

УДК 539.3

ГАШЕНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ БЫСТРО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА

© 2022 г. Н. В. Баничук^a, С. Ю. Иванова^{a,*}, В. С. Афанасьев^a

^a Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: syuivanova@yandex.ru

Поступила в редакцию 02.02.2021 г.

После доработки 03.03.2021 г.

Принята к публикации 04.03.2021 г.

Рассматривается вращение тонкого упругого диска вокруг его оси. Предполагается, что диск жестко закреплен в центре и совершает малые поперечные колебания, описываемые в рамках мембранной модели. Для подавления колебаний гибкий диск подвергается внешним механическим воздействиям. Процесс демпфирования колебаний оценивается квадратичным энергетическим критерием и оптимизируется с применением современной теории оптимального управления. Выведены условия оптимальности, применяемые для подавления упругих колебаний на конечном интервале времени, и приведен разработанный итерационный алгоритм демпфирования колебаний, проиллюстрированный на примере аналитического определения стабилизирующего воздействия.

Ключевые слова: вращающийся гибкий диск, гашение колебаний, оптимизация демпфирующих воздействий

DOI: 10.31857/S0572329921060039

1. Введение. Модель поперечных колебаний гибкого вращающегося диска, предложенная в [1, 2], учитывала действие натяжений в радиальном и окружном направлениях. Отмечалось, что, несмотря на отсутствие учета в модели изгибных сил, данная модель описания колебаний приводит к удовлетворительным результатам при больших скоростях вращения диска. В работах [3–5] в предположении об отсутствии изгибных напряжений исследовались моды свободных поперечных колебаний вращающихся мембранных дисков. В работе [6] при исследовании поперечных колебаний вращающегося диска дополнительно учитывались изгибные силы и были получены результаты, обосновывающие вычисления частот в [1–5]. Влияние приложения внешней поперечной силы на устойчивость вращающегося упругого диска исследовалось в [7] в предположении, что внешнее воздействие распределено по малой области диска. Стационарные прогибы гибкого вращающегося диска, находящегося под воздействием фиксированной в пространстве поперечной нагрузки, изучались в [8] как в рамках мембранной модели, так и с учетом изгибной жесткости. Проблемы устойчивости и дестабилизации колебаний упругих и вязкоупругих систем в движущихся средах исследовались в [9], а в [10] приведено решение, полученное Хосака и Крэндаллом, задачи стабилизации поперечных колебаний вращающегося диска с учетом аэродинамического воздействия.

2. Основные соотношения задачи оптимизации. Рассматривается вращающийся с угловой скоростью ω упругий диск, совершающий поперечные колебания малой амплитуды и находящийся под внешним механическим воздействием для демпфирования

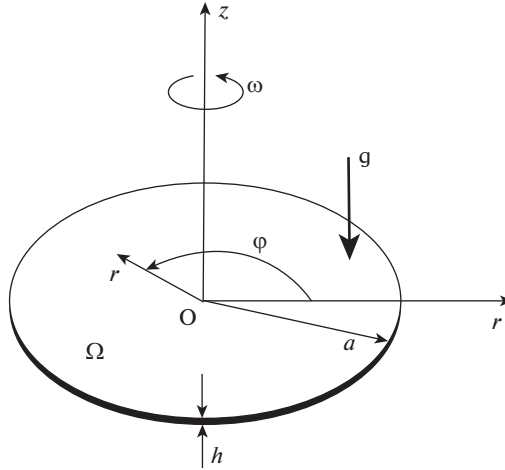


Рис. 1. Вращающийся диск.

колебаний. Используя лабораторную (Эйлерову) систему координат $rO\varphi$ (см. рис. 1) и мембранную модель вращающегося диска, представим уравнение поперечных колебаний в виде [1–5]

$$\rho h(w_{tt} + 2\omega w_{t\varphi} + \omega^2 w_{\varphi\varphi}) - \frac{\rho h \omega^2}{r} (r P w_r)_r - \frac{\rho h \omega^2 Q}{r^2} w_{\varphi\varphi} = g \quad (2.1)$$

$$P = \frac{1}{8}(3 + \nu)(a^2 - r^2), \quad Q = \frac{1}{8}((3 + \nu)a^2 - (1 + 3\nu)r^2) \quad (2.2)$$

где $w = w(r, \varphi, t)$ – поперечное перемещение, ρ – плотность, a – радиус диска, h – толщина мембраны, $\omega = \varphi_t$ – угловая скорость, ν – коэффициент Пуассона, $g = g(r, \varphi, t)$ – прикладываемое поперечное демпфирующее воздействие, нижние индексы t , r и φ означают дифференцирование по соответствующей переменной.

В дальнейшем используются безразмерные переменные $r' = r/a$, $g' = g/\rho h$ (штрихи далее опускаются), а также начальные и граничные условия, выражающие жесткое закрепление в центре круглого диска и конечность перемещений свободного края. Учитывая, что все рассуждения проводятся в области Ω :

$$(r, \varphi) \in \Omega = \{(r, \varphi) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} \quad (2.3)$$

на отрезке времени $0 \leq t \leq t_f$, запишем данные условия в виде

$$(w)_{t=0} = g_1(r, \varphi), \quad (w_t)_{t=0} = g_2(r, \varphi), \quad (r, \varphi) \in \Omega \quad (2.4)$$

$$(w)_{r=0} = 0 \quad (w_r)_{r=1} < \infty, \quad t \in [0, t_f] \quad (2.5)$$

в которой t_f – безразмерное время окончания рассматриваемого процесса демпфирования колебаний, $g_1(r, \varphi)$ и $g_2(r, \varphi)$ – заданные начальные возмущения перемещений и их скоростей. Функция прогибов удовлетворяет также условиям $(w_r)_{r=0} = 0$ и $w(r, \varphi, t) = w(r, \varphi + 2\pi, t)$. Функция $g = g(r, \varphi, t)$ рассматривается в дальнейшем в качестве управляющего воздействия, реализующего демпфирование колебаний диска. Качество процесса подавления колебаний оценивается значением функционала

$$J_g = \int_{\Omega} (\alpha_1 w^2 + \alpha_2 w_t^2)_{t=t_f} d\Omega \quad (2.6)$$

зависящего от перемещений $w(r, \varphi, t_f)$ и скоростей $w_t(r, \varphi, t_f)$ в конечный момент времени $t = t_f$. Параметры $\alpha_1 \geq 0$ и $\alpha_2 \geq 0$ считаются заданными.

На управляющее демпфирующее воздействие $g(r, \varphi, t)$ наложено энергетическое ограничение в виде следующего неравенства:

$$J_{\mu} = \int_0^{t_f} \int_{\Omega} g^2(r, \varphi, t) d\Omega dt \leq M_0 \quad (2.7)$$

Здесь $d\Omega = r dr d\varphi$, а $M_0 > 0$ — заданная постоянная.

Процесс гашения колебаний в оптимизационной постановке [11–15] заключается в отыскании управляющего экстремального воздействия $g(r, \varphi, t)$ ($(r, \varphi) \in \Omega$), удовлетворяющего энергетическому неравенству (2.7) и минимизирующего квадратичный функционал качества (2.6).

Для реализации процесса минимизации рассматриваемого функционала качества (2.6) выведем условия оптимальности. С этой целью воспользуемся уравнением колебаний вращающегося диска в безразмерной форме

$$L(w) \equiv w_{tt} + 2\omega w_{t\varphi} + \omega^2 \left[w_{\varphi\varphi} \left(1 - \frac{Q}{r^2} \right) - \frac{1}{r} (rPw_r)_r \right] = g \quad (2.8)$$

и приведем соответствующие соотношения в вариациях для этого уравнения и начально-краевых условий (2.4), (2.5)

$$\begin{aligned} \delta L(w) = L(\delta w) = (\delta w)_{tt} + 2\omega(\delta w)_{t\varphi} + \\ + \omega^2 (\delta w)_{\varphi\varphi} \left(1 - \frac{Q}{r^2} \right) - \frac{\omega^2}{r} (rP(\delta w)_r)_r = \delta g \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$(\delta w)_{t=0} = 0, \quad (\delta w_t)_{t=0} = 0, \quad (r, \varphi) \in \Omega \quad (2.10)$$

$$(\delta w)_{r=0} = 0, \quad (\delta w)_{r=1} \leq 0, \quad t \in [0, t_f] \quad (2.11)$$

причем $(\delta w_r)_{r=0} = 0$ и $\delta w(r, \varphi, t) = \delta w(r, \varphi + 2\pi, t)$.

3. Сопряженная система и необходимые условия оптимальности. Используем в дальнейшем также выражения для вариаций минимизируемого функционала δJ_g и ограничения (2.7), записанного предварительно в виде равенства при помощи введения вспомогательной величины θ [14, 15]:

$$J_{\mu} - M_0 + \theta^2 = 0 \quad (3.1)$$

Будем иметь

$$\delta J_g = 2 \int_{\Omega} (\alpha_1 w \delta w + \alpha_2 w_t \delta w_t)_{t=t_f} d\Omega \quad (3.2)$$

$$\delta(J_{\mu} - M_0 + \theta^2) = 2 \int_0^{t_f} \int_{\Omega} g \delta g d\Omega dt + 2\theta \delta \theta = 0 \quad (3.3)$$

Введем в рассмотрение сопряженную переменную $v(r, \varphi, t)$, удовлетворяющую по определению следующим граничным условиям:

$$(v)_{r=0} = 0, \quad (v)_{r=1} < \infty, \quad t \in [0, t_f] \quad (3.4)$$

совпадающим с граничными условиями, наложенными на переменную w при $r = 0$ и $r = 1$ в (2.5). Умножим затем уравнение в вариациях (2.9) на переменную v с последую-

щим интегрированием произведения по области Ω . Используя начально-краевые условия (2.10) и (2.11) и выполняя интегрирование “по частям”, представим вариацию полученного интеграла в виде

$$\begin{aligned} \delta J_a &= \int_0^{t_f} \int_{\Omega} v [L(\delta w) - \delta g] d\Omega dt = \\ &= \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \{ [L(v)] \delta w - v \delta g \} d\Omega dt + \int_{\Omega} (v \delta w_t - v_t \delta w)_{t=t_f} d\Omega \end{aligned} \quad (3.5)$$

Необходимое условие оптимальности процесса демпфирования колебаний вращающегося диска сводится к равенству нулю вариации расширенного функционала Лагранжа, то есть

$$\delta J = \delta J_g + \delta J_a + \mu \left(2 \int_0^{t_f} \int_{\Omega} g \delta g d\Omega dt + 2\theta \delta \theta \right) = 0 \quad (3.6)$$

где μ — множитель Лагранжа, соответствующий учету энергетического неравенства (2.7). Подстановка выражений (3.3), (3.5) в уравнение (3.6) и учет произвольности вариаций δg , δw при $(r, \varphi) \in \Omega$ и вариации $\delta \theta$ приводит к необходимому условию оптимальности

$$g(r, \varphi, t) = \frac{1}{2\mu} v(r, \varphi, t), \quad (r, \varphi) \in \Omega, \quad t \in [0, t_f] \quad (3.7)$$

если ограничение (2.7) выполняется со знаком строгого равенства и, следовательно, $\theta = 0$. При этом $(d\Omega = r dr d\varphi)$

$$\mu^2 = \frac{1}{4M_0} \int_0^{t_f} \int_{\Omega} v^2(r, \varphi, t) d\Omega dt \quad (3.8)$$

В случае строгого неравенства в (2.7) величина вспомогательной переменной θ в (3.1) отлична от нуля, а из необходимого условия экстремума ($\mu\theta = 0$), которое получается из (3.6), следует, что $\mu = 0$.

Из условия обращения в ноль полной (расширенной) вариации в (3.6) также получим однородное дифференциальное уравнение в частных производных для сопряженной переменной

$$L(v) \equiv v_{tt} + 2\omega v_{t\varphi} + \omega^2 \left(1 - \frac{Q}{r^2} \right) v_{\varphi\varphi} - \frac{\omega^2}{r} (r P v_r)_r = 0 \quad (3.9)$$

удовлетворяющей условиям в конечный момент времени $t = t_f$ рассматриваемого временного интервала

$$(v)_{t=t_f} = -2\alpha_2 w_t, \quad (v_t)_{t=t_f} = 2\alpha_1 w \quad (3.10)$$

Отметим, что условие экстремума расширенного функционала

$$\mu\theta = 0 \quad (3.11)$$

означает, что для неактивного ограничения (2.7), выполняющегося со знаком строгого неравенства, из (2.7) и (3.1) следует, что $\theta \neq 0$. Соответствующий множитель Лагранжа в этом случае должен полагаться равным нулю, как это следует из необходимого условия оптимальности (3.11). Тем самым, ограничение (2.7) в этом случае не учитывается при отыскании оптимального решения. Если же $\mu \neq 0$, то $\theta = 0$, и соответствующее ограничение является “активным”.

Таким образом, рассматриваемая задача оптимального гашения колебаний сводится к решению связанных начально-краевой задачи для $w(r, \varphi, t)$ и краевой задачи для $v(r, \varphi, t)$ с условиями в конечный момент времени. При этом оптимальное демпфирующее воздействие $g(r, \varphi, t)$ находится с применением условий экстремума.

4. Алгоритм определения управляющих воздействий. Для отыскания способа оптимального гашения колебаний вращающегося упругого диска предлагается следующий алгоритм определения управляющих воздействий. Данный способ основывается на применении выведенных условий экстремума и решении связанных терминальными условиями уравнений, определяющих распределения прогибов $w(r, \varphi, t)$ и сопряженной переменной $v(r, \varphi, t)$. Итерационный алгоритм решения задачи оптимизации заключается в последовательном выполнении описанных ниже итераций и шагов.

На первом шаге первой итерации решается “прямая” задача, состоящая в интегрировании уравнений динамики для функции прогибов с граничными условиями и начальными условиями, описывающими начальные распределения перемещений w и скоростей $\partial w / \partial t$ при $t = 0$. На начальном этапе итерационного процесса при выполнении первого шага первой итерации в качестве демпфирующего воздействия задается некоторое (неоптимальное) управление $g(r, \varphi, t) = g^{(1)}(r, \varphi, t)$, удовлетворяющее неравенству (2.7). При выполнении последующих итераций алгоритма в качестве управляющего воздействия на первом шаге принимается воздействие, получаемое из условий оптимальности.

На втором шаге итерационного алгоритма с учетом найденного на первом шаге распределения $w(r, \varphi, t_f)$ и соответствующих величин производных, входящих в терминальные условия, решается задача возвратного интегрирования сопряженного уравнения с соответствующими граничными условиями и условиями в конечный момент времени $t = t_f$, рассматриваемыми в качестве начальных условий при отыскании $v(r, \varphi, t)$.

На третьем шаге с применением найденного на втором шаге распределения сопряженной переменной $v(r, \varphi, t)$ и использованием условий экстремума (3.7), (3.8) находится текущее приближение для оптимального демпфирующего воздействия $g(r, \varphi, t)$, прикладываемого к диску при $(r, \varphi) \in \Omega, t \in [0, t_f]$. Полученное на третьем шаге итерационного процесса демпфирующее управление рассматривается далее в качестве “начального” при переходе к первому шагу следующей итерации алгоритма.

5. Реализация метода Галёркина. Приведем некоторые детали нахождения оптимального управления процессом гашения колебаний, основанного на методе Галёркина. Представим искомые распределения поперечных перемещений диска $w(r, \varphi, t)$ и сопряженной переменной $v(r, \varphi, t)$ в виде рядов

$$w(r, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{n_0} q_n(t) \Psi_n(r, \varphi), \quad v(r, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{n_0} s_n(t) \Psi_n(r, \varphi) \quad (5.1)$$

где $q_n(t), s_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots, n_0$) — неизвестные функции времени, подлежащие определению с использованием уравнений, определяющих w и v , а $\Psi_n(r, \varphi)$ — функции формы, определяемые выражениями

$$\Psi_n(r, \varphi) = R_n(r) \Phi_n(\varphi), \quad (r, \varphi) \in \Omega \quad (5.2)$$

и удовлетворяющие граничным условиям (2.5), (3.4) для w и v .

Для координатных функций метода Галёркина $q_n(t)$ и $s_n(t)$ получим обыкновенные дифференциальные уравнения, подставив выражения (5.1) в соответствующие динамические уравнения (2.8), (3.9), определяющие переменные $w(r, \varphi, t)$ и $v(r, \varphi, t)$, и

умножив получающиеся соотношения на $\Psi_j(r, \varphi)$ ($j = 1, 2, \dots$) с последующим интегрированием по r и φ ($0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$). Выполнив стандартные операции, характерные для метода Галёркина [16–21], будем иметь две системы обыкновенных дифференциальных уравнений, служащих для определения величин $q_n(t)$ и $s_n(t)$

$$\sum_{n=1}^{n_0} \left\{ A_{jn} \frac{d^2 q_n}{dt^2} + 2\omega B_{jn} \frac{dq_n}{dt} + \omega^2 (C_{jn} - D_{nj}) q_n \right\} - G_j(t) = 0 \quad (5.3)$$

$$\sum_{n=1}^{n_0} \left\{ A_{jn} \frac{d^2 s_n}{dt^2} + 2\omega B_{jn} \frac{ds_n}{dt} + \omega^2 (C_{jn} - D_{nj}) s_n \right\} = 0 \quad (5.4)$$

Коэффициенты A_{jn} , B_{jn} , C_{jn} , D_{jn} и функции $G_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots$) определяются выражениями

$$\begin{aligned} A_{jn} &= \int_{\Omega} \Psi_n \Psi_j d\Omega, & B_{jn} &= \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_n}{\partial \varphi} \Psi_j d\Omega \\ C_{jn} &= \int_{\Omega} \left(1 - \frac{Q}{r^2} \right) \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \varphi^2} \Psi_j d\Omega, & D_{jn} &= \int_{\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r P \frac{\partial \Psi_n}{\partial r} \right) \Psi_j d\Omega \\ G_j(t) &= \int_{-1}^1 g(r, \varphi, t) \Psi_j dx, & j &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.5)$$

Начальные условия для q_j при $t = 0$ и условия для s_j в конечный момент времени $t = t_f$ записываются в следующем виде:

$$\sum_{n=1}^{n_0} (q_n)_{t=0} A_{jn} = \int_{\Omega} \Psi_j g_1 d\Omega, \quad \sum_{n=1}^{n_0} \left(\frac{dq_n}{dt} \right)_{t=0} A_{jn} = \int_{\Omega} \Psi_j g_2 d\Omega \quad (5.6)$$

$$\sum_{n=1}^{n_0} (s_n)_{t=t_f} A_{jn} = -2\alpha_2 \sum_{n=1}^{n_0} \left(\frac{dq_n}{dt} \right)_{t=t_f} A_{jn}, \quad \sum_{n=1}^{n_0} \left(\frac{ds_n}{dt} \right)_{t=t_f} A_{jn} = 2\alpha_1 \sum_{n=1}^{n_0} (q_n)_{t=t_f} A_{jn} \quad (5.7)$$

6. Пример построения решения. Рассмотрим пример оптимизации процесса демпфирования колебаний. Предположим, что

$$\begin{aligned} g_1(r, \varphi) &= \Psi_1(r, \varphi) = \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} r\right) \right) \sin \varphi, & (r, \varphi) &\in \Omega \\ g_2(r, \varphi) &= 0, & n_0 &= 1 \end{aligned} \quad (6.1)$$

и ограничимся выполнением двух итераций. При этом рассмотрим вариант итерационного процесса, когда на первом шаге первой итерации принимаются следующие значения для функций g и G_1 :

$$\begin{aligned} g &= g^{(1)}(r, \varphi, t) = 1, & (r, \varphi) &\in \Omega, & t &\in [0, t_f] \\ G_1 &= G_1^{(1)}(t) = \int_{\Omega} \Psi_1 g^{(1)} d\Omega = \lambda_0, & \lambda_0 &= 1 + \frac{4}{\pi} \left(\frac{2}{\pi} - 1 \right) \end{aligned} \quad (6.2)$$

и осуществляется интегрирование уравнения для $q_1^{(1)}$

$$\frac{d^2 q_1^{(1)}}{dt^2} + \gamma_1 q_1^{(1)} + \gamma_0 = 0, \quad \gamma_0 = -G_1^{(1)} A_{11}^{-1}, \quad \gamma_1 = \omega^2 A_{11}^{-1} (C_{11} - D_{11}) \quad (6.3)$$

с начальными условиями

$$(q_1^{(1)})_{t=0} = \int_{\Omega} \Psi_1 g_1 d\Omega = \lambda_1, \quad \lambda_1 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{3}{4} + \frac{7}{\pi^2} - \frac{4}{\pi} \right) \quad (6.4)$$

$$\left(\frac{dq_1^{(1)}}{dt} \right)_{t=0} = \int_{\Omega} \Psi_1 g_2 d\Omega = 0 \quad (6.5)$$

Будем иметь

$$q_1^{(1)}(t) = \left(\lambda_1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \right) \cos(\sqrt{\gamma_1} t) + \frac{\gamma_0}{\gamma_1}, \quad t \in [0, t_f] \quad (6.6)$$

Используя далее это решение на втором шаге первой итерации алгоритма при возвратном интегрировании сопряженного уравнения

$$\frac{d^2 s_1^{(1)}}{dt^2} + \gamma_1 s_1^{(1)} = 0 \quad (6.7)$$

с условиями в конечный момент времени $t = t_f$

$$\begin{aligned} (s_1^{(1)})_{t=t_f} &= -2\alpha_2 \frac{dq_1^{(1)}}{dt} = 2\alpha_2 \sqrt{\gamma_1} \left(\lambda_1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \right) \sin(\sqrt{\gamma_1} t_f) = \kappa_1 \\ \left(\frac{ds_1^{(1)}}{dt} \right)_{t=t_f} &= 2\alpha_1 q_1^{(1)} = 2\alpha_1 \left[\left(\lambda_1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \right) \cos(\sqrt{\gamma_1} t_f) + \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \right] = \kappa_2 \end{aligned} \quad (6.8)$$

В результате находим выражение для $s_1^{(1)}$

$$s_1^{(1)}(t) = v_1 \sin(\sqrt{\gamma_1} t) + v_2 \cos(\sqrt{\gamma_1} t) \quad (6.9)$$

в котором

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{\sqrt{\gamma_1}} (\kappa_1 \sqrt{\gamma_1} \sin(\sqrt{\gamma_1} t_f) + \kappa_2 \cos(\sqrt{\gamma_1} t_f)) \\ v_2 &= \frac{1}{\sqrt{\gamma_1}} (\kappa_1 \sqrt{\gamma_1} \cos(\sqrt{\gamma_1} t_f) - \kappa_2 \sin(\sqrt{\gamma_1} t_f)) \end{aligned} \quad (6.10)$$

При этом получаемое на третьем шаге первой итерации алгоритма приближение для оптимального демпфирующего воздействия запишется в виде

$$g^{(2)} = \frac{1}{2\mu} v^{(1)}(r, \varphi, t) = \frac{1}{2\mu} s_1^{(1)}(t) \Psi_1(r, \varphi) \quad (6.11)$$

Применим найденное выражение для $g^{(2)}$ на первом шаге второй итерации при интегрировании уравнения колебаний

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q_1^{(2)}}{dt^2} + \gamma_1 q_1^{(2)} + \gamma_2 &= 0, \quad t \in [0, t_f] \\ \gamma_2(t) &= -A_{11}^{-1} G_1^{(2)} = -A_{11}^{-1} \int_{\Omega} \Psi_1 g^{(2)} d\Omega = -\frac{1}{2\mu} s_1^{(1)}(t) \end{aligned} \quad (6.12)$$

и, опуская детали вычислений, используем решение этого уравнения для минимизации на второй итерации функционала (2.6), то есть

$$\begin{aligned}
 (J_g^{(2)})_{t=t_f} &= \left[\alpha_1 (q_1^{(2)})^2 + \alpha_2 \left(\frac{dq_1^{(2)}}{dt} \right)^2 \right]_{t=t_f} \int_{\Omega} \Psi_1^2 d\Omega = \\
 &= \lambda_1 \left[\alpha_1 (q_1^{(2)})^2 + \alpha_2 \left(\frac{dq_1^{(2)}}{dt} \right)^2 \right]_{t=t_f}
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

7. Некоторые замечания и выводы. В работе описана новая постановка задачи оптимального гашения поперечных колебаний вращающегося упругого диска. В предположении о наличии начальных возмущений плоской формы диска и поперечных скоростей предложен эффективный алгоритм подавления возмущений. Изложенный алгоритм гашения колебаний основан на получении и использовании необходимых условий оптимальности и выведенных динамических уравнений в частных производных. Эти уравнения описывают как процессы колебаний вращающейся круговой мембраны, так и некоторые процессы для введенных сопряженных переменных (сопряженные задачи). Показано, что решение прямых и сопряженных задач возможно с применением метода Галёркина. Приведен пример, иллюстрирующий основные этапы решения задачи оптимального гашения колебаний тонкого мембранного диска.

Приведем некоторые замечания. Описанный подход к решению задачи оптимального подавления упругих колебаний вращающегося диска, рассматриваемой в рамках мембранной модели, естественным образом обобщается на случай диска из термоупругого, а также из вязкоупругого материалов, находящегося под воздействием различных механических и тепловых нагрузок.

Для подавления возникающих возмущений в работе используются управляющие воздействия в форме $g = g(r, \varphi, t)$ с не разделяющимися в общем случае временем t и геометрическими переменными (r, φ) . Однако, при указанном подходе экстремальное управление может оказаться очень сложным, а его практическая реализация затруднительной. В этом случае для упрощения можно воспользоваться представлением управляющего воздействия в виде $g(r, \varphi, t) = f_1(t) f_2(r, \varphi)$ с разделенными функциями положения и времени, описывающими как конкретную геометрическую реализацию расположения воздействий (приводов, актюаторов), задаваемую посредством $f_2(r, \varphi)$, так и способ изменения воздействий во времени, обозначаемый через $f_1(t)$. Данный подход позволит рассмотреть и сравнить по эффективности способы приложения распределенных воздействий к различным частям диска и прикладываемых в отдельных точках сосредоточенных воздействий, а также сопоставить режимы воздействий во времени, такие, как релейные, гармонические, ударные и другие управления.

Работа выполнена по теме госзадания (номер госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при частичной финансовой поддержке Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 20-08-00082а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lamb H., Southwell R.V. The vibrations of a spinning disc // Proc. Roy. Soc. London. 1921. V. 99. P. 272–280.
2. Southwell R.V. On the free transverse vibrations of a uniform circular disc clamped at its centre: and on the effects of rotation // Proc. Roy. Soc. London. 1922. V. 101. P. 133–153.
3. Simmonds J.G. The transverse vibrations of a flat spinning membrane // J. Aeronautic. Sci. 1962. V. 29. № 1. P. 16–18.
4. Simmonds J.G. Axisymmetric transverse vibrations of a spinning membrane clamped at its center // AIAA J. 1962. V. 1. № 5. P. 1224–1225.
5. Eversman W. Transverