Ш. Ватанабэ [33], о которой, к сожалению, мало кто знает, и которая практически не цитировалась, вероятно, в виду того, что была напечатана в журнале японского общества текстильной промышленности (Journal of the Textile Machinery Society of Japan).

С тех пор интерес к вязкоупругим моделям с дробными производными и их приложениям в механике сплошных сред не ослабевает. Первые приложения моделей с дробными производными и другими операторами дробного порядка [8–10, 32, 38–40] к решению динамических задач механики деформируемого твердого тела принадлежат отечественным ученым [41–51]. Так, первая статья по гармоническим волнам, распространяющимся в вязкоупругих средах, свойства которых описываются уравнениями с дробными производными, появилась в 1968 году [41]. Анализ динамического поведения одномассовых систем с учетом сил сопротивления окружающей среды, демпфирующие свойства которой описываются различными моделями, содержащими операторы дробного порядка, приведен в работах [42–47].

Однако, с большим сожалением следует отметить, что приоритет российских механиков в развитии теории наследственной механики на основе операторов дробного порядка не всегда находит должного признания, причем не только в работах зарубежных авторов, несмотря на то, что большинство работ Ю.Н. Работнова, Т.Д. Шермергора, С.И. Мешкова, Ю.А. Россихина, изданных в 60–70-е годы прошлого столетия, были переведены на английский язык и доступны в электронном виде, поскольку снабжены DOI. Так, одна часть зарубежных исследователей (см., например, [52–57]) с завидным постоянством приписывает простейшие модели с дробными производными только М. Капуто и Ф. Маинарди [17, 34–37], другая [58–63] – американским ученым Р. Бэгли и П. Торвику, которые начали использовать модель Фойгта и модель стандартного линейного тела с дробными производными соответственно в 1979 [64] и 1983 [65] годах без упоминания работ советских исследователей [28–31, 38–51], о которых они, очевидно, не знали, хотя задача о колебаниях системы с одной степенью свободы в среде, демпфирующие свойства которой описываются моделью стандартного линейного тела с дробными производными, была опубликована в International Journal of Engineering Science еще в 1971 году [47]. Но что более непонятно, так это то, что и в работах российских ученых [12, 15, 19, 66–78] по каким-то причинам не цитируются пионерские статьи советских механиков [30, 31, 42–47]. Даже в учебнике по механике сплошных сред [77], изданном в 2016 году, модель стандартного линейного тела с дробными производными, приписывается М. Капуто и Ф. Маинарди.

С целью продемонстрировать вклад российских механиков в развитие наследственной механики Ю.А. Россихин опубликовал в 2010 году ретроспективную статью [32], в которой изложил свой взгляд на два параллельных пути развития дробного исчисления в механике твердого деформируемого тела: с помощью интегральных соотношений Больцмана–Вольтерра со слабо сингулярными ядрами дробного порядка и с помощью дифференциальных уравнений с дробными производными, и привел истори-

ческий обзор работ советских [8–10, 28–31, 38–51] и зарубежных [26, 27, 33–37, 79–84] ученых в приложении дробного исчисления в задачах механики, которые были опубликованы в 40–70-е годы прошлого столетия. Все основные работы сведены были в таблицу, которую мы здесь решили привести с небольшими дополнениями в виде табл. 1, поскольку ранее с ней можно было ознакомиться только в англоязычном издании. Из данных табл. 1 четко видно, какой вклад внесли российские механики.

После выхода в свет ретроспективы [32] практически все источники, приведенные в ней, были включены Ф. Маинарди в список литературы в его монографии [16]. Следует отметить, что в последнее десятилетие появился цикл работ, в которых отражено наследие российских и советских математиков и механиков, чьи исследования связаны с развитием и применением дробного исчисления [2, 4, 5, 7, 85–94].

Как в России, так и за рубежом, за последние сорок лет появилось много работ, касающихся проблем дробного исчисления, в которых не только предлагаются новые модели вязкоупругих сред с дробными производными и интегралами, но также решаются конкретные задачи прикладного характера.

По приглашению А. Leissa, главного редактора журнала *Applied Mechanics Reviews*, автор данной статьи в соавторстве с Ю.А. Россихиным сделал обзор работ по применению дробного исчисления к динамическим задачам механики твердого тела, который был опубликован в 1997 году [95]. В процессе работы над обзором [95] выяснилось, что число научных публикаций по этой тематике к началу 1996 года превысило 200 наименований. Обзор [95] не только познакомил читателей с последними на тот момент достижениями в названной области, но и показал вклад русской школы механиков в решение многих проблем, связанных с использованием дробного исчисления.

Наш второй обзор, вышедший в свет в том же журнале в 2010 году и включивший в себя 337 источников [96], показал, что если раньше объектом исследования служили в основном линейные системы с одной степенью свободы [95], то в течение первого десятилетия двадцатого века объекты изучения усложнились. Это нелинейные осцилляторы Дюффинга и Ван дер Поля, линейные и нелинейные системы с двумя степенями свободы, линейные и нелинейные системы с бесконечным числом степеней свободы: стержни, балки, пластинки и оболочки, висячие комбинированные системы, многослойные конструкции и т.д. В этот же период были предложены и более сложные реологические модели на основе использования нескольких производных различных дробных порядков [97–100], а также модели с несколькими временами релаксации и ретардации [101, 102].

Встречаясь со своими русскоязычными коллегами на различных конференциях, нам с Ю.А. Россихиным приходилось не раз слышать замечание о том, что пора бы написать обзорную работу на тему использования дробного исчисления в механике на русском языке. Считая это замечание вполне справедливым, мы начали такую работу несколько лет назад, тем более, что после нашего обзора 2010 года [96] появилось огромное количество новых работ в этой области. После ухода из жизни профессора Ю.А. Россихина в 2017 году, материал для обзора на русском языке продолжал накапливаться. И последней отправной точкой для его окончательного написания послужила новая программа РФФИ под названием “Экспансия”, направленная как раз на подготовку и издание обзорных работ российских ученых. На самом деле пришло время собрать полученные за последнее десятилетие результаты, проанализировать их и дать им критическую оценку в свете новых представлений о роли и месте дробного исчисления в инженерной практике.

Следует отметить, что в данной работе (в силу ограничения объема журнальной статьи) включены только новейшие исследования, касающиеся использования дробного исчисления в динамических задачах вязкоупругости твердого деформируемого тела, причем мы не будем касаться исследований, в которых порядок дробного оператора является переменной величиной, отослав читателя к обзорам [103, 104]. Дробное ис-

Таблица 1. Исторический обзор вклада российских и зарубежных ученых в приложении дробного исчисления в задачах механики в 40–70-е годы прошлого столетия

Простейшие модели, содержащие операторы дробного порядка	Российские исследователи	Зарубежные исследователи	Приложения моделей в динамических задачах, выполненные до 1980 года
модель Ньютоновской жидкости с производной дробного порядка $\sigma(t) = E_{\infty} \tau_{\varepsilon}^{\gamma} D^{\gamma} \varepsilon(t)$ $\sigma(t) = E_{\infty} \tau_{\varepsilon}^{\gamma} I^{1-\gamma} d\varepsilon(t)$		<i>Scott Blair</i> , 1944 [27] <i>Бленд</i> , 1960 [84]	<i>Watanabe</i> , 1959 [33] <i>Stiassnie</i> , 1979 [211] <i>Герасимов</i> , 1948 [28] <i>Caputo</i> , 1976 [83]
модель Кельвина-Фойгта а) в виде соотношений Больцмана–Вольтерра $\varepsilon = J_0 \int_0^t \Delta_{\gamma}(-t'/\tau_{\sigma}) \sigma(t-t') dt'$ б) с производной дробного порядка $\sigma = E_0(\varepsilon + \tau_{\sigma}^{\gamma} D^{\gamma} \varepsilon)$	<i>Шермергор</i> , 1966 [30]		
модель Максвелла а) в виде соотношений Больцмана–Вольтерра $\sigma = E_{\infty} \left[\varepsilon - \int_0^t \Delta_{\gamma}(-t'/\tau_{\varepsilon}) \varepsilon(t-t') dt' \right]$ б) с дробной производной $\sigma + \tau_{\varepsilon}^{1/2} D^{1/2} \sigma = \eta \dot{\varepsilon}$ $\sigma + \tau_{\varepsilon}^{\gamma} D^{\gamma} \sigma = E_{\infty} \tau_{\varepsilon}^{\gamma} D^{\gamma} \varepsilon$ в) с интегралом дробного порядка $\varepsilon = J_{\infty}(\sigma + \tau_{\varepsilon}^{-\gamma} I^{\gamma} \sigma)$	<i>Шермергор</i> , 1966 [30] <i>Мешков</i> , 1967 [31] <i>Шермергор</i> , 1966 [30]	<i>Watanabe</i> , 1959 [33] <i>Caputo</i> , 1966 [34], 1967 [35] <i>Smit and de Vries</i> , 1970 [80] <i>Gemant</i> , 1936 [26] <i>Caputo and Mainardi</i> , 1971 [37]	<i>Watanabe</i> , 1959 [33] <i>Caputo</i> , 1967 [35], 1974 [82] <i>Bagley and Torvik</i> , 1979 [64] <i>Зеленев и др.</i> , 1970 [45] <i>Россихин</i> , 1970 [44] <i>Buchen and Mainardi</i> , 1975 [81]
модель стандартного линейного тела а) в виде соотношений Больцмана–Вольтерра $\sigma = E_{\infty} \left[\varepsilon - \nu_{\varepsilon} \int_0^t \Delta_{\gamma}(-t'/\tau_{\varepsilon}) \varepsilon(t-t') dt' \right]$ $\varepsilon = J_{\infty} \left[\sigma + \nu_{\sigma} \int_0^t \Delta_{\gamma}(-t'/\tau_{\sigma}) \sigma(t-t') dt' \right]$	<i>Работнов</i> , 1948 [29]	<i>Gross</i> , 1947 [79]	<i>Розовский и Синайский</i> , 1966 [43] <i>Мешков и Россихин</i> , 1968 [41] <i>Зеленев и др.</i> , 1970 [46] <i>Россихин</i> , 1970 [44] <i>Мешков и др.</i> , 1971 [47] <i>Гонсовский и др.</i> , 1972 [48] <i>Гонсовский и Россихин</i> , 1972 [49], 1973 [50]

Таблица 1. Окончание

Простейшие модели, содержащие операторы дробного порядка	Российские исследователи	Зарубежные исследователи	Приложения моделей в динамических задачах, выполненные до 1980 года
б) с производной дробного порядка $\sigma + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma \sigma = E_0(\varepsilon + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma \varepsilon)$	Мешков, 1967 [31]	Caputo & Mainardi, 1971 [36]	Мешков и др., 1967 [42] Caputo and Mainardi, 1971 [37]
в) с оператором дробного порядка $\sigma = E_\infty \left[1 - \nu_\varepsilon \frac{\tau_\varepsilon^{-\gamma} I^\gamma}{1 + \tau_\varepsilon^{-\gamma} I^\gamma} \right] \varepsilon$	Работнов, 1948 [29]		
обобщенная модель линейного стандартного тела $\sigma = E_\infty \left[\varepsilon - \int_0^t \sum_{j=1}^n e_j \, \mathfrak{A}_\gamma(-t'/\tau_{\varepsilon j}) \varepsilon(t-t') dt' \right]$	Работнов, 1966 [9]		
Оператор дробного порядка с ядром Ржаницына а) в качестве ядра ползучести $\varepsilon = J_\infty \left[1 + \nu_\sigma \left(1 + \tau_\sigma \frac{d}{dt} \right)^{-\gamma} \right] \sigma$	Мешков, 1967 [31] Слонимский, 1967 [39]		
$\varepsilon = J_\infty \left[\sigma + \nu_\sigma \int_0^t \frac{t'^{\gamma-1} e^{-t'/\tau_\sigma}}{\tau_\sigma^\gamma \Gamma(\gamma)} \sigma(t-t') dt' \right]$	Ржаницын, 1949 [8]		
$\sigma = E_\infty \left[\varepsilon - \int_0^t e^{-t'/\tau_\sigma} \mathfrak{A}_\gamma(-\nu_\sigma t'/\tau_\sigma) \varepsilon(t-t') dt' \right]$	Вульфсон, 1960 [38]		
б) в качестве ядра релаксации $\sigma = E_\infty \left[\varepsilon - \nu_\varepsilon \int_0^t \frac{t'^{\gamma-1} e^{-t'/\tau_\varepsilon}}{\tau_\varepsilon^\gamma \Gamma(\gamma)} \varepsilon(t-t') dt' \right]$	Мешков и Россихин, 1971 [40]		Россихин, 1970 [44] Мешков и Россихин, 1971 [40] Белов и Богданович, 1976 [51]

числение в последние годы также с успехом используется в термоупругости [105], биомеханике [106], теории разрушения [107], гидромеханике [108]. Весьма бурно развиваются также численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений дробного порядка [59, 60, 109, 110].

В 2020 году в издательстве Springer вышла в свет трехтомная “Энциклопедия по механике сплошных сред”, в которую вошел раздел *Fractional Calculus in Continuum Mechanics* под редакцией Ю.А. Россихина и М.В. Шитиковой. Часть этих результатов [25, 111–118] найдет освещение в данной обзорной работе, которая посвящается светлой памяти российских механиков, которые стали первопроходцами в использовании дробного исчисления в механике сплошных сред, намного опередив своих зарубежных коллег: Ю.Н. Работнову, А.Н. Герасимову, М.И. Розовскому, Д.Т. Шермергору, С.И. Мешкову и Ю.А. Россихину.

2. Предварительные замечания. Прежде чем перейти к непосредственному анализу динамических задач механики деформируемого твердого тела, рассмотренных в по-

следнее десятилетие с использованием операторов дробного порядка, приведем несколько определений, которые будут использованы в дальнейшем.

2.1. Основные формы дробного интегродифференцирования, используемые в теории вязкоупругости. Существует много форм дробного интегродифференцирования, которые освещены в энциклопедической монографии [1]. Ее авторы отмечали, что “перед начинающим исследователем могут возникнуть психологические затруднения, связанные с необходимостью ориентироваться в разнообразных определениях дробного интегродифференцирования и огромном потоке публикаций”. И это действительно так. Тем более, что в течение последнего десятилетия появилось много новых определений дробных производных.

В задачах вязкоупругости используются дробные производные и дробные интегралы Римана–Лиувилля, дробные производные Вейля периодических функций, дробные производные Грюнвальда–Летникова через разности дробного порядка (что очень удобно для развития численных методов решения дифференциальных уравнений с дробными производными). Свойства всех этих перечисленных операторов дробного порядка изучены и приведены в [1].

Что же касается весьма популярной в последнее время производной Герасимова–Капуто, то (несмотря на то, что в работе А.Н. Герасимова [28] она была предложена в 1948 году, использовалась в статье Ш. Ватанабе в 1959 году [33], упоминается в монографиях Д.Р. Бленда [84] и Ю.Н. Работнова [9], изданных соответственно в 1960 и 1966 годах, и затем уже приведена в работах М. Капуто [34, 35] в 1966–1967 годах) эта форма дробной производной не была включена авторами, которые являются всемирно признанными экспертами в области дробного интегродифференцирования, в монографию [1].

Исследование свойств дробной производной Герасимова–Капуто было начато Р. Горенфлю и Ф. Маинарди [119] в 1997 году, затем в монографии И. Подлюбного [11] в 1999 году, где впервые этой форме записи было присвоено название “производная Капуто” по предложению Ф. Маинарди [119], хотя И. Подлюбный прекрасно знал работы русских ученых и включил в список источников статью А.Н. Герасимова [28]. Анализ свойств этой производной был продолжен К. Дитхельмом в 2004 году, который подробно описывает историю появления этого определения дробной производной (см. с. 51 в [13]), но написал, что сознательно оставляет название только с одной фамилией, как это было предложено Ф. Маинарди. С тех пор не только в англоязычной литературе [14, 16, 110, 119–124], но и в некоторых российских источниках [15, 66, 70, 76, 125, 126] авторы используют термин “производная Капуто”, в то время как более корректно использовать понятие “производная Герасимова–Капуто” [2, 7, 32, 127].

В последние годы появился вал статей (например, [128–134]), в которых обсуждаются теории и приложения “новых производных дробного порядка”, которые построены путем замены сингулярного ядра в производных Герасимова–Капуто или Римана–Лиувилля на несингулярное ядро. В работах [122, 124] приведен обзор существующих на данный момент определений операторов дробного порядка, начиная с классических [1, 2, 123] и заканчивая недавно предложенными [128, 129]. В [122, 135] было показано, что все новоявленные формы операторов, хотя их авторы и приписали им определение “дробные”, не отвечают критериям дробных производных. Коллектив математиков, обладающих большим опытом в исследовании операторов дробного порядка, в статье с названием “Почему дробные производные с несингулярными ядрами не должны использоваться” [136] на основе строгих математических выкладок показал, что такие производные обладают недостатками, которые должны запретить их использование. Они не удовлетворяют фундаментальной теореме дробного исчисления, поскольку не допускают существование соответствующего интеграла свертки, для которого производная является левым обратным, и значение производной в на-

чальный момент времени всегда равно нулю, что накладывает неестественное ограничение на дифференциальные уравнения и модели, где такие производные могут применяться. В частных случаях для так называемых производных Капуто–Фабрицио [126] и Атангана–Балеану [127] показано, что если это ограничение выполняется, то производная может быть просто выражена через производные целого порядка и дробную производную Герасимова–Капуто, тем самым доказывая, что эти производные не содержат в себе ничего нового.

Обзор полезных формул из теории дробного исчисления собран в справочной статье [123], поэтому ограничимся только теми, которые будут использоваться нами в дальнейшем – левосторонние (с нижним индексом “+”) и правосторонние (с нижним индексом “–”) интегралы ${}^{RL}I^\gamma$ и производные ${}^{RL}D^\gamma$ Римана–Лиувилля дробного порядка γ на отрезке $[a, b]$ ($-\infty < a < b < \infty$) [1]

$${}^{RL}I_{a+}^\gamma \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_a^t \frac{\varphi(t')}{(t-t')^{1-\gamma}} dt' \quad (t > a) \quad (2.1)$$

$${}^{RL}I_{b-}^\gamma \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_t^b \frac{\varphi(t')}{(t'-t)^{1-\gamma}} dt' \quad (x < b) \quad (2.2)$$

$${}^{RL}D_{a+}^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(t')}{(t-t')^\gamma} dt' \quad (2.3)$$

$${}^{RL}D_{b-}^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_t^b \frac{f(t')}{(t'-t)^\gamma} dt' \quad (2.4)$$

на полуоси, когда $a = 0$

$${}^{RL}I_{0+}^\gamma \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t \frac{\varphi(t')}{(t-t')^{1-\gamma}} dt' \quad (2.5)$$

$${}^{RL}I_{-}^\gamma \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_t^\infty \frac{\varphi(t')}{(t'-t)^{1-\gamma}} dt' \quad (2.6)$$

$${}^{RL}D_{0+}^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(t')}{(t-t')^\gamma} dt' \quad (2.7)$$

$${}^{RL}D_{-}^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_t^\infty \frac{f(t')}{(t'-t)^\gamma} dt' \quad (2.8)$$

и на всей оси

$${}^L I_{+}^\gamma \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_{-\infty}^t \frac{\varphi(t')}{(t-t')^{1-\gamma}} dt' \quad (2.9)$$

$${}^L D_{+}^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t \frac{f(t')}{(t-t')^\gamma} dt' \quad (2.10)$$

производные Герасимова–Капуто [11, 16, 33]

$${}^{GC}D_{a+}^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_a^t \frac{f'(t')}{(t-t')^\gamma} dt' \quad (f' = df/dt) \quad (2.11)$$

$${}^{GC}D_+^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_{-\infty}^t \frac{f'(t')}{(t-t')^\gamma} dt' \quad (2.12)$$

где $\Gamma(\gamma)$ – гамма-функция.

Мы не будем здесь останавливаться на свойствах операторов (2.1)–(2.12), так как по этому вопросу имеется обширная литература [1, 7, 11, 13, 14, 16, 120–123].

Из сравнения определений дробных производных по Риману–Лиувиллю (2.3), (2.10) и Герасимову–Капуто (2.11), (2.12) видно, что они отличаются порядком действия операций дифференцирования и интегрирования, но в случае, когда нижний предел равен $-\infty$, обе производные приводят к одинаковым результатам.

В наследственной механике важную роль играют операторы дробного порядка, определенные на всей оси, поскольку они позволяют описать процесс затухающей памяти, и операторы на полуоси, когда динамический процесс рассматривается с момента времени $t = 0$.

2.2. Несколько замечаний о терминологии. В подавляющем количестве публикаций, исследование в которых выполнены с использованием аппарата дробного исчисления, объектом анализа является система с одной степенью свободы. Это связано в основном с двумя причинами. Во-первых, система с одной степенью свободы часто используется в инженерной практике в качестве первого приближения или в качестве эталонной тестовой задачи, прежде чем перейти к рассмотрению более сложных моделей или систем со многими степенями свободы, например, простейшая модель виброизоляционной системы, гасителя колебаний или одностепенная модель высотного здания в виде невесомого стержня с присоединенной массой [96, 137, 138]. Во-вторых, изучение колебаний сложных механических систем или конструкций может быть сведено к решению системы уравнений, описывающих колебания одностепенных систем [113, 139].

Однако сейчас вместо классического понятия механическая система с одной степенью свободы [140], или одностепенная система [95, 131, 141, 142], стал весьма распространенным так называемый осциллятор (oscillator). Очевидно, что “мода” на это слово пришла из физики, где давно устоявшимися терминами являются осциллятор Дюффинга (Duffing oscillator) [143–146], осциллятор Маттье (Mathieu oscillator) [147] и осциллятор Ван дер Поля (Vander Pol oscillator) [148, 149].

Но при рассмотрении дифференциальных уравнений с дробными производными, описывающих затухающие колебания системы с одной степенью свободы, появились новые термины как в англоязычных, так в русскоязычных источниках: дробный осциллятор (fractional oscillator) [67, 68, 76, 150–153], эредитарный осциллятор [154–157], фрактальный осциллятор (fractal oscillator) [158, 159], фрактальное трение [160], фрактальное уравнение [161], дробные колебания (fractional vibrations) [162, 163].

Не только у неискушенного читателя, но и у ученого со стажем подобные русские словосочетания могут вызвать вполне обоснованное недоумение. Термин дробный осциллятор перешел из англоязычной литературы как прямой перевод словосочетания fractional oscillator. Как нами уже отмечалось в обзорной работе [96], термины fractional oscillator и fractionally damped structure означают в механике использование аппарата дробного исчисления для описания сил демпфирования в разрешающих дифференциальных уравнениях движения.

С нашей точки зрения и с точки зрения механического смысла, ни дробного, ни эредитарного, ни фрактального осцилляторов в природе не существует. И вряд ли кому понятно, что такое фрактальное трение или дробные колебания. Часто подобного рода недоразумения возникают из-за неточного перевода с английского на русский и обратно. Слова fractional и fractal имеют общий корень, но имеют совершенно разный и лингвистический, и научный смысл. Прилагательное fractal имеет отношение только к фрактальным объектам, которые являются сильно нелинейными структурами, и не

могут описываться классическими дробными производными, которые, как известно, являются линейными операторами [1, 122, 127]. В использование слова *fractal* в контексте использования дробных производных Римана–Лиувилля и Герасимова–Капуто внесла свою “отрицательную” лепту и монография [164] с названием “Физика фрактальных операторов”, в которой только глава 2 посвящена фракталам, а остальной материал – анализу и использованию дробных производных. Так, Р.Р. Нигматуллин [165] предпринял попытку найти связь между фрактальным множеством Кантора и интегралом дробного порядка, предположив, что фрактальный размер множества Кантора совпадает с дробным порядком интеграла. Но из критической заметки Р.С. Рутмана [166] следует, что приемлемого соотношения между фракталами и дробным интегрированием или дифференцированием установлено не было. Такое же мнение изложено и в монографии И. Подлюбного [11]. В русскоязычной литературе термин фрактальный осциллятор “прижился” после опубликования в 2002 году работы [158].

Что же касается эредитарных осцилляторов [154–157], то этот термин стал появляться в русскоязычных работах после опубликования статьи В.В. Учайкина [66] в 2007 году, в которой он ввел понятие эредитарность (прямое калькирование от *heredity*, что в переводе с английского означает наследственность). В русской научной литературе уже существовало достаточно терминов, которыми пользовались и пользуются российские исследователи [8–10, 95] и которые нашли отражение и в западной научной литературе: затухающая память (*fading memory*), последствие (*aftereffect*), наследственная механика (*hereditary mechanics*), и которые, на наш взгляд, ближе и понятнее русскоязычному читателю.

2.3. О “дробной” силе инерции. В обзоре 2010 года (с. 11–13, [95]) отмечалось, что некоторые исследователи вводят в уравнения движения в описание силы инерции производные дробного порядка по времени от перемещения вместо традиционной производной второго порядка наряду с описанием сил сопротивления внешней среды при помощи дробных производных. Было показано, что поведение корней характеристических уравнений при такой постановке лишено физического смысла. К тому же совершенно непонятно, каким образом можно экспериментально определить порядок дробной производной для силы инерции, т.е. провести калибровку параметра дробности для инженерных расчетов.

С нашими представлениями о подобных задачах с “дробной силой инерции” согласуется критика, приведенная в [108, 167] при анализе задачи о свободном падении тела в атмосфере на основе дробно-дифференциального аналога уравнения Ньютона [168]. Отмечается проблема размерности коэффициента при силе инерции, так как он не совпадает с размерностью массы, что заставляет искать новые формулы для импульса, кинетической энергии и связанных с ними динамических переменных. В работе [167] также показана несостоятельность попытки Д. Балеану с соавторами [169] построить дробный аналог механики Ньютона путем введения дробной скорости и дробного импульса.

Несмотря на критический анализ, приведенный в [96, 108, 167], поток статей, где в уравнениях движения вводятся дробные силы инерции, не ослабевает [76, 151–155, 170].

Так, авторы работ [76, 151] утверждают, что они устранили “пробел” о сомнительности калибровки параметров динамической системы с силой инерции дробного порядка. Для этого ими предложена модель вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы, основанная на уравнении, в котором “учитывается диссипация энергии колебаний” за счет введения дробной производной в инерциальное слагаемое без учета “дополнительной динамической силы трения”. При этом утверждается, что порядок дробной производной в уравнении характеризует резонансные свойства осциллятора и может быть выражен через добротность. Однако, для того чтобы устранить последствия введения дробной производной в силу инерции и “уравновесить” размерность всех слагаемых в исследуемом уравнении, авторы вынуждены были

умножить упругую силу и внешнюю гармоническую силу, под воздействиями которых колеблется материальная точка, на коэффициент, имеющий дробную размерность, в качестве которого была выбрана собственная частота колебаний в степени, равной порядку дробной производной. Таким образом, было исследовано некоторое абстрактное дифференциальное уравнение дробного порядка, которое имеет мало общего с уравнением колебаний материальной точки в диссипативной среде. Позднее авторы распространили этот подход на случай колебаний консольной балки [125].

3. Модели вязкоупругости на основе операторов дробного порядка. При воздействии нагрузок тело может прийти в движение, или его различные частицы могут испытывать движение относительно друг друга, т.е. деформироваться. Деформация в результате данной нагрузки будет зависеть от свойств материала. Она может быть обратимой (упругая деформация) или необратимой (вязкая, пластическая или постоянная деформация), или может содержать как восстанавливаемую, так и остаточную части. Уравнения, описывающие свойства материала способом, который не зависит от размера или формы (то есть геометрии) тела и зависит только от его природы, называют определяющими или реологическими уравнениями состояния [171].

Первое определяющее соотношение для твердых тел было сформулировано Робертом Гуком в 1660 году, но впервые опубликовано им в 1676 году [172] сначала в виде анаграммы *CEHINOSSSTTUU*, которую он расшифровал в 1678 году [173] в его знаменитом заявлении: *“Ut tensio, sic vis”* (каково растяжение, такова и сила). Гук отождествлял любое идеально-упругое твердое тело с пружиной, относительная деформация которой прямо пропорциональна напряжению:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.1)$$

где σ — напряжение, ε — относительная деформация пружины, E — постоянная, называемая модулем упругости и которая обладает свойством накапливать механическую энергию.

Вместо деформации твердого тела может быть рассмотрено ламинарное сдвиговое течение чисто вязкой жидкости. Определяющее уравнение для идеально-вязкой жидкости, согласно которому скорость деформации прямо пропорциональна напряжению, было впервые представлено И. Ньютоном в 1687 году [174]:

$$\sigma = \eta D\varepsilon \quad (3.2)$$

где η — постоянная, известная как коэффициент вязкости амортизатора, а D обозначает дифференцирование по времени. По аналогии с ньютоновской жидкостью, идеально-вязким элементом в теории вязкоупругости считается амортизатор, который проявляет способность рассеивать механическую энергию.

В последнее время широкое распространение получили полимерные материалы, обладающие вязкоупругими свойствами. Поведение вязкоупругих тел нельзя описать только с позиций классической теории упругости, как идеально-упругие твердые тела, или гидродинамической теории, как идеально-вязкой жидкости. Тела, для которых напряжения определяются деформациями и скоростями деформаций (или более высокими производными по времени от деформации), характеризуют процесс деформации как идеально-упругого, так и идеально-вязкого тела, поэтому они получили название вязкоупругих тел. Когда между компонентами напряжения, деформации и скоростей деформации существует линейная зависимость, то тело проявляет линейное вязкоупругое поведение [84].

Поведение материала называется вязкоупругим, если материал накапливает часть энергии деформации упруго, как потенциальную энергию, и рассеивает остальную одновременно посредством вязких сил [171]. Для того чтобы наглядно изобразить работу различных вязкоупругих материалов часто используют механические модели, состоящие из комбинации идеально-упругих и идеально-вязких элементов, соединенных между собой последовательно или параллельно [8, 84, 171, 175, 176].

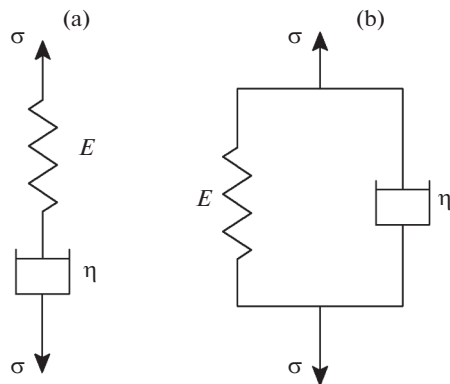


Рис. 1. (а) элемент Максвелла, (b) элемент Кельвина–Фойгта.

3.1. Классификация классических моделей вязкоупругости. Следует заметить, что теория вязкоупругости начала развиваться в 30-е годы 18-го столетия. Подробный обзор первых исследований, посвященных изучению свойств “не вполне упругих” твердых тел, или материалов, обладающих внутренним трением, и опубликованных с 1834 по 1933 год, был сделан Дж.Х. Томпсоном [177].

Интересно отметить, что анализ классических работ Дж. Максвелла (1867 [178]), лорда Кельвина (он же W. Thomson, 1865 [179], 1875 [180]), О.Э. Мейера (1874 [181]), В. Фойгта (1889 [182], 1892 [183]) и Г. Джеффриса (1917 [184], 1929 [185]) показал, что авторы не использовали механическую интерпретацию поведения вязкоупругих материалов в виде сочетания упругой пружины и вязкого демпфера, и, как следствие, в работах [178–185] не приведено механических схем ни элемента Максвелла (рис. 1,а), ни элемента Кельвина–Фойгта (рис. 1,б).

В 1867 году Максвелл [178] записал дифференциальное уравнение, являющееся обобщением закона (3.2) и описывающее релаксацию материала, которое можно интерпретировать с помощью последовательного соединения упругого и вязкого элементов (рис. 1,а) (в этом случае напряжение σ одинаково для пружины и амортизатора, а общая деформация ϵ равна сумме их деформаций):

$$\sigma + \tau_\epsilon D\sigma = E_\infty \tau_\epsilon D\epsilon \quad (3.3)$$

где $E_\infty = E$ – нерелаксированный, или мгновенный, модуль упругости (non-relaxed, or instantaneous, or glassy elastic modulus), $\tau_\epsilon = \eta/E_\infty$ – время релаксации (relaxation time).

Дифференциальное уравнение, обобщающее закон Гука (3.1) и описывающее упругое последствие в материале (это понятие было введено Кельвином [180], но без записи дифференциального уравнения), было представлено независимо друг от друга в работах Мейера [181], Фойгта [182, 183] и Джеффриса [184]. Несмотря на этот факт, модель в виде параллельного соединения упругого и вязкого элементов (рис. 1,б) в литературе называют элементом Кельвина–Фойгта, или моделью Фойгта, или моделью Кельвина (в этом случае деформации ϵ одинаковы, а напряжение σ равно сумме напряжений в растянутой пружине и амортизаторе):

$$\sigma = E_0 \epsilon + E_0 \tau_\sigma D\epsilon \quad (3.4)$$

где $E_0 = E$ – релаксированный, или длительный, модуль упругости (relaxed, or prolonged, or rubbery elastic modulus), $\tau_\sigma = \eta/E_0$ – время ретардации или время запаздывания [9] (retardation time, or creep time, or delayed time).

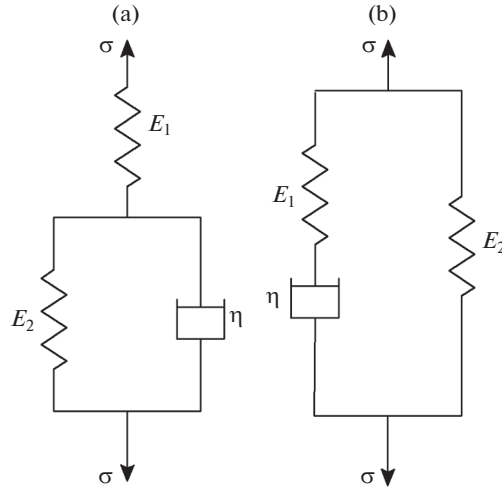


Рис. 2. Схемы моделей стандартного линейного тела: (a) модель Пойтинга–Томсона–Ишлинского, (b) модель Зинера–Ржаницына.

Как отмечал Ю.Н. Работнов [9], в природе, вероятно, нельзя указать материалы, которые подчинялись бы уравнению (3.3) или (3.4): идеальная вязкоупругая жидкость Максвелла и идеальное вязкоупругое тело Кельвина–Фойгта представляют собой некоторые воображаемые модели, свойства которых далеки от свойств всех реальных тел.

Комбинируя пружины и вязкие сопротивления, можно получить схемы, поведение которых, по крайней мере, качественно лучше воспроизводят поведение реальных твердых тел под нагрузкой. Так, например, трехэлементные модели состоят из комбинаций соединений двух пружин и одного амортизатора или одной пружины и двух амортизаторов. В литературе встречается большое разнообразие названий данных моделей, и нет единой структуры их классификации [186]. Ограничимся далее рассмотрением моделей, которые применяются в механике деформируемого твердого тела.

Трехэлементная модель с двумя пружинами, которая называется моделью стандартного линейного твердого тела (standard linear solid model) [8, 78, 171, 187], получается присоединением пружины последовательно к модели Кельвина–Фойгта (рис. 2,а) или параллельно к модели Максвелла (рис. 2,б). В связи с этим данные модели также называют стандартными трехпараметрическими моделями Кельвина–Фойгта и Максвелла соответственно [171].

Некоторые авторы [97, 171, 188] связывают первое появление модели стандартного линейного тела с книгой Дж. Пойнтинга и Дж. Томсона [189], вышедшей в свет в 1902 году. Но если обратиться к их работе [189], то можно увидеть, что ни интегрального, ни дифференциального уравнения, описывающего поведение материала, там не приведено, а схема, предложенная Пойнтингом и Томсоном (рис. 3,а), является лишь первой попыткой “представить твердое тело в виде подходящей механической модели”, как и было замечено К. Зинером [187].

В связи с этим уместно напомнить, что дифференциальное уравнение модели стандартного линейного тела было впервые получено А.Ю. Ишлинским в 1940 году [190, 192] в виде

$$\sigma + \tau_\varepsilon D\sigma = E_0(\varepsilon + \tau_\sigma D\varepsilon) \quad (3.5)$$

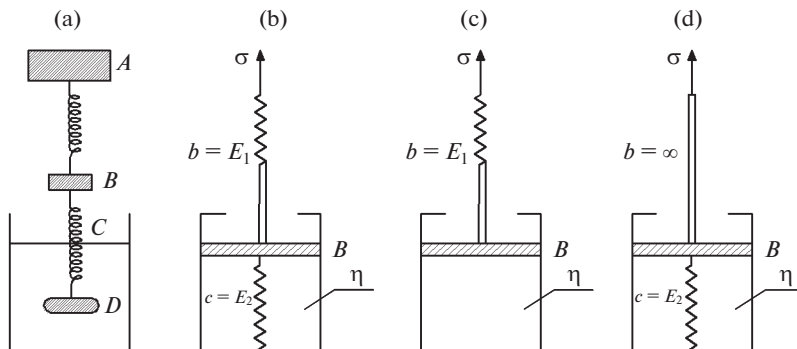


Рис. 3. Механические модели: (a) Пойнтинга–Томсона [189], (b) упруго-релаксирующее тело Ишлинского [191, 192], (c) тело Максвелла, лишенное последствия [192], (d) тело Фойгта, лишенное свойств релаксации [192].

где $E_0 = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}$ – релаксированный модуль упругости модели, $E_\infty = E_1$ – нерелаксированный модуль, а $\tau_\epsilon = \frac{\eta}{E_1 + E_2}$ и $\tau_\sigma = \frac{\eta}{E_2}$ – соответственно характерные времена релаксации и запаздывания.

Ю.Н. Работнов в своей статье 1948 года [29] называет модель (3.5) упруго-релаксирующим телом Ишлинского и, отталкиваясь именно от этой работы А.Ю. Ишлинского [190], впервые записывает модель стандартного линейного тела через оператор дробного порядка, который мы сейчас называем дробным оператором Ю.Н. Работнова.

В статье А.Ю. Ишлинского 1945 года [192] приведены схемы стандартного линейного тела (рис. 3,б), модели Максвелла (рис. 3,с) и модели Кельвина–Фойгта (рис. 3,д). Из сравнения схем, представленных на рис. 3,а и 3,б, видно, что они моделируют один и тот же процесс, поэтому первый вариант модели стандартного линейного тела в виде обобщенной модели Кельвина–Фойгта (рис. 2,а) следует называть моделью Пойнтинга–Томсона–Ишлинского.

Модель стандартного линейного твердого тела, представленную на рис. 2,б, в западной литературе приписывают К. Зинеру, считая, что уравнение данной модели впервые было записано в 1948 году в работе [187].

Однако следует отметить, что эта же модель одновременно была предложена в монографии А.Р. Ржаницына в 1949 году [8], поэтому второй вариант модели стандартного линейного тела в виде обобщенной модели Максвелла (рис. 2,б) корректно называть моделью Зинера–Ржаницына.

А.Р. Ржаницын также показал [8], что уравнение (3.5) справедливо для обеих трехэлементных схем, представленных на рис. 2, с точностью до определения характерных величин [84], которые для модели на рис. 2,б имеют вид

$$E_0 = E_2, \quad E_\infty = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}, \quad \tau_\epsilon = \frac{\eta}{E_1}, \quad \tau_\sigma = \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \eta$$

а в работе [193] анализировалась эквивалентность обоих вариантов модели с точностью до коэффициентов.

Известно, что свойства вязкоупругого материала меняются с течением времени, при этом модуль упругости уменьшается от своего нерелаксированного (мгновенного)

значения до релаксированного (длительного), которые связаны с временами релаксации и ретардации следующим соотношением [30, 187]:

$$\frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma} = \frac{E_0}{E_\infty} \quad (3.6)$$

т.е. классическая модель линейного стандартного твердого тела (3.5) представляет собой трехпараметрическую модель, физическими характеристиками которой являются мгновенный E_∞ и длительный E_0 модули упругости и время релаксации τ_ε (или время запаздывания τ_σ) независимо от того, какую схему использовать: первую на рис. 2,а или вторую на рис. 2,б. Поэтому применение уравнения (3.5) с абстрактными коэффициентами

$$\sigma + a_1 D\sigma = E\varepsilon + a_2 D\varepsilon$$

в механике твердого деформируемого тела является неприемлемым.

Сейчас название модель Зинера для уравнения (3.5) прочно укоренилось не только в зарубежной литературе [16, 52, 53, 193–201], но, к сожалению, и у некоторых российских авторов [69, 70, 74, 77], которые забывают или не знают о вкладе А.Ю. Ишлинского и А.Р. Ржаницына в становлении модели стандартного линейного твердого тела.

Дальнейшее увеличение количества элементов Максвелла и Кельвина–Фойгта приводит к усложнению модели, различные схемы подробно описаны в многочисленных источниках по вязкоупругости [52, 84, 96, 171].

3.2. Простейшие модели вязкоупругости с дробными производными. Рассмотрим простейшие модели, которые могут быть получены заменой производных целого порядка в традиционных моделях на производные дробного порядка по времени, используя определение Римана–Лиувилля (2.7)

$$D^\gamma \sigma = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\sigma(t')}{\Gamma(1-\gamma)(t-t')^\gamma} dt' \quad (3.7)$$

где принято обозначение $D^\gamma = {}^{RL}D_{0+}^\gamma$ далее по тексту, $0 < \gamma \leq 1$ – порядок дробной производной. Заметим, что $D^1 x(t) = dx/dt$, так как $\lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{(t-t')^{-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)} = \delta(t-t')$.

Следует отметить, что выбор производной по Риману–Лиувиллю для изучения динамических задач вязкоупругости не является случайным, так как при их решении часто бывает необходимо находить резольвентные операторы и расшифровывать сложные операторные соотношения [202, 203]. Использование для этих целей других форм дробных производных, например, по Герасимову–Капуто ${}^{GC}D^\gamma$ оказывается весьма неудобным. Так, в [с. 13, 39] было показано, что для резольвентных функций (а дробно-экспоненциальная функция Работнова как раз и обладает таким свойством) справедливо равенство ${}^{RL}D_{0+}^\gamma I_+^\gamma = I_{0+}^\gamma {}^{RL}D_{0+}^\gamma$, в то время, как для производной Герасимова–Капуто нет: ${}^{GC}D_{0+}^\gamma {}^{RL}I_{0+}^\gamma \neq {}^{RL}I_{0+}^\gamma {}^{GC}D_{0+}^\gamma$, другими словами, это неравенство приводит к дополнительным значительным трудностям при нахождении резольвентных операторов. Именно поэтому в дальнейшем мы будем использовать производные дробного порядка по Риману–Лиувиллю.

Модель Кельвина–Фойгта с дробной производной, предложенная в 1959 году Ш. Ватанабэ [33] и 1966 году Т.Д. Шермергором [30], имеет вид

$$\sigma = E_0 \varepsilon + E_0 \tau_0^\gamma D^\gamma \varepsilon \quad (3.8)$$

При $\gamma = 1$ модель (3.8) переходит в классическую модель вязкоупругости Кельвина–Фойгта (3.4).

Следует отметить, что в некоторых источниках [72–75] в уравнении (3.8) деформацию ε заменяют скоростью деформаций $\dot{\varepsilon}$, т.е. записывают соотношение $\sigma = E_0 \dot{\varepsilon} + E_0 \tau_\sigma^\gamma D^\gamma \dot{\varepsilon}$, которое также называют моделью Фойгта с дробной производной, что совершенно ошибочно, поскольку записанная в таком виде модель с дробной производной представляет собой параллельное соединение двух демпферов и описывает поведение вязкоупругой жидкости.

Резольвентное уравнение к уравнению (3.8) имеет вид

$$\varepsilon(t) = J_0 \frac{1}{1 + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma} \sigma(t) \quad (3.9)$$

где $J_0 = E_0^{-1}$ – длительная податливость, а оператор

$$\mathfrak{Z}_\gamma^*(\tau_\sigma^\gamma) = \frac{1}{1 + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma} \quad (3.10)$$

– безразмерный оператор Ю.Н. Работнова [30, 92, 93, 202, 203].

Учитывая, что $D^\gamma I^\gamma = I^\gamma D^\gamma = 1$, оператор (3.10) можно представить в виде

$$\mathfrak{Z}_\gamma^*(\tau_\sigma^\gamma) = \frac{I^\gamma \tau_\sigma^{-\gamma}}{1 - (-I^\gamma \tau_\sigma^{-\gamma})} \quad (3.11)$$

где $I^\gamma = {}^{RL}I_{0+}^\gamma$ – дробный интеграл (2.5).

Предполагая, что правая часть формулы (3.11) является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $d = -I^\gamma \tau_\sigma^{-\gamma}$, приходим к следующему соотношению:

$$\mathfrak{Z}_\gamma^*(\tau_\sigma^\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tau_\sigma^{-\gamma(n+1)} I^{\gamma(n+1)} \quad (3.12)$$

С учетом выражения (3.12) соотношение между деформацией и напряжением (3.9) можно переписать в виде

$$\varepsilon = J_0 \mathfrak{Z}_\gamma^*(\tau_\sigma^\gamma) \sigma(t) = J_0 \int_0^t \mathfrak{Z}_\gamma(t'/\tau_\sigma) \sigma(t-t') dt' \quad (3.13)$$

где

$$\mathfrak{Z}_\gamma(t/\tau_\sigma) = \frac{t^{\gamma-1}}{\tau_\sigma^\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t/\tau_\sigma)^{\gamma n}}{\Gamma[\gamma(n+1)]} \quad (3.14)$$

– дробно-экспоненциальная функция Ю.Н. Работнова [29], которая при $\gamma = 1$ переходит в обычную экспоненту, а при $\gamma \rightarrow 0$ превращается в $\frac{1}{2}$ - δ -образную последовательность, поскольку $\mathfrak{Z}_0(t/\tau_\sigma)$ обращается в ноль для любого t ($\Gamma(0) = \infty$), кроме значения $t = 0$, при котором $\mathfrak{Z}_0(0) = \infty$, т.е.

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \mathfrak{Z}_\gamma(t'/\tau_\sigma) = \frac{1}{2} \delta(t') \quad (3.15)$$

Поэтому при $\gamma = 0$, как это следует из соотношения (3.13),

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2} J_0 \sigma(t) \quad (3.16)$$

а из уравнения (3.8) при $\gamma = 0$ получаем

$$\sigma(t) = 2E_0\varepsilon(t) \quad (3.17)$$

Из сравнения формул (3.16) и (3.17) вытекает, что обобщенную модель Фойгта (3.8) нельзя использовать при $\gamma = 0$.

То же самое можно сказать и об обобщенной модели Максвелла с дробными производными

$$J_\infty(\sigma + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma \sigma) = \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma \varepsilon \quad (3.18)$$

где $J_\infty = E_\infty^{-1}$ — мгновенная податливость.

В самом деле формулу (3.18) можно переписать в другом виде, если на правую и левую части этой формулы подействовать оператором I^γ и учесть, что $I^\gamma D^\gamma = D^\gamma I^\gamma = 1$. В результате получим [31]

$$\varepsilon(t) = J_\infty \left[\sigma(t) + \tau_\varepsilon^{-\gamma} \int_0^t \frac{t'^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \sigma(t-t') dt' \right] \quad (3.19)$$

Выражая из уравнения (3.18) величину $\sigma(t)$, имеем

$$\sigma(t) = E_\infty \frac{\tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma}{1 + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma} \varepsilon(t) = E_\infty \left(1 - \frac{1}{1 + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma} \right) \varepsilon(t) \quad (3.20)$$

Учитывая выражения (3.10) и (3.12), соотношение (3.20) можно переписать в виде

$$\sigma(t) = E_\infty \left[\varepsilon(t) - \int_0^t \mathfrak{A}_\gamma(t'/\tau_\varepsilon) \varepsilon(t-t') dt' \right] \quad (3.21)$$

Устремляя в соотношениях (3.19) и (3.21) γ к нулю и учитывая, что

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{t'^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} = \delta(t') \quad (3.22)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \mathfrak{A}_\gamma(t'/\tau_\varepsilon) = \frac{1}{2} \delta(t') \quad (3.23)$$

находим

$$\varepsilon(t) = 2J_\infty \sigma(t) \quad (3.24)$$

$$\sigma(t) = \frac{1}{2} E_\infty \varepsilon(t) \quad (3.25)$$

Иначе обстоит дело с моделью стандартного линейного тела с дробными производными, предложенной С.И. Мешковым в 1967 году [31],

$$J_0(\sigma + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma \sigma) = \varepsilon + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma \varepsilon, \quad (3.26)$$

где

$$\left(\frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma} \right)^\gamma = \frac{E_0}{E_\infty} = \frac{J_\infty}{J_0} \quad (3.27)$$

Следует отметить, что формула (3.27), которая была получена в [30] и [31] из сравнения резольвентных операторов, описывающих соотношения напряжение-деформация и деформация-напряжение, является очень важной с физической точки зрения, поскольку дает связь между реологическими параметрами модели, обеспечивающую ее физическую достоверность.

Из соотношения (3.26) можно выразить напряжение $\sigma(t)$ через деформацию $\varepsilon(t)$ и, наоборот, функцию деформации $\varepsilon(t)$ через напряжение $\sigma(t)$ [92, 93, 201, 204]

$$\sigma(t) = E_0 \frac{1 + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma}{1 + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma} \varepsilon(t) = E_\infty \left(1 - \nu_\varepsilon \frac{1}{1 + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma} \right) \varepsilon(t) \quad (3.28)$$

$$\varepsilon(t) = J_0 \frac{1 + E_\infty E_0^{-1} \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma}{1 + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma} \sigma(t) = J_\infty \left(1 + \nu_\sigma \frac{1}{1 + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma} \right) \sigma(t) \quad (3.29)$$

или

$$\sigma = \bar{E} \varepsilon, \quad \bar{E} = E_\infty [1 - \nu_\varepsilon \mathfrak{D}_\gamma^*(\tau_\varepsilon^\gamma)] \quad (3.30)$$

$$\varepsilon = \bar{J} \sigma, \quad \bar{J} = J_\infty [1 + \nu_\sigma \mathfrak{D}_\gamma^*(\tau_\sigma^\gamma)] \quad (3.31)$$

где $\nu_\varepsilon = \Delta E E_\infty^{-1}$, $\nu_\sigma = \Delta J J_\infty^{-1}$, $\Delta E = E_\infty - E_0$ — дефект модуля, т.е. величина, характеризующая уменьшение упругого модуля от его нерелаксированного значения до релаксированного, и $\Delta J = J_0 - J_\infty$ — дефект податливости.

Тогда с учетом соотношений (3.10), (3.12) и (3.27) приходим к уравнениям

$$\sigma(t) = E_\infty \left[\varepsilon(t) - \nu_\varepsilon \int_0^t \mathfrak{D}_\gamma(t'/\tau_\varepsilon) \varepsilon(t-t') dt' \right] \quad (3.32)$$

$$\varepsilon(t) = J_\infty \left[\sigma(t) + \nu_\sigma \int_0^t \mathfrak{D}_\gamma(t'/\tau_\sigma) \sigma(t-t') dt' \right] \quad (3.33)$$

которые представляют собой соотношения Больцмана—Вольтерра со слабо сингулярными ядрами наследственности $\mathfrak{D}_\gamma(t'/\tau_i)$, где $i = \varepsilon$ или σ , которые затухают при $t \rightarrow \infty$, при этом резольвентные ядра остаются такими же. Только экспоненциальные ядра обладают таким свойством, поэтому ядра (3.14) называют дробно-экспоненциальными функциями Ю.Н. Работнова [29].

При $\gamma \rightarrow 0$ выражения (3.30) и (3.31) принимают соответственно вид

$$\sigma(t) = E_\infty \left(1 - \frac{1}{2} \nu_\varepsilon \right) \varepsilon(t) \quad (3.34)$$

$$\varepsilon(t) = J_\infty \left(1 + \frac{1}{2} \nu_\sigma \right) \sigma(t) \quad (3.35)$$

Учитывая, что

$$1 - \nu_\varepsilon = E_0 E_\infty^{-1} = \tau_\varepsilon^\gamma \tau_\sigma^{-\gamma}, \quad 1 + \nu_\sigma = J_0 J_\infty^{-1} = \tau_\sigma^\gamma \tau_\varepsilon^{-\gamma} \quad (3.36)$$

из соотношений (3.34) и (3.35) имеем

$$\sigma(t) = \frac{1}{2} (E_\infty + E_0) \varepsilon(t) = E \varepsilon(t) \quad (3.37)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2} (J_\infty + J_0) \sigma(t) = J \sigma(t) \quad (3.38)$$

Как видно из формулы (3.27), если $\gamma = 0$, то $E = E_0 = E_\infty$ и $J = J_0 = J_\infty$, и следовательно, при $\gamma = 0$ модель стандартного линейного тела с дробными производными переходит в корректную модель чисто упругого тела.

На основании выражений (3.32) и (3.33) можно записать связь между резольвентными операторами

$$\frac{1}{1 - \nu_\varepsilon \mathfrak{D}_\gamma^*(\tau_\varepsilon^\gamma)} = 1 + \nu_\sigma \mathfrak{D}_\gamma^*(\tau_\sigma^\gamma) \quad (3.39)$$

которое является первым резольвентным тождеством Гильберта. Для того чтобы это показать, достаточно умножить выражение справа в (3.39) на знаменатель левого выражения, учесть теорему умножения операторов Работнова [93, 202]

$$\mathfrak{Z}_\gamma^*(\tau_\varepsilon^\gamma) \mathfrak{Z}_\gamma^*(\tau_\sigma^\gamma) = \frac{\tau_\varepsilon^\gamma \mathfrak{Z}_\gamma^*(\tau_\varepsilon^\gamma) - \tau_\sigma^\gamma \mathfrak{Z}_\gamma^*(\tau_\sigma^\gamma)}{\tau_\varepsilon^\gamma - \tau_\sigma^\gamma} \quad (3.40)$$

а также учесть формулы $\frac{\nu_\varepsilon \tau_\sigma^\gamma}{\tau_\sigma^\gamma - \tau_\varepsilon^\gamma} = \frac{\nu_\sigma \tau_\varepsilon^\gamma}{\tau_\sigma^\gamma - \tau_\varepsilon^\gamma} = 1$.

Уравнение (3.32) было записано Ю.Н. Работновым в 1948 году [29] с использованием размерного оператора дробного порядка

$$\sigma = \bar{E}\varepsilon, \quad \bar{E} = E_\infty[1 - \kappa \mathfrak{Z}_\gamma^*(\tau_\varepsilon^\gamma)] = E_\infty \left[1 - \nu_\varepsilon \tau_\varepsilon^{-\gamma} \frac{1}{\tau_\varepsilon^{-\gamma} + D^\gamma} \right], \quad \kappa = \frac{E_\infty - E_0}{E_\infty \tau_\varepsilon^\gamma} \quad (3.41)$$

причем в работе показано, что это уравнение соответствует модели стандартного линейного твердого тела.

В монографии [9] Ю.Н. Работнов критикует использование модели Масквелла для решения задач механики деформируемого твердого тела, которая легко получается из уравнения (3.41) при $E_0 = 0$ и, как следствие, $\kappa = \tau_\varepsilon^{-\gamma}$, и в своих исследованиях использовал только модель (3.41).

Однако А.М. Нахушев в своей монографии [12, § 5.2] пытался доказать, что модель Ю.Н. Работнова сводится к модели Максвелла с дробными производными, ошибочно полагая, что в уравнении (3.41) $\kappa = \tau_\varepsilon^{-\gamma}$, так и не поняв всей философии подхода Ю.Н. Работнова. Ошибочное суждение А.М. Нахушева [12] о построенной Ю.Н. Работновым модели стандартного линейного тела в виде соотношений Больцмана–Вольтерра (3.41) с размерным оператором дробного порядка (или уравнение (3.32) с безразмерным оператором дробного порядка) было продублировано в учебнике [77, п. 12.7.4] и монографии [78, § 1.3].

Эквивалентность интегральных соотношений Больцмана–Вольтерра с сингулярным ядром в виде дробно-экспоненциальной функции Работнова и дифференциальных уравнений дробного порядка, соответствующих моделям Кельвина–Фойгта, Максвелла и стандартного линейного тела, обсуждалась в работах [30, 31] и подробно рассмотрена в обзоре [95, п. 1.3].

В статьях И. Севостьянова с соавторами [205–207] отмечается взаимосвязь параметров интегральных соотношений с дробно-экспоненциальными функциями Работнова и коэффициентов модели стандартного линейного тела, изображенной на рис. 2,а. Однако в работах [205] и [207] приведена очень странная информация о том, что дробно-экспоненциальная функция Работнова (3.14) одновременно была предложена в работах Скотт–Блэра и Коппин (1939 [208], 1943 [209]). Но тщательный анализ показал, что ни в статьях [208, 209], ни в более поздней монографии Скотт–Блэра [210], опубликованной в 1969 году, функции (3.14) нет. Скотт–Блэр сам в [210] отмечает, что он не математик и не претендует на вывод каких-либо уравнений. Стиассни М. в своей статье приводит отрывок из письма Скотт–Блэра к нему [211], в котором Скотт–Блэр отмечает, что “он интуитивно привлек дробную производную от деформации по времени в соотношение между напряжением и деформацией, чтобы описать промежуточное состояние материала между упругим и жидким”. Таким образом, называть соотношения (3.32) и (3.33) моделью с ядром Скотт–Блэра–Работнова, как это сделано в [207], представляется совершенно некорректным.

В заключение этого параграфа заметим, что более сложные модели, включающие в себя несколько производных различных порядков и/или несколько времен релаксации (ретардации), рассмотрены в работах [99–102, 212–215].

Следует отметить, что для определения параметров, входящих в реологические модели с дробными производными, включая параметр дробности (порядок дробной производной γ), за последнее десятилетие было проведено достаточно большое количество численных и натурных экспериментов для широкого класса материалов. Обзор этих методов является предметом отдельной статьи, ограничимся перечислением работ, в которых получены наиболее значимые результаты [216–236].

3.3. *Использование моделей вязкоупругости с дробными производными для описания динамического поведения современных материалов.* Большинство опытов с вязкоупругими материалами проводятся на ползучесть, поэтому если реологическая модель записана в виде зависимости $\sigma(t)$ от $\varepsilon(t)$, то необходимо найти обратную связь, т.е. выразить $\varepsilon(t)$ через $\sigma(t)$. Эта связь позволит провести опыты на ползучесть и определить физические константы, которые входят в эти соотношения. Иначе говоря, нужно построить резольвентные операторы для каждой модели.

Хорошо известно [237, 238], что каждый изотропный упругий материал обладает только двумя независимыми константами, а все остальные выражаются через две, которые должны быть заданы или определены из экспериментов. Так, например, если известны модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν , тогда параметры Ламе λ и μ и объемный модуль K определяются следующим образом:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (3.42)$$

или в случае, когда известны модуль сдвига μ и объемный модуль K , остальные константы, E , ν и λ , находятся из соотношений

$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu}, \quad \nu = \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)}, \quad \lambda = \frac{3K - 2\mu}{3} \quad (3.43)$$

а при заданных параметрах Ламе λ и μ

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (3.44)$$

Точно также и в случае изотропных вязкоупругих сред, материальные свойства которых зависят от времени и описываются операторами, которые должны быть выражены через два наперед заданных (или определенных из экспериментов) оператора, используя принцип соответствия и соотношения (3.42), или (3.43), или (3.44).

Для описания таких вязкоупругих тел как балки, пластинки и оболочки наиболее часто используемыми моделями для оператора Юнга являются соотношения Кельвина–Фойгта с дробными производными (3.8), модель Максвелла с дробными производными (3.18) и модель стандартного линейного тела с дробными производными (3.26). При этом коэффициент Пуассона вязкоупругого материала считается постоянной величиной [97, 202].

Однако, как показывают экспериментальные данные [202, 239], коэффициент Пуассона вязкоупругого материала является зависящим от времени оператором ν [240–242], и только оператор объемного растяжения–сжатия K может приниматься за постоянную величину, поскольку для большинства вязкоупругих материалов он слабо меняется со временем [9, 10].

Однако модель Кельвина–Фойгта с независимым от времени коэффициентом Пуассона может использоваться только для описания динамического поведения упругих тел в вязкоупругой среде [96, 243, 244] или на вязкоупругом основании [245].

Подробный обзор “традиционных” моделей с дробными производными (“традиционными” в том смысле, что в этих моделях коэффициент Пуассона принимается постоянной величиной) приведен в [52, 95, 96].

Ниже будут рассмотрены модели с дробными производными, включающие зависящие от времени операторы Пуассона, что позволит выявить достаточно интересные свойства современных вязкоупругих материалов, в том числе ауксетичных материалов, которые обладают отрицательными коэффициентами Пуассона [246–250].

3.3.1. *Моделирование оператора Юнга E с помощью модели Кельвина–Фойгта с дробной производной без учета объемной релаксации.* Для того чтобы показать несостоятельность модели Кельвина–Фойгта, следуя [251], выберем оператор Юнга в виде

$$E = E_0[1 + (\tau_\sigma^E)^\gamma D^\gamma] \quad (3.45)$$

где τ_σ^E – время ретардации продольной деформации.

Будем считать оператор объемного расширения–сжатия K независимым от времени, тем самым пренебрегая объемной релаксацией (это предположение имеет место для вязкоупругих материалов, у которых объемная релаксация намного меньше, чем релаксация при сдвиге), т.е.

$$K = K_0 \quad (3.46)$$

откуда следует

$$\frac{E}{1 - 2\nu} = 3K_0 \quad (3.47)$$

где K_0 – некоторая константа.

Подставляя (3.45) в (3.47), находим оператор Пуассона

$$\tilde{\nu} = \nu_0 - \frac{E_0}{6K_0} (\tau_\sigma^E)^\gamma D^\gamma \quad (3.48)$$

или

$$\nu(t) = \tilde{\nu}H(t) = \nu_0 - \frac{E_0}{6K_0} (\tau_\sigma^E)^\gamma \frac{t^{-\gamma}}{\Gamma(1 - \gamma)} \quad (3.49)$$

откуда следует, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \nu H(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \nu H(t) = \nu_0 \quad (3.50)$$

где $\nu_0 = \frac{3K_0 - E_0}{6K_0}$.

Из соотношения (3.50) видно, что данная модель не имеет физического смысла, так как для реальных материалов нижнее предельное значение коэффициент Пуассона $\nu(0)$ не может принимать значение $-\infty$. Таким образом, данная модель неприемлема для реальных вязкоупругих материалов.

3.3.2. *Моделирование оператора сдвига μ с помощью модели Кельвин–Фойгта с дробной производной без учета объемной релаксации.* Наиболее часто оператор сдвига μ задается с помощью модели Кельвина–Фойгта с дробной производной

$$\mu = \mu_0[1 + (\tau_\sigma^\mu)^\gamma D^\gamma] \quad (3.51)$$

где μ_0 – релаксированный модуль сдвига, τ_σ^μ – время ретардации при сдвиге, при этом объемный модуль принимается постоянной величиной (3.46).

Для анализа динамического поведения вязкоупругих тел необходимо вычислить оператор Юнга. С этой целью, используя принцип соответствия Вольтерра, воспользуемся формулой

$$E = \frac{9K_0\mu}{3K_0 + \mu} \quad (3.52)$$

Сначала запишем оператор

$$3K_0 + \tilde{\mu} = (3K_0 + \mu_0)(1 + t_\sigma^\gamma D^\gamma) \quad (3.53)$$

где $t_\sigma^\gamma = \mu_0(\tau_\sigma^\mu)^\gamma(3K_0 + \mu_0)^{-1}$.

Затем найдем оператор, обратный к (3.53), т.е.,

$$(3K_0 + \tilde{\mu})^{-1} = \frac{1}{3K_0 + \mu_0} \frac{1}{1 + t_\sigma^\gamma D^\gamma} = (3K_0 + \mu_0)^{-1} \mathfrak{A}_\gamma^*(t_\sigma^\gamma) \quad (3.54)$$

Подставляя (3.51) и (3.54) в (3.52) и учитывая одну полезную формулу [250]

$$t_\sigma^\gamma D^\gamma \cdot \mathfrak{A}_\gamma^*(t_\sigma^\gamma) = \frac{t_\sigma^\gamma D^\gamma}{1 + t_\sigma^\gamma D^\gamma} = 1 - \mathfrak{A}_\gamma^*(t_\sigma^\gamma) \quad (3.55)$$

получим

$$E = 9K_0 \left[1 - \frac{E_0}{3\mu_0} \mathfrak{A}_\gamma^*(t_\sigma^\gamma) \right] \quad (3.56)$$

Теперь оператор Пуассона ν можно вычислить по формуле

$$\frac{E}{1 - 2\nu} = 3K_0 \quad (3.57)$$

Подставляя (3.56) в (3.57), находим

$$\tilde{\nu} = -1 + \frac{E_0}{2\mu_0} \mathfrak{A}_\gamma^*(t_\sigma^\gamma) \quad (3.58)$$

При изучении процесса релаксации, т.е. считая продольную деформацию в стержне постоянной, необходимо подействовать оператором E на единичную функцию Хевисайда $EH(t)$. Тогда с учетом соотношения

$$\int_0^\infty \mathfrak{A}_\gamma \left(-\frac{t-t'}{\tau_i} \right) H(t') dt' = 1 \quad (3.59)$$

получим

$$\lim_{t \rightarrow 0} EH(t) = 9K_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} EH(t) = \frac{9K_0\mu_0}{3K_0 + \mu_0} = E_0 \quad (3.60)$$

Для оператора $\tilde{\nu}H(t)$ имеем [251]

$$\lim_{t \rightarrow 0} \nu H(t) = -1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \nu H(t) = \frac{3K_0 - 2\mu_0}{2(3K_0 + \mu_0)} = \nu_0 \quad (3.61)$$

В соответствии с классической теорией упругости считается, что для традиционных материалов значение коэффициента Пуассона ν изменяется в интервале $0 < \nu \leq 0.5$. Однако, в знаменитом трактате А. Лява “Математическая теория упругости”, первое издание которого было опубликовано в Кембридже в 1892 году [237] (перевод на русский язык был сделан в 1935 году с 4-го английского издания), автор отмечает, что коэффициент Пуассона может находиться в пределах от -1 до 0.5 , обеспечивая тем самым неотрицательность модуля сдвига μ и модуля объемного сжатия K , замечая, что “отрицательные значения коэффициента ν по соображениям устойчивости не исключаются, но такие значения не были найдены ни для одного изотропного тела”.

В России в 1944 году Л.Д. Ландау и Е. Лифшиц [238] в учебнике “Механика сплошных сред” также отмечают, что “поскольку K и μ всегда положительны, то коэффициент Пуассона может меняться для различных веществ только в пределах от -1 (при $K = 0$) до 0.5 (при $\mu = 0$)”, далее замечая, что “в природе не известно тел, у которых было бы $\nu < 0$,

т.е. которые бы испытывали увеличение поперечных размеров при продольном растяжении... Хотя это и не является необходимым с точки зрения термодинамики”.

Однако, в последнее время был создан широкий спектр так называемых ауксетичных материалов [246–249], которые обладают такими необычными механическими свойствами, как отрицательный коэффициент Пуассона, при этом коэффициент Пуассона ν для изотропных ауксетиков может варьироваться в пределах интервала $-1 < \nu \leq 0.5$, а для анизотропных – и в более широком интервале [249].

Следовательно, модель (3.51) с $K = K_0 = \text{const}$ не противоречит законам термодинамики и может описывать поведение изотропных вязкоупругих ауксетиков, при этом коэффициент Пуассона изменяется от -1 до его релаксированного значения ν_0 .

3.3.3. *Моделирование оператора сдвига μ с помощью модели Максвелла.* Если для описания поведения вязкоупругих тел использовать модель Максвелла, тогда оператор сдвига μ может быть записан в виде

$$\mu = \mu_\infty \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma \cdot \mathfrak{A}_\gamma^*(\tau_\varepsilon^\gamma) \quad (3.62)$$

или с учетом уравнения (3.55) в виде

$$\mu = \mu_\infty [1 - \mathfrak{A}_\gamma^*(\tau_\varepsilon^\gamma)] \quad (3.63)$$

где μ_∞ – нерелаксированное значение модуля сдвига. При этом оператор объемного модуля считается постоянным, т.е.,

$$K = K_\infty \quad (3.64)$$

Используя процедуру, описанную для модели Кельвина–Фойгта, аналогичным образом получим для модели Максвелла

$$E = E_\infty [1 - \mathfrak{A}_\gamma^*(\tau_0^\gamma)] \quad (3.65)$$

$$\nu = \frac{1}{2} - \frac{E_\infty}{6K_\infty} [1 - \mathfrak{A}_\gamma^*(\tau_\varepsilon^\gamma)] \quad (3.66)$$

или

$$\nu = \nu_\infty + \frac{E_\infty}{6K_\infty} \mathfrak{A}_\gamma^*(\tau_\varepsilon^\gamma) \quad (3.67)$$

где

$$\nu_\infty = \frac{3K_\infty - \mu_\infty}{2(3K_\infty + \mu_\infty)}$$

Если рассмотреть процесс релаксации, тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0} EH(t) = E_\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} EH(t) = 0 \quad (3.68)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \nu H(t) = \nu_\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \nu H(t) = \frac{1}{2} \quad (3.69)$$

Из соотношений (3.69) видно, что в случае применения модели Максвелла с дробными производными коэффициент Пуассона изменяется от ν_∞ до его предельного значения 0.5, что означает, что данная модель пригодна для анализа вязкоупругих резиноподобных материалов.

3.3.4. *Моделирование оператора сдвига μ при помощи модели стандартного линейного тела с дробными производными.* Если применить модель стандартного линейного тела для описания вязкоупругих тел, тогда оператор сдвига μ имеет вид

$$\mu = \mu_0 \frac{1 + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma}{1 + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma} \quad (3.70)$$

или

$$\mu = \mu_0 \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\varepsilon^\gamma) + \mu_0 \frac{\tau_\sigma^\gamma}{\tau_\varepsilon^\gamma} \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma \cdot \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\varepsilon^\gamma) \quad (3.71)$$

Подставляя уравнение (3.55) в (3.71) и вводя обозначение

$$\mu_\infty = \mu_0 \frac{\tau_\sigma^\gamma}{\tau_\varepsilon^\gamma} \quad (3.72)$$

в результате получим [250]

$$\tilde{\mu} = \mu_\infty [1 - v_\mu^\varepsilon \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\varepsilon^\gamma)] \quad (3.73)$$

где $v_\mu^\varepsilon = (\mu_\infty - \mu_0)\mu_\infty^{-1}$, при этом оператор K определяется формулой (3.64).

Таким образом, для данной модели имеем

$$E = E_\infty \left[1 - M_\sigma \frac{3K_\infty}{\mu_\infty} \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\sigma^\gamma) \right] \quad (3.74)$$

$$v = v_\infty + \frac{E_\infty M_\sigma}{2\mu_\infty} \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\sigma^\gamma) \quad (3.75)$$

где

$$M_\sigma \frac{3K_\infty}{\mu_\infty} = \frac{1 - \mu_0 \mu_\infty^{-1}}{1 + \mu_0(3K_\infty)^{-1}} < 1, \quad \frac{E_\infty M_\sigma}{2\mu_\infty} = \frac{1}{2K_\infty(1 + \mu_\infty/3K_\infty)(1 + \mu_0/3K_\infty)} < 1$$

Из соотношений (3.73)–(3.75) видно, что модель стандартного линейного тела с дробными производными не только хорошо подходит для описания поведения традиционных вязкоупругих материалов [250], но и для рассмотрения изменения микроструктуры вязкоупругого материала в результате внешнего механического ударного воздействия [221].

3.3.5. Модель Скотт–Блэра для релаксации сдвига. Некоторые авторы предпочитают использовать простейшую модель, т.е. элемент Скотт–Блэра, для моделирования оператора сдвига

$$\mu = \mu \tau^\gamma D^\gamma \quad (3.76)$$

и предполагать отсутствие объемной релаксации, т.е. считать $K = K = \text{const}$.

В этом случае

$$3K + \mu = 3K + \mu \tau^\gamma D^\gamma = 3K \left(1 + \frac{\mu}{3K} \tau^\gamma D^\gamma \right) = 3K(1 + T^\gamma D^\gamma) \quad (3.77)$$

где $T^\gamma = \frac{\mu}{3K} \tau^\gamma$.

Тогда с учетом формулы (3.10), вязкоупругий оператор Пуассона имеет вид

$$v = \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)} = (3K - 2\mu \tau^\gamma D^\gamma) \frac{1}{6K} \mathfrak{E}_\gamma^*(T^\gamma) = -1 + \frac{3}{2} \mathfrak{E}_\gamma^*(T^\gamma) \quad (3.78)$$

откуда следует, что

$$v(t) = vH(t) = -H(t) + \frac{3}{2} \mathfrak{E}_\gamma^*(T^\gamma) H(t) \quad (3.79)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} vH(t) = -1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} vH(t) = \frac{1}{2} \quad (3.80)$$

Из соотношений (3.80) видно, что в соответствии с данной моделью коэффициент Пуассона может изменяться в широком диапазоне: от -1 до 0.5 .

3.3.6. *Модели, учитывающие объемную релаксацию.* Учет объемной релаксации приводит к усложнению вычислений [203, 250, 251]. Так, если заданы операторы E и μ в соответствии с уравнениями (3.45) и (3.51), тогда сначала надо найти оператор K^{-1} , используя соотношение

$$J = E^{-1} = \frac{3K + \mu}{9K\mu} = \frac{1}{3}\mu^{-1} + \frac{1}{9}K^{-1} \quad (3.81)$$

откуда следует, что

$$K^{-1} = 9E^{-1} - 3\mu^{-1} = a_1 \mathfrak{D}_\gamma^*(\tau_\sigma^E)^\gamma - a_2 \mathfrak{D}_\gamma^*(\tau_\sigma^\mu)^\gamma \quad (3.82)$$

где $a_1 = 9E_0^{-1}$ и $a_2 = 3\mu_0^{-1}$.

Теперь можно вычислить отношение операторов (3.45) и (3.82)

$$\frac{E}{K} = E_0[1 + (\tau_\sigma^E)^\gamma D^\gamma][a_1 \mathfrak{D}_\gamma^*(\tau_\sigma^E)^\gamma - a_2 \mathfrak{D}_\gamma^*(\tau_\sigma^\mu)^\gamma]$$

или

$$\frac{E}{K} = E_0 \left[a_1 - a_2 \left(\frac{\tau_\sigma^E}{\tau_\sigma^\mu} \right)^\gamma \right] - E_0 a_2 \left[1 - \left(\frac{\tau_\sigma^E}{\tau_\sigma^\mu} \right)^\gamma \right] \mathfrak{D}_\gamma^*(\tau_\sigma^\mu)^\gamma \quad (3.83)$$

Вычисляя оператор v по формуле

$$\frac{E}{K} = 3(1 - 2v) \quad (3.84)$$

с учетом (3.83), получим

$$v = \frac{1}{2} - \frac{E_0}{6} \left[a_1 - a_2 \left(\frac{\tau_\sigma^E}{\tau_\sigma^\mu} \right)^\gamma \right] + \frac{E_0}{6} a_2 \left[1 - \left(\frac{\tau_\sigma^E}{\tau_\sigma^\mu} \right)^\gamma \right] \mathfrak{D}_\gamma^*(\tau_\sigma^\mu)^\gamma \quad (3.85)$$

Учитывая произведение $v(t) = \tilde{v} \cdot H(t)$, находим

$$v(0) = \frac{1}{2} - \frac{E_0}{6} \left[a_1 - a_2 \left(\frac{\tau_\sigma^E}{\tau_\sigma^\mu} \right)^\gamma \right] = -1 + \frac{E_0}{2\mu_0} \left(\frac{\tau_\sigma^E}{\tau_\sigma^\mu} \right)^\gamma \quad (3.86)$$

$$v(\infty) = \frac{1}{2} + \frac{E_0}{6} (a_2 - a_1) = -1 + \frac{E_0}{2\mu_0} = v_0 \quad (3.87)$$

Из соотношения (3.86) видно, что нижний предел значения коэффициента Пуассона $v(0)$ зависит от отношения двух времен ретардации и параметра дробности γ , в отличие от модели Кельвина–Фойгта без учета объемной релаксации, для которой $v(0) = -1$ в соответствии с (3.61).

Однако заметим, что когда $\left(\frac{\tau_\sigma^E}{\tau_\sigma^\mu} \right)^\gamma \rightarrow 0$, то из (3.86) следует, что $v(0) \rightarrow -1$. Это означает, что рассматриваемая модель может использоваться для моделирования ауксетичных мате-

Таблица 2. Предельные значения коэффициента Пуассона $\nu(t) = \nu \cdot H(t)$ для материалов, вязкоупругие свойства которых описываются различными моделями с дробными операторами

Тип модели с дробной производной	$\nu(t) _{t \rightarrow 0}$	$\nu(t) _{t \rightarrow \infty}$
1) модель Кельвина–Фойгта $E = E_0[1 + (\tau_\sigma^E)^\gamma D^\gamma], K = K_0 = \text{const } \nu = \nu_0 - \frac{E_0}{2K_0} (\tau_\sigma^E)^\gamma D^\gamma$	$-\infty$	ν_0
2) модель Скотт–Блэра $\mu = \mu \tau^\gamma D^\gamma, K = K = \text{const } \nu = -1 + \frac{3}{2} \mathfrak{E}_\gamma^*(T^\gamma)$	-1	$\frac{1}{2}$
3) модель Кельвина–Фойгта $\mu = \mu_0[1 + (\tau_\sigma^\mu)^\gamma D^\gamma], K = K_0 = \text{const } \nu = -1 + \frac{E_0}{2\mu_0} \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\sigma^\mu)^\gamma$	-1	ν_0
4) модель Максвелла $\mu = \mu_\infty[1 - \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\epsilon^\gamma)], K = K_\infty = \text{const } \nu = \nu_\infty + \frac{E_\infty}{6K_\infty} \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\epsilon^\gamma)$	ν_∞	$\frac{1}{2}$
5) модель стандартного линейного тела $\mu = \mu_0 \frac{1 + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma}{1 + \tau_\epsilon^\gamma D^\gamma}, K = K_\infty = \text{const}, \nu = \nu_\infty + \frac{E_\infty M_\sigma}{2\mu_\infty} \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\sigma^\gamma)$	ν_∞	ν_0
6) модель Кельвина–Фойгта с учетом объемной релаксации $E = E_0[1 + (\tau_\sigma^E)^\gamma D^\gamma], \mu = \mu_0[1 + (\tau_\sigma^\mu)^\gamma D^\gamma],$ $\nu = \frac{1}{2} - \frac{E_0}{6} \left[a_1 - a_2 \left(\frac{\tau_\sigma^E}{\tau_\sigma^\mu} \right)^\gamma \right] + \frac{E_0}{6} a_2 \left[1 - \left(\frac{\tau_\sigma^E}{\tau_\sigma^\mu} \right)^\gamma \right] \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\sigma^\mu)^\gamma$	$-1 + \frac{E_0}{2\mu_0} \left(\frac{\tau_\sigma^E}{\tau_\sigma^\mu} \right)^\gamma$	ν_0
7) модель Кельвина–Фойгта с учетом объемной релаксации $\mu = \mu_0[1 + (\tau_\sigma^\mu)^\gamma D^\gamma], K = K_0[1 + (\tau_\sigma^K)^\gamma D^\gamma],$ $\nu = -1 + \frac{9K_0}{6K_0 + 2\mu_0} \mathfrak{E}_\gamma^*(T^\gamma)$	-1	ν_0
8) модель Максвелла с учетом объемной релаксации $\mu = \mu_\infty[1 - \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\epsilon^{\mu\gamma})], K = K_\infty[1 - \mathfrak{E}_\gamma^*(\tau_\epsilon^{K\gamma})],$ $\nu = \frac{1}{2} - \frac{E_\infty}{6K_\infty} \left\{ 1 + \left[\frac{T_1^\gamma}{(\tau_\epsilon^K)^\gamma} - 1 \right] \mathfrak{E}_\gamma^*(T_1^\gamma) \right\}$	ν_∞	-1
9) модель стандартного линейного тела с учетом объемной релаксации $\mu = \mu_0 \frac{1 + (\tau_\sigma^\mu)^\gamma D^\gamma}{1 + (\tau_\epsilon^\mu)^\gamma D^\gamma}, \lambda = \lambda_0 \frac{1 + (\tau_\sigma^\lambda)^\gamma D^\gamma}{1 + (\tau_\epsilon^\lambda)^\gamma D^\gamma},$ $\nu = \nu_\infty[1 + M_1 \mathfrak{E}_\gamma^*(T_1^\gamma) + M_2 \mathfrak{E}_\gamma^*(T_2^\gamma)]$	ν_∞	ν_0

риалов до тех пор, пока $\left(\frac{\tau_\sigma^E}{\tau_\sigma^\mu} \right)^\gamma \rightarrow \frac{2\mu_0}{E_0}$, т.е. $\nu(0) \rightarrow 0$. Для величин $\left(\frac{\tau_\sigma^E}{\tau_\sigma^\mu} \right)^\gamma \geq \frac{2\mu_0}{E_0}$, $\nu(0) \geq 0$,

что соответствует традиционным вязкоупругим материалам.

Аналогично можно рассмотреть модели с другим сочетанием заданных операторов. В табл. 2 приведены различные модели с дробными производными и соответствующие им предельные значения коэффициентов Пуассона. Так, например, если оператор сдвига задать с помощью модели Максвелла, тогда коэффициент Пуассона меняется от своего не-

релаксированного значения $v(0) = v_\infty$ до $v(\infty) = -1$ (модель 8 в табл. 2). Другими словами, материал может с течением времени приобретать ауксетичные свойства.

4. Заключение. Данная работа посвящена анализу научных исследований, касающихся приложений дробного исчисления (исчисления дробного порядка) в моделях вязкоупругости, которые используются в динамических задачах механики деформируемого твердого тела. Дан анализ различных моделей вязкоупругости, построенных с использованием производных дробного порядка, без учета и с учетом объемной релаксации. Показано, что модели, в которых оператор Пуассона зависит от времени, позволяют описать свойства вязкоупругих ауксетиков, то есть материалов с отрицательными коэффициентами Пуассона. В следующей обзорной статье будет приведен анализ краевых динамических задач с использованием реологических моделей, рассмотренных в данной работе.

Благодарности. Автор выражает благодарность всем своим соавторам, которые принимали участие в работах, перечисленных в списке литературы, и прежде всего Заслуженному деятелю науки Российской Федерации, профессору Россихину Ю.А., который в девяностые годы прошлого столетия ввел меня в загадочный мир дробного исчисления и показал его необычные возможности при решении разнообразных динамических задач вязкоупругости. Он без всякого сомнения является и соавтором данной обзорной работы.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-11-50211_Экспансия, конкурса поддержки для подготовки и издания научных обзорных статей. Обзор содержит результаты исследований, проведенных за последние десять лет при финансовой поддержке РФФИ, проекты № 10-01-92004-ННС, 14-08-92008-ННС, 17-01-00490, 20-01-00443, 20-51-00008_Бел_а, 20-31-70035_Стабильность, а также при выполнении государственного задания в сфере науки Министерства науки и образования РФ, проекты № 0706-2020-0024, FZGM-2020-0007.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с. = *Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional Integrals and Derivatives and Some of Their Applications. Gordon & Breach Sci. Publishers, 1993.*
2. Ситник С.М., Шишкина Э.Л. О двух классах операторов обобщенного дробного интегро-дифференцирования (с коротким историческим обзором) // Итоги науки. 2020. = *Shishkina E.L., Sitnik S.M. On two classes of generalized fractional operators (with short historical survey of fractional calculus) // arXiv:2006.09893. 31 p. (English annotation, Russian text).*
3. *Debnath L. A brief historical introduction to fractional calculus // Int. J. Math. Educ. Sci. Tech. 2004. P. 35. № 4. P. 487–501.*
4. *Rogosin S., Dubatovskaya M. Letnikov vs. Marchaud: A survey on two prominent constructions of fractional derivatives // Mathematics. 2018. V. 6. № 1. PaperID 3.*
5. *Valério D., Machado J.T., Kiryakova V. Some pioneers of the applications of fractional calculus // Fract. Calc. Appl. Anal. 2014. V. 17. № 2. P. 552–578.*
6. *Capelas de Oliveira E. A bit of history / Chapter 1 in “Solved Exercises in Fractional Calculus” // Book Series: Studies in Systems, Decision and Control. V. 240. P. 1–15. Berlin: Springer, 2019.*
7. *Shishkina E., Sitnik S. Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics. London: Academic Press, 2020. 592 p.*
8. *Ржаницын А.Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М.: Гостехиздат, 1949.*
9. *Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с. (2-изд. М.: Наука, 2014). = Rabotnov Yu.N. Creep Problems in Structural Members. Amsterdam: North-Holland, 1969.*
10. *Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с. = Rabotnov Yu.A. Elements of Hereditary Solid Mechanics. Moscow: Nauka, 1980.*

11. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of their Solution and some of their Applications. London: Academic Press, 1999. 340 p.
12. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
13. *Diethelm K.* The Analysis of Fractional Differential Equations. An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. Heidelberg: Springer, 2004. 247 p.
14. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 2006.
15. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с. = *Uchaikin V.V.* Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Springer, 2013. V. 1, 2.
16. *Mainardi F.* Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models. London: Imperial College Press, 2010. 314 p.
17. *Ortigueira M.D.* Fractional Calculus for Scientists and Engineers. Heidelberg: Springer, 2011. 152 p.
18. *Herrmann R.* Fractional Calculus. An Introduction for Physicists. Singapore: World Scientific, 2011. 261 p.
19. *Тарасов В.Е.* Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. М.–Ижевск: ПХД, 2011. 568 с. = *Tarasov V.E.* Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. Berlin: Springer, 2010.
20. *Atanacković T.M., Pilipović S., Stanković B., Zorica D.* Fractional Calculus with Applications in Mechanics: Wave Propagation, Impact and Variational Principles. London: Wiley, 2014. 406 p.
21. *Gorenflo R., Mainardi F., Rogosin S.* Mittag-Leffler function: properties and applications. De Gruyter, 2019.
22. *Machado J.T., Kiryakova V., Mainardi F.* Recent history of fractional calculus // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2011. V. 16. P. 1140–1153.
23. *Sun H.G., Zhang Y., Baleanu D., Chen W., Chen Y.Q.* A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2018. V. 64. P. 213–231.
24. *Abel N.H.* Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies // Gesammelte Mathematische Werke. 1881. V. 1. P. 10–27.
25. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Classical beams and plates in a fractional derivative medium, Impact response // Encyclopedia of Continuum Mechanics. Berlin: Springer, 2020. V. 1. P. 294–305.
26. *Gemant A.* A method for analyzing experimental results obtained from elasto-viscous bodies // Phys. 1936. V. 7. P. 311–317.
27. *Scott Blair G.W.* Analytical and integrative aspects of the stress-strain-time problem // J. Sci. Instrum. 1944. V. 21. № 5. P. 80–84.
28. *Герасимов А.Н.* Обобщение линейных законов деформирования и его применение к задачам внутреннего трения // ПММ. 1948. Т. 12. Вып. 3. С. 251–260.
29. *Работнов Ю.Н.* Равновесие упругой среды с последствием // ПММ. 1948. Т. 12. Вып. 1. С. 53–62. = Equilibrium of an elastic medium with after-effect // Fract. Calculus Appl. Anal. 2014. V. 17. № 3. P. 684–696.
30. *Шермергор Д.Т.* Об использовании операторов дробного дифференцирования для описания упруго-наследственных свойств материалов // ПМТФ. 1966. № 6. С. 118–121. = *Shermergor D.T.* On the use of fractional differentiation operators for the description of elastic-aftereffect properties of materials // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1966. V. 7. № 6. P. 85–87.
31. *Мешков С.И.* Описание внутреннего трения в наследственной теории упругости при помощи ядер, имеющих слабую сингулярность // ПМТФ. 1967. № 4. С. 147–151. = *Meshkov S.I.* Description of internal friction in the memory theory of elasticity using kernels with a weak singularity // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1967. V. 8. № 4. P. 100–102.
32. *Rossikhin Yu.A.* Reflections on two parallel ways in progress of fractional calculus in mechanics of solids // Appl. Mech. Rev. 2010. V. 63. № 1. Paper ID 010701.
33. *Watanabe S.* An approach to visco-elastic behaviors with a mathematical method // Journal of the Textile Machinery Society of Japan. 1959. V. 5. Issue 2. P. 10–13.
34. *Caputo M.* Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent // Annali di Geophisica. 1966. V. 19. P. 383–393.

35. *Caputo M.* Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent – II // *Geophys. J. R. Astron. Soc.* 1967. V. 15. № 5. P. 529–539.
36. *Caputo M., Mainardi F.* A new dissipation model based on memory mechanism // *Pure Appl. Geophys.* 1971. V. 91. № 1. P. 134–147.
37. *Caputo M., Mainardi F.* Linear models of dissipation in anelastic solids // *Riv. Nuovo Cimento.* 1971. V. 1. № 2. P. 161–198.
38. *Вульфсон С.З.* Температурные напряжения в бетонных массивах с учетом ползучести бетона // *Изв. АН СССР. Механика.* 1960. № 1. С. 162–165.
39. *Слонимский Г.Л.* О законах деформации высокоэластичных полимерных тел // *ДАН СССР.* 1961. Т. 140. № 2. = *Slonimsky G.L.* Laws of mechanical relaxation processes in polymers // *Journal of Polymer Science: Part C.* 1967. № 16. P. 1667–1672.
40. *Мешков С.И., Россихин Ю.А.* О температурной зависимости коэффициентов затухания динамической системы с сингулярным ядром наследственности // *ИФЖ.* 1971. Т. 21. № 2. С. 377 = *Meshkov S.I., Rossikhin Yu.A.* Temperature dependence of the damping coefficients for a dynamical system with a singular kernel // *J. Eng. Phys. Thermophys.* 1971. V. 21. № 2. P. 1090.
41. *Мешков С.И., Россихин Ю.А.* О распространении звуковых волн в наследственно упругой среде // *ПМТФ.* 1968. № 5. С. 89–93 = *Meshkov S.I., Rossikhin Yu.A.* Propagation of acoustic waves in a hereditarily elastic medium // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 1968. V. 9. № 5. P. 589–592.
42. *Мешков С.И., Пачевская Г.Н., Постников В.С.* Поведение материала при большой интенсивности диссипативных процессов // *Физика и химия обработки материалов.* 1967. № 2. С. 135–137.
43. *Розовский М.И., Синайский С.Е.* Колебания осциллятора, обладающего наследственной ползучестью // *ПММ.* 1966. Т. 30. № 3. С. 584–589 = *Rozovskii M.I., Sinaiskii S.E.* Vibrations of an oscillator with residual creep // *J. Appl. Math. Mech.* 1967. V. 30. № 3. P. 696–703.
44. *Россихин Ю.А.* Динамические задачи линейной вязкоупругости, связанные с исследованием ретардационно-релаксационных спектров. Дисс. канд-та физ.-мат. наук. Воронеж, 1970. 124 с.
45. *Зеленев В.М., Мешков С.И., Россихин Ю.А.* Затухающие колебания упруго-наследственных систем со слабо-сингулярными ядрами // *ПМТФ.* 1970. № 2. С. 104–108. = *Zelenev V.M., Meshkov S.I., Rossikhin Yu.A.* Damped vibrations of hereditary-elastic systems with weakly singular kernels // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 1970. V. 11. № 2. P. 290–293.
46. *Зеленев В.М., Мешков С.И., Россихин Ю.А.* О влиянии параметра сингулярности $\mathcal{E}_\gamma$ -функции на затухающие колебания наследственно-упругих систем // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1970. № 3. С. 115–117. = *Zelenev V.M., Meshkov S.I., Rossikhin Yu.A.* Effect of the $\mathcal{E}_\gamma$ -function singularity parameters on the damped vibrations of elastic systems with aftereffect // *Mech. Solids.* 1970. V. 5. № 3. P. 92–94.
47. *Meshkov S.I., Pachevskaja G.N., Postnikov V.S., Rossikhin Yu.A.* Integral representation of $\mathcal{E}_\gamma$ -functions and their application to problems in linear viscoelasticity // *Int. J. Eng. Sci.* 1971. V. 9. P. 387–398.
48. *Гонсовский В.Л., Мешков С.И., Россихин Ю.А.* Удар вязкоупругого стержня о жесткую преграду // *Прикл. мех.* 1972. Т. 8. № 10. С. 71–76 = *Gonsovskii V.L., Meshkov S.I., Rossikhin Yu.A.* Impact of a viscoelastic rod onto a rigid target // *Sov. Appl. Mech.* 1972. V. 8. № 10. P. 1109–1113.
49. *Гонсовский В.Л., Россихин Ю.А.* О распространении импульсивной нагрузки в вязкоупругой среде // *Труды научно-исслед. ин-та математики ВГУ. Воронеж: ВГУ, 1972. Вып. 6.* С. 63–66.
50. *Гонсовский В.Л., Россихин Ю.А.* О волнах напряжений в вязкоупругой среде с сингулярным ядром наследственности // *ПМТФ.* 1973. № 4. С. 184–186 = *Gonsovskii V.L., Rossikhin Yu.A.* Stress waves in a viscoelastic medium with a singular hereditary kernel // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 1973. V. 14. № 4. P. 595–597.
51. *Белов М.А., Богданович А.Е.* Численное обращение преобразования Лапласа методом асимптотического расширения интервала в динамических задачах вязкоупругости // *Мех. полимеров.* 1976. № 5. С. 864–870 = *Belov M.A., Bogdanovich A.E.* Numerical inversion of Laplace transform by the method of asymptotic extension of the interval in dynamic viscoelasticity problems // *Mech. Compos. Mater.* 1976. V. 12. № 5. P. 762–768.
52. *Mainardi F., Spada G.* Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology // *Eur. Phys. J. Special Topics.* 2011. V. 193. P. 133–160.

53. Rogosin S., Mainardi F. George William Scott Blair — the pioneer of fractional calculus in rheology // Communications in Applied and Industrial Mathematics. 2014. V. 6. № 1 -e681. 20 p.
54. Łabędzki P., Pawlikowski R., Radowicz A. On fractional forced oscillator // AIP Conf. Proc. 2019. V. 2077, PaperID 020036.
55. Bahraini S.M.S., Eghtesad M., Farid M., Ghavanloo E. Large deflection of viscoelastic beams using fractional derivative model // J. Mech. Sci. Technol. 2013. V. 27. № 4. P. 1063–1070.
56. Bouzidi S., Bechir H., Brémand F. Phenomenological isotropic visco-hyperelasticity: a differential model based on fractional derivatives // J. Eng. Math. 2016. V. 99. P. 1–28.
57. Freundlich J. Vibrations of a simply supported beam with a fractional derivative order viscoelastic material model — supports movement excitation // AIP Conf. Proc. 2012. V. 1493. P. 383–388.
58. Freundlich J. Vibrations of a simply supported beam with a fractional derivative viscoelastic material model — supports movement excitation // Shock Vibr. 2013. V. 20. P. 1103–1112.
59. Galucio A.C., Deü J.F., Ohayon R. Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators // Comput. Mech. 2004. V. 33. P. 282–291.
60. Cortés F., Elejabarrieta M.J. Homogenised finite element for transient dynamic analysis of unconstrained layer damping beams involving fractional derivative models // Comput. Mech. 2007. V. 40. P. 313–324.
61. Freundlich J. Transient vibrations of a fractional Kelvin–Voigt viscoelastic cantilever beam with a tip mass and subjected to a base excitation // J. Sound Vibr. 2019. V. 438. P. 99–115.
62. Freundlich J. Dynamic response of a simply supported viscoelastic beam of a fractional derivative type to a moving force load // J. Theor. Appl. Mech. 2016. V. 54. № 4. P. 1433–1445.
63. Liu Q.X., Liu J.K., Chen Y.M. A second-order scheme for nonlinear fractional oscillators based on Newmark- β algorithm // ASME J. Comput. Nonlinear Dyn. 2018. V. 13. PaperID 084501.
64. Bagley R., Torvik P.J. A generalized derivative model for an elastomer damper // Shock Vibr. Bul. 1979. V. 49. № 2. P. 135–143.
65. Bagley R.L., Torvik P.J. Fractional calculus — a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures // AIAA J. 1983. V. 21. P. 741–748.
66. Учайкин В.В. Дробно-дифференциальная модель динамической памяти // Вестник РФ-ФИ. 2007. 14 с. http://rfbr.ru/rffi/ru/journal/o_14984
67. Огородников Е.Н., Яшагин Н.С. Вынужденные колебания дробных осцилляторов // Матем. моделирование и краев. задачи. 2008. Ч. 1. С. 215–221.
68. Огородников Е.Н., Радченко В.П., Яшагин Н.С. Реологические модели вязкоупругого тела с памятью и дифференциальные уравнения дробных осцилляторов // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Серия: физ.-мат. науки. 2011. № 1. С. 255–268.
69. Огородников Е.Н., Радченко В.П., Унгарова Л.Г. Математические модели нелинейной вязкоупругости с операторами дробного интегро-дифференцирования // Вестник Пермского нац. исслед. политех. ун-та. Механика. 2018. № 3. С. 147–161.
70. Огородников Е.Н. Об одном классе дробных дифференциальных уравнений математических моделей динамических систем с памятью // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Серия: физ.-мат. науки. 2013. № 1. С. 245–252.
71. Огородников Е.Н., Радченко В.П., Унгарова Л.Г. Математическое моделирование наследственно упругого деформируемого тела на основе структурных моделей и аппарата дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Серия: физ.-мат. науки. 2016. Т. 20. № 1. С. 167–194.
72. Zvyagin V., Orlov V. On strong solutions of fractional nonlinear viscoelastic model of Voigt type // Math. Methods Appl. Sci. V. 44. P. 11768–11782 (2021). <https://doi.org/10.1002/mma.6359>
73. Zvyagin V., Orlov V. Weak solvability of fractional Voigt model of viscoelasticity // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2018. V. 38. № 12. P. 6327–6350.
74. Звягин В.Г., Орлов В.П. О разрешимости начально-краевой задачи для одной модели вязкоупругости с дробными производными // Сиб. мат. жур. 2018. Т. 59. № 6. С. 1351–1369.
75. Псху А.В., Рехвиашвили С.Ш. Анализ вынужденных колебаний дробного осциллятора // Письма в ЖТФ. 2019. Т. 45. Вып. 1. С. 34–37.
76. Учайкин В.В. Механика. Основы механики сплошных сред. СПб.: Издательство “Лань”, 2018. 860 с.

77. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
78. Gross B. On creep and relaxation // J. Appl. Phys. 1947. V. 2. № 2. P. 212–221.
79. Smit W., de Vries H. Rheological models containing fractional derivatives // Rheol. Acta. 1970. V. 9. P. 525–534.
80. Buchen P.W., Mainardi F. Asymptotic expansions for transient viscoelastic waves // J. de Mécanique. 1975. V. 14. № 4. P. 597–608.
81. Caputo M. Vibrations of an infinite viscoelastic layer with a dissipative memory // J. Acoust. Soc. Am. 1974. V. 56. P. 897–904.
82. Caputo M. Vibrations of an infinite plate with a frequency independent Q // J. Acoust. Soc. Am. V. 1976. V. 60. P. 634–639.
83. Bland D.R. The Theory of Linear Viscoelasticity. New York: Pergamon Press, 1960 = Бленд Д. Теория линейной вязкоупругости. М.: Мир, 1965. 199 с.
84. Новоженова О.Г. Советские пионеры дробного интегро-дифференцирования. I. А.Н. Герасимов. Биография // Тез. докл. 2-й межд. конф. “Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций”. М.: Столица, 2016. С. 110–111.
85. Новоженова О.Г. Советские пионеры дробного интегро-дифференцирования. II. М.И. Розовский. Обзор работ // Тез. докл. 2-й межд. конф. “Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций”. М.: Столица, 2016. С. 113–115.
86. Новоженова О.Г. Советские пионеры дробного интегро-дифференцирования. III. Д.Т. Шермергор. Об асимметрии релаксационного спектра // Тез. докл. 4-й межд. конф. “Живучесть и конструкционное материаловедение”. М.: Изд-во Института компьютерных исследований, 2018. С. 190–192.
87. Новоженова О.Г. Биография и научные труды А.Н. Герасимова. О линейных операторах, упруго-вязкости, элевтерозе и дробных производных. М.: “Перо”, 2018. 235 с.
88. Novozhenova O.G. Life and science of Alexey Gerasimov, one of the pioneers of fractional calculus in Soviet Union // Fract. Calc. Appl. Anal. 2017. V. 20. № 3. P. 790–809.
89. Novozhenova O.G. Soviet pioneers of fractional calculus and its applications. II. Moses Rozovskiy // Int. J. Appl. Math. 2018. V. 31. № 3. P. 325–332.
90. Новоженова О.Г. Описание асимметричных релаксационных спектров вязкоупругих материалов и диэлектриков // Мех. композит. мат. 2019. Т. 55. № 6. С. 1185–1202. = Novozhenova O.G. Describing the asymmetric relaxation spectra of viscoelastic materials and dielectrics // Mech. Comp. Mat. 2020. V. 55. № 6. P. 819–832.
91. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. The simplest models of viscoelasticity involving fractional derivatives and their connectedness with the Rabotnov fractional order operators // Int. J. Mech. 2014. V. 8. № 1. P. 62–72.
92. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Centennial jubilee of Academician Rabotnov and contemporary handling of his fractional operator // Fract. Calculus Appl. Anal. 2014. V. 17. № 3. P. 674–683.
93. Rogosin S., Dubatovskaya M. Mkhitar Djrbashian and his contribution to Fractional Calculus // Fract. Calculus Appl. Anal. 2020. V. 23, Issue 6. P. 1797–1809.
94. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids // Appl. Mech. Rev. 1997. V. 50. № 1. P. 15–67.
95. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: Novel trends and recent results // Appl. Mech. Rev. 2010. V. 63. № 1. Paper ID 010801.
96. Schiessel H., Metzler R., Blumen A., Nonnenmacher T.F. Generalized viscoelastic models: their fractional equations with solutions // J. Phys. A: Math Gen. 1995. V. 28. P. 6567–6584.
97. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Analysis of dynamic behaviour of viscoelastic rods whose rheological models contain fractional derivatives of two different orders // ZAMM. 2001. V. 81. № 6. P. 363–376.
98. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Analysis of the viscoelastic rod dynamics via models involving fractional derivatives or operators of two different orders // The Shock Vibr. Digest. 2004. V. 36. № 1. P. 3–26.
99. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Comparative analysis of visco-elastic models involving fractional derivatives of different orders // Fract. Calculus Appl. Anal. 2007. V. 10. № 2. P. 111–121.

100. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Free damped vibrations of a viscoelastic oscillator based on Rabotnov's model // *Mech. Time-Dependent Mat.* 2008. V. 12. № 2. P. 129–149.
101. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V., Shcheglova T.A.* Analysis of free vibrations of a viscoelastic oscillator via the models involving several fractional parameters and relaxation/retardation times // *Comp. Math. Appl.* 2010. V. 59. № 5. P. 1727–1744.
102. *Samko S.* Fractional integration and differentiation of variable order: an overview // *Nonlinear Dyn.* 2013. V. 71. P. 653–662.
103. *Patnaik S., Hollkamp J.P., Semperlotti F.* Applications of variable-order fractional operators: a review // *Proc. R. Soc. A.* 2019. V. 476. PaperID 0498.
104. *Povstenko Yu.* Fractional calculus in thermoelasticity // *Encyclopedia of Continuum Mechanics.* Berlin: Springer, 2020. V. 2. P. 953–961.
105. *Bosiakov S.* Fractional calculus in biomechanics // *Encyclopedia of Continuum Mechanics.* Berlin: Springer, 2020. V. 2. P. 946–953.
106. *Kaminsky A.A., Selivanov M.F., Chornoivan Yu.O.* Fractional-order operators in fracture mechanics // *Encyclopedia of Continuum Mechanics.* Berlin: Springer, 2020. V. 2. P. 982–989.
107. *Учайкин В.В.* Дробно-дифференциальные модели в гидромеханике // *Известия вузов. ПНД.* 2019. Т. 27. Вып. 1. С. 5–40.
108. *Diethelm K.* Numerical methods for the fractional differential equations of viscoelasticity // *Encyclopedia of Continuum Mechanics.* Berlin: Springer, 2020. V. 3. P. 1927–1938.
109. *Baleanu D., Diethelm K., Scalas E., Trujillo J.J.* Fractional calculus: models and numerical methods. 2nd ed. Singapore: World Scientific, 2017. 400 p.
110. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Vibrations of suspension bridges, Fractional derivative model // *Encyclopedia of Continuum Mechanics.* Berlin: Springer, 2020. V. 3. P. 2688–2696.
111. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Collision of two spherical shells, Fractional operator models // *Encyclopedia of Continuum Mechanics.* Berlin: Springer, 2020. V. 1. P. 324–332.
112. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Thin bodies embedded in fractional derivative viscoelastic medium, Dynamic response // *Encyclopedia of Continuum Mechanics.* Berlin: Springer, 2020. V. 3. P. 2512–2518.
113. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Fractional operator models of viscoelasticity // *Encyclopedia of Continuum Mechanics.* Berlin: Springer, 2020. V. 2. P. 971–982.
114. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Vibrations of viscoelastic rods, Fractional operator models // *Encyclopedia of Continuum Mechanics.* Berlin: Springer, 2020. V. 3. P. 2696–2715.
115. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Wave propagation in viscoelastic rods, Fractional operator models // *Encyclopedia of Continuum Mechanics.* Berlin: Springer, 2020. V. 3. P. 2740–2756.
116. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Fractional derivative Timoshenko beams and Uflyand-Mindlin plates, Impact response of // *Encyclopedia of Continuum Mechanics.* Berlin: Springer, 2020. V. 2. P. 962–971.
117. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Linear and nonlinear vibrations, Fractional oscillators // *Encyclopedia of Continuum Mechanics.* Berlin: Springer, 2020. V. 2. P. 1476–1491.
118. *Gorenflo R., Mainardi F.* Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order / *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics.* Wien, Springer, 1997. P. 223–276.
119. *de Oliveira E.C., Machado J.A.T.* A review of definitions for fractional derivatives and integrals // *Math. Problems Eng.* 2014. V. 2014. PaperID 238459.
120. *Ortigueira M.D., Machado J.A.T.* What is a fractional derivative? // *J. Comput. Phys.* 2015. V. 293. P. 4–13.
121. *Teodoro G.S., Machado J.A.T., de Oliveira E.C.* A review of definitions of fractional derivatives and other operators // *J. Comput. Phys.* 2019. V. 388. P. 195–208.
122. *Valério D., Trujillo J.J., Rivero M., Machado J.A.T., Baleanu D.* Fractional calculus: A survey of useful formulas. *Eur. Phys. J. Special Topics.* 2013. V. 222. P. 1827–1846.
123. *Tarasov V.E.* Review of some promising fractional physical models // *Int. J. Modern Phys. B.* 2013. V. 27. №. 9. PaperID 1330005.
124. *Рехвиашвили С.Ш., Псху А.В.* Новый метод описания затухающих колебаний балки с одним заделанным концом // *ЖТФ.* 2019. Т. 89. Вып. 9. С. 1314–1318.

125. *Shamaev A.S., Shumilova V.V.* Effective acoustic equations for a layered material described by the fractional Kelvin-Voigt model // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2021. V. 14. № 3. P. 351–359.
126. *Килбас А.А.* Теория и приложения дифференциальных уравнений дробного порядка (Курс лекций). Воронеж, Самара, 2009. 121 с.
127. *Caputo M., Fabrizio M.* A new definition of fractional derivative without singular kernel // Progress in Fract. Differ. Appl. 2015. V. 1. №. 2. P. 73–85.
128. *Atangana A., Baleanu D.* New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model // Thermal Sci. 2016. V. 20. № 2. P. 736–769.
129. *Hristov J.* Linear viscoelastic responses and constitutive equations in terms of fractional operators with non-singular kernels // Eur. Phys. J. Plus. 2019. V. 134. PaperID 283.
130. *Gómez-Aguilar J.F., Yépez-Martínez H., Calderón-Ramón C., Cruz-Orduña I., Escobar-Jiménez R.F., Olivares-Peregrino V.H.* Modeling of a mass-spring-damper system by fractional derivatives with and without a singular kernel // Entropy. 2015. V. 17. № 9. P. 6289–6303.
131. *Al-Salti N., Karimov E., Sadarangani K.* On a differential equation with Caputo-Fabrizio fractional derivative of order $1 < \beta \leq 2$ and application to mass-spring-damper system // Progress Fract. Differ. Appl. 2016. V. 2. № 4. P. 257–263.
132. *Morales-Delgado V.F., Gómez-Aguilar J.F., Taneco-Hernández M.A., Escobar-Jiménez R.F.* A novel fractional derivative with variable- and constant-order applied to a mass-spring-damper system // Eur. Phys. J. Plus. 2018. V. 133: PaperID 78.
133. *Almbaidin A.A., Abu-Alshaikh I.M.* Vibration of functionally graded beam subjected to moving oscillator using Caputo-Fabrizio fractional derivative model // Roman. J. Acoust. Vibr. 2019. V. 16. № 2. P. 137–146.
134. *Ortigueira M.D., Machado J.T.* A critical analysis of the Caputo–Fabrizio operator // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2018. V. 59. P. 608–611.
135. *Diethelm K., Garrappa R., Giusti A., Stynes M.* Why fractional derivatives with nonsingular kernels should not be used // Fract. Calculus Appl. Anal. 2020. V. 23. № 3. P. 610–634.
136. *Koh C.G., Kelly J.M.* Application of fractional derivatives to seismic analysis of base-isolated models // Earthq. Eng. Struct. Dyn. 1990. V. 19. № 2. P. 229–241.
137. *Lee H.H., Tsai C.S.* Analytical model of viscoelastic dampers for seismic mitigation of structures // Comput. Struct. 1994. V. 50. № 1. P. 111–121.
138. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Analysis of damped vibrations of thin bodies embedded into a fractional derivative viscoelastic medium // J. Mech. Behavior Mat. 2012. V. 21. № 5–6. P. 155–159.
139. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. Изд. 3-е, стереотипное. М.: КомКнига, 2007. 439 с. = *Timoshenko S.P.* Vibration Problems in Engineering. 3rd Ed. In collaboration with Young D.H. New York: D. Van Nostrand, 1955. 468 pp.
140. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Application of fractional derivatives to the analysis of damped vibrations of viscoelastic single mass systems // Acta Mech. 1997. V. 120. № 1–4. P. 109–125.
141. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Application of fractional operators to the analysis of damped vibrations of viscoelastic single-mass systems // J. Sound Vibr. 1997. V. 199. № 4. P. 567–586.
142. *Shen Y., Yang S., Xing H., Ma H.* Primary resonance of Duffing oscillator with two kinds of fractional-order derivatives // Int. J. Non-Linear Mech. 2012. V. 47. № 9. P. 975–983.
143. *Xing W., Chen E., Chang Y., Wang M.* Threshold for chaos of a Duffing oscillator with fractional-order derivative // Shock Vib. 2019. V. 2019. PaperID 1230194.
144. *Niu J., Liu R., Shen Y., Yang S.* Chaos detection of Duffing system with fractional-order derivative by Melnikov method // Chaos. 2019. V. 29. PaperID 123106.
145. *Shen Y., Yang S., Xing H., Ma H.* Primary resonance of Duffing oscillator with two kinds of fractional-order derivatives // Int. J. Non-Linear Mech. 2012. V. 47. P. 975–983.
146. *Niu J.C., Gutierrez H., Ren B.* Resonance analysis of fractional order Mathieu oscillator // J. Comput. Nonlinear Dyn. 2018. V. 13. PaperID 051003.
147. *Leung A.Y.T., Yang H.X., Guo Z.J.* The residue harmonic balance for fractional order van der Pol like oscillators // J. Sound Vibr. 2012. V. 331. № 5. P. 1115–1126.
148. *Shen Y., Yang S., Sui C.* Analysis on limit cycle of fractional-order Van der Pol oscillator // Chaos, Solitons, Fractals. 2014. V. 67. P. 94–102.

149. Огородников Е.Н. Математические модели дробных осцилляторов, постановка и структура решения задачи Коши // Матем. моделирование и краев. задачи. 2009. Ч. 1. С. 177–181.
150. *Rekhviashvili S., Pskhu A., Agarwal P., Jain S.* Application of the fractional oscillator model to describe damped vibrations // *Turk. J. Phys.* 2019. V. 43. P. 236–242.
151. Паровик Р.И., Зуннунов Р.Т. Анализ вынужденных колебаний дробного осциллятора // Проблемы прочности. Ташкент: изд-во “Фан”, 2019. № 4. С. 20–23.
152. Паровик Р.И. Существование хаотических режимов дробного аналога осциллятора типа Дуффинга // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Серия: физ.-мат. науки. 2019. Т. 23. № 2. С. 378–393.
153. Паровик Р.И. Математическое моделирование линейных эрдитарных осцилляторов. Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2015. 178 с.
154. Паровик Р.И. Эрдитарный осциллятор Дуффинга с переменными дробными порядками // Интернет-журнал “Науковедение” 2016. Т. 8. № 5. <http://naukovedenie.ru/PDF/34TVN516.pdf>
155. Дробышева И.В. Математическое моделирование нелинейных эрдитарных осцилляторов на примере осциллятора Дуффинга с дробными производными в смысле Римана–Лиувилля // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 2. С. 43–49.
156. Ким В.А. Модельное уравнение эрдитарного осциллятора Дуффинга с производной переменного порядка Римана–Лиувилля, характеризующей вязкое трение // Новый ун-т. Сер.: Техн. науки. 2016. № 4–5. С. 28–31.
157. Мейлланов Р.П., Янполов М.С. Особенности фазовой траектории “фрактального” осциллятора // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. Вып. 1. С. 67–73.
158. Паровик Р.И. Хаотические режимы фрактального нелинейного осциллятора // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. № 2. С. 364–379.
159. Паровик Р.И. Математическое моделирование нелокальной колебательной системы Дуффинга с фрактальным трением // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2015. № 1. С. 18–24.
160. Паровик Р.И. Существование и единственность задачи Коши для фрактального нелинейного уравнения осциллятора // Узб. мат. ж. 2017. № 4. С. 110–118.
161. *Orsingher E., D'Ovidio M.* Vibrations and fractional vibrations of rods, plates and Fresnel pseudo-processes // *J. Stat. Phys.* 2011. V. 145. P. 143–174.
162. *Li M.* Theory of Fractional Engineering Vibrations. Berlin: De Gruyter, 2021. 318 p.
163. *West B.J., Bologna M., Grigolini P.* Physics of Fractal Operators. New York: Springer, 2002. 349 p.
164. Нигматуллин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // ТМФ. 1992. Т. 90. № 3. С. 354–368.
165. Рутман Р.С. О статье Р.Р. Нигматулина “Дробный интеграл и его физическая интерпретация” // ТМФ. 1994. Т. 100. № 3. С. 476–478.
166. Учайкин В.В. О дробно-дифференциальном уравнении Лиувилля как уравнении динамики открытой системы // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. 2014. № 25. С. 58–67.
167. *Kwok S.Fa.* A falling body problem through the air in view of the fractional derivative approach // *Physica A.* 2005. V. 350. P. 199–206.
168. *Baleanu D., Golmankhaneh A.K., Nigmatullin R., Golmankhaneh Ali K.* Fractional Newtonian mechanics // *Cent. Eur. J. Phys.* 2010. V. 8. № 1. P. 120–125.
169. *Elzahar E.R., Gaber A.A., Aljohani A.F., Machado J.T., Ebaid A.* Generalized Newtonian fractional model for the vertical motion of a particle // *Appl. Math. Mod.* 2020. V. 88. P. 652–660.
170. *Tschoegl N.* The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior: An Introduction. Berlin: Springer, 1989. 769 p.
171. *Hooke R.* A Description of Helioscopes and Some Other Instruments, London, 1676. 32 p.
172. *Hooke R.* Lectures de Potentia Restitutiva, or of Spring Explaining the Power of Springing Bodies. London, 1678. 56 p.
173. *Newton I.* Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. London, 1687.
174. *Alfrey T.* The Mechanical Properties of High Polymers. New York, Interscience Publishers, 1948. = *Алфрей Т.* Механические свойства высокополимеров. М.: Изд-во иностранной литературы, 1952. 619 с.
175. *Arrospide E., Bikandi I., García I., Durana G., Aldabaldetrekú G., Zubia J.* Mechanical properties of polymer-optical fibres / *Polymer Optical Fibres: Fibre Types, Materials, Fabrication, Charac-*

- terization, and Applications (*Bunge C.-A., Gries T., Beckers M.*, Eds.). London: Woodhead Publishing, 2017. Chapter 7. P. 201–216.
176. *Thompson J.H.C.* On the theory of visco-elasticity: A thermodynamical treatment of visco-elasticity, and some problems of the vibrations of visco-elastic solids // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1933. V. 231 (694–706). P. 339–407.
 177. *Maxwell J.C.* On the dynamical theory of gases // *Philos. Trans. R. Soc. London*. 1867. V. 49. P. 49–88.
 178. *Thomson W. (Lord Kelvin)* On the elasticity and viscosity of metals // *Proc. R. Soc. London*. 1865. V. 14. P. 289–297.
 179. *Thomson W. (Lord Kelvin)* Elasticity / *Encyclopedia Britannica. A Dictionary of Arts, Science, and General Literature*. 9th ed. Edinburg: Adam and Charles Black, 1875. V. 7. P. 796–825.
 180. *Meyer O.E.* Zur Theorie der inneren Reibung // *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal)*. 1874. V. 78. P. 130–135.
 181. *Voigt W.* Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper // *Annalen der Physik*. 1889. V. 274 (12). P. 573–587.
 182. *Voigt W.* Ueber innere Reibung fester Körper, insbesondere der Metalle // *Annalen der Physik und Chemie*. 1892. V. 283. P. 671–693.
 183. *Jeffreys H.* The Viscosity of the Earth. (Third Paper.) *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1917. V. 77. Issue 5. P. 449–455.
 184. *Jeffreys H.* The Earth. Cambridge: Cambridge University Press, 1929 = *Джеффрис Г.* Земля, ее происхождение, история и строение. М.: ИЛ, 1960. 486 с.
 185. *Krusser A.I., Shitikova M.V.* Classification of viscoelastic models with integer and fractional order derivatives // *IOP Conf. Ser.: Materials Science and Engineering*. 2020. V. 747. PaperID 012007
 186. *Zener C.* Elasticity and anelasticity of metals. University of Chicago press, 1948. = *Зинер К.* Упругость и неупругость металлов // Сборник “Упругость и неупругость металлов” под ред. С.В. Вонсовского. М.: Изд-во иност. лит-ры, 1954. С. 8–168.
 187. *Богомолов В.О., Жданюк В.К., Цинка А.О.* Вязкоупругая структурная модель асфальтобетона // *Автомобильный транспорт*. 2016. Т. 38. С. 117–125.
 188. *Poynting J.H., Thomson J.J.* Elasticity / *Properties of Matter*. London: C. Griffin and Co, 1902. Chapter 4. P. 53–61.
 189. *Ишлинский А.Ю.* Продольные колебания стержня при наличии линейного закона последействия и релаксации // *ПММ*. 1940. Т. 4. Вып. 1. С. 79–92.
 190. *Ишлинский А.Ю.* Линейные законы деформирования не вполне упругих тел // *Доклады АН СССР*. 1940. Т. 24. № 1. С. 22–26 = *Ishlinsky A.* Linear deformation laws of not quite elastic bodies // *Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS*. 1940. V. 24. № 1. P. 23–27.
 191. *Ишлинский А.Ю.* Уравнения деформирования не вполне упругих и вязкопластических тел // *Известия АН СССР. Отд. техн. наук*. 1945. № 1–2. С. 34–45.
 192. *Steinmann P., Runesson K.* Visco-elasticity / *The Catalogue of Computational Material Models. Basic Geometrically Linear Models in 1D*. Chapter 4. Cham: Springer, 2021. P. 77–191.
 193. *Yuan J., Gao S., Xiu G., Wang L.* Mechanical energy and equivalent viscous damping for fractional Zener oscillator // *J. Vibr. Acoust.* 2020. V. 142. № 4. P. 1–22.
 194. *Lewandowski R., Baum M.* Dynamic characteristics of multilayered beams with viscoelastic layers described by the fractional Zener model // *Archive Appl. Mech.* 2015. V. 85. № 12. P. 1793–1814.
 195. *Litewka P., Lewandowski R.* Steady-state non-linear vibrations of plates using Zener material model with fractional derivative // *Comput. Mech.* 2017. V. 60. P. 333–354.
 196. *Litewka P., Lewandowski R.* Nonlinear harmonically excited vibrations of plates with Zener material // *Nonlinear Dyn.* 2017. V. 89. P. 691–712.
 197. *Litewka P., Lewandowski R.* Influence of elastic supports on non-linear steady-state vibrations of Zener material plates // *AIP Conf. Proc.* 2018. V. 1922. PaperID 100002.
 198. *Martin O.* Nonlocal effects on the dynamic analysis of a viscoelastic nanobeam using a fractional Zener model // *Appl. Math. Model.* 2019. V. 73. P. 637–650.
 199. *Mokhtari M., Permoon M.R., Haddadpour H.* Aeroelastic analysis of sandwich cylinder with fractional viscoelastic core described by Zener model // *J. Fluids Struct.* 2019. V. 85. P. 1–16.

200. Zhang C.C., Zhu H.H., Shi B., Mei G.X. Bending of a rectangular plate resting on a fractionalized Zener foundation // *Struct. Eng. Mech.* 2014. V. 52. № 6. P. 1069–1084.
201. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Two approaches for studying the impact response of viscoelastic engineering systems: An overview // *Comp. Math. Appl.* 2013. V. 66. № 5. P. 755–773.
202. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Features of fractional operators involving fractional derivatives and their applications to the problems of mechanics of solids // *Fractional Calculus: History, Theory and Applications*. Chapter 8. P. 165–226. New York: Nova Science Publishers, 2015.
203. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Fractional calculus models in dynamic problems of viscoelasticity // *Handbook of Fractional Calculus with Applications. V. 7: Applications in Engineering, Life and Social Sciences, Part A.* De Gruyter, 2019. P. 139–158.
204. Sevostianov I., Levin V., Radi E. Effective properties of linear viscoelastic microcracked materials: Application of Maxwell homogenization scheme // *Mechanics of Materials*. 2015. V. 84. P. 28–43.
205. Sevostianov I., Levin V. Creep and relaxation contribution tensors for spheroidal pores in hereditary solids: fraction-exponential operators approach // *Acta Mech.* 2016. V. 227. P. 217–227.
206. Vilchevskaya E., Levin V., Seyedkavoosi S., Sevostianov I. Replacement relations for a viscoelastic material containing multiple inhomogeneities // *Int. J. Eng. Science*. 2019. V. 136. P. 26–37.
207. Blair G.W.S., Coppen F.M.V. The subjective judgement of the elastic and plastic properties of soft bodies; the “differential thresholds” for viscosities and compression moduli // *Proc. Royal Society of London Series B-Biological Sciences*. 1939. V. 128 (850). P. 109–125.
<https://doi.org/10.1098/rspb.1939.0046>
208. Blair G.W.S., Coppen F.M.V. The estimation of firmness in soft materials // *The American Journal of Psychology*, 1943. V. 56 (2). P. 234–246.
<https://doi.org/10.2307/1417506>
209. Scott Blair G.W. *Elementary Rheology*. London: Academic Press, 1969.
210. Stiasnie M. On the application of fractional calculus for the formulation of viscoelastic models // *Applied Mathematical Modelling*. 1979. V. 3. P. 300–302.
211. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Analysis of rheological equations involving more than one fractional parameters by the use of the simplest mechanical systems based on these equations // *Mech. Time-Dependent Mat.* 2001. V. 5. № 2. P. 131–175.
212. Paola M.D., Zingales M. Exact mechanical models of fractional hereditary materials // *J. Rheol.* 2012. V. 56. № 5. P. 983–1004.
213. Di Paola M., Pinnola F.P., Zingales M. A discrete mechanical model of fractional hereditary materials // *Meccanica*. 2013. V. 48. P. 1573–1586.
214. Okuka A.S., Zorica D. Formulation of thermodynamically consistent fractional Burgers models // *Acta Mech.* 2018. V. 229. P. 3557–3570.
215. Kaminskii A.A., Selivanov M.F. On approach to the determination of the deformation characteristics of viscoelastic materials // *Int. Appl. Mech.* 2005. V. 41. P. 867–875.
216. Yu B., Jiang X. Numerical identification of the fractional derivatives in the two-dimensional fractional cable equation // *J. Scientific Comput.* 2016. V. 68. P. 252–272.
217. Shabani M., Jahani K., Di Paola M., Sadeghi M.H. Frequency domain identification of the fractional Kelvin-Voigt’s parameters for viscoelastic materials // *Mech. Materials*. 2019. V. 137. Paper-ID 103099
218. Lewandowski R., Chorazyczewski B. Identification of the parameters of the Kelvin-Voigt and the Maxwell fractional models, used to modeling of viscoelastic dampers // *Comput. Struct.* 2010. V. 88. P. 1–17.
219. Di Paola M., Pirrotta A., Valenza A. Visco-elastic behavior through fractional calculus: An easier method for best fitting experimental results // *Mech. Mat.* 2011. V. 43. P. 799–806.
220. Popov I.I., Chang T.P., Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Experimental study of concrete aging effect on the contact force and contact time during the impact interaction of an elastic rod with a viscoelastic beam // *J. Mech.* 2017. V. 33. № 3. P. 317–322.
221. Popov I.I., Chang T.P., Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Study of concrete aging effect on the contact force and the contact time during the impact of an elastic sphere upon a viscoelastic beam // *AER-Advances Eng. Res.* 2016. V. 52. P. 175–177.

222. Попов И.И., Россихин Ю.А., Шитикова М.В. Экспериментальное исследование влияния возраста бетона на величину контактной силы и времени контакта при ударе по вязкоупругой балке // Известия вузов. Строительство. 2018. № 6. С. 117–128.
223. Barpi F., Valente S. Creep and fracture in concrete: a fractional order rate approach // Eng. Fract. Mech. 2002. V. 70. P. 611–623.
224. Celauro C., Fecarotti C., Pirrotta A., Collop A. Experimental validation of a fractional model for creep/recovery testing of asphalt mixtures // Constr. Build. Mater. 2012. V. 36. P. 458–466.
225. Lagos-Varas M., Movilla-Quesada D., Arenas J.P., Raposeiras A.C., Castro-Fresno D., Calzada-Pérez M.A., Vega-Zamanillo A., Maturana J. Study of the mechanical behavior of asphalt mixtures using fractional rheology to model their viscoelasticity // Const. Build. Mat. 2019. V. 200. P. 124–134.
226. Meral F.C., Royston T.J., Magin R. Fractional calculus in viscoelasticity: An experimental study // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2010. V. 15. P. 939–945.
227. Shabani M., Jahani K. Time domain parameter identification of fractional viscoelastic constitutive equation // Proc. 27th Int. Conf. Iranian Soc. Mech. Eng. ISME'2019. Tehran, Iran. 2019. 4 p.
228. Popov I.I., Rossikhin Y.A., Shitikova M.V. Experimental identification of the fractional parameter for a viscoelastic model of concrete at different ages based on the impulse excitation technique / In: Dutta S., Inan E., Dwivedy S. (eds.) Advances in Rotor Dynamics, Control, and Structural Health Monitoring. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Singapore: Springer, 2020. P. 349–358.
229. Yin Y., Yang Z., Shi M. Circular arc rules of complex plane plot for model parameters determination of viscoelastic material // Mech. Time-Depend. Mater. 2021. <https://doi.org/10.1007/s11043-020-09465-x>
230. Wang Y., Harris J.M. Seismic attenuation models: multiple and fractional generalizations // SEG Technical Program Expanded Abstracts. 2020. P. 2754–2758.
231. Popov I.I., Shitikova M.V. Impulse excitation technique and its application for identification of material damping: An overview // IOP Conf. Ser.: Materials Science and Engineering. 2020. V. 962. PaperID022025.
232. Ерохин С.В., Алероев Т.С. Параметрическая идентификация порядка дробной производной в модели Бегли–Торвика // Математическое моделирование. 2018. Т. 30. № 7. С. 93–102.
233. Ерохин С.В., Алероев Т.С., Фриштер Л.Ю., Колесниченко А.В. Параметрическая идентификация математической модели вязкоупругих материалов с использованием производных дробного порядка // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2015. Т. 11. № 3. С. 82–86.
234. Унгарова Л.Г. Применение нелинейных дробных аналогов реологических моделей в задаче аппроксимации экспериментальных данных по растяжению поливинилхлоридного пластика // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20. № 4. С. 691–706.
235. Унгарова Л.Г., Огородников Е.Н. Идентификация параметров нелинейных дробных математических моделей наследственно упругого тела на основе экспериментальных данных о ползучести образцов из ПВХ-пластика // Материалы XI Всероссийской научной конференции “Математическое моделирование и краевые задачи” (27–30 мая 2019 г., Самара, Россия). 2019. Т. 1. С. 359–363.
236. Love A.E.H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. Cambridge: Cambridge University Press, 1892. 396 p. = Лав А. Математическая теория упругости. М.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 674 с. (Перевод с 4-го англ. издания).
237. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред: Гидродинамика и теория упругости. Т. 3. М.; Л.: ОГИЗ. Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1944. 624 с.
238. Hilton H.H. The elusive and fickle viscoelastic Poisson’s ratio and its relation to the elastic-viscoelastic correspondence principle // J. Mech. Mat. Struct. 2009. V. 4. P. 1341–1364.
239. Hilton H.H. Implications and constraints of time-independent Poisson ratios in linear isotropic and anisotropic viscoelasticity // J. Elasticity. 2001. V. 63. P. 221–251.
240. Hilton H.H. Clarifications of certain ambiguities and failings of Poisson’s ratios in linear viscoelasticity // J. Elasticity. 2011. V. 104. P. 303–318.
241. Tschoegl N.W., Knauss W.G., Emri I. Poisson’s ratio in linear viscoelasticity – a critical review // Mech. Time-Depend. Mat. 2002. V. 6. P. 3–51.
242. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V., Estrada M.M.G. Modeling of the impact response of a beam in a viscoelastic medium // Appl. Math. Sci. 2016. V. 10. № 49. P. 2471–2481.

-
243. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V., Trung P.T.* Application of the fractional derivative Kelvin–Voigt model for the analysis of impact response of a Kirchhoff–Love plate // *WSEAS Trans. Math.* 2016. V. 15. P. 498–501.
244. *Spanos P.D., Malara G.* Nonlinear random vibrations of beams with fractional derivative elements // *J. Eng. Mech.* 2014. V. 140. Paper ID 04014069.
245. *Bhullar S.K.* Three decades of auxetic polymers: a review // *E-Polymers.* 2015. V. 15. P. 205–215.
246. *Carneiro V.H., Meireles J., Puga H.* Auxetic materials – A review // *Materials Science-Poland.* 2013. V. 31. P. 561–571.
247. *Mazaev A.V., Ajenez O., Shitikova M.V.* Auxetics materials: classification, mechanical properties and applications // *IOP Conf. Ser.: Materials Science and Engineering.* 2020. V. 747. Paper ID 012008.
248. *Городцов В.А., Лисовенко Д.С.* Ауксетики среди материалов с кубической анизотропией // *Известия РАН. МТТ.* 2020. № 4. С. 7–24.
249. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V., Krusser A.I.* To the question on the correctness of fractional derivative models in dynamic problems of viscoelastic bodies // *Mech. Res. Com.* 2016. V. 77. P. 44–49.
250. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* The fractional derivative Kelvin–Voigt model of viscoelasticity with and without volumetric relaxation // *J. Phys. Conf. Series.* 2018. V. 991. PaperID 012069.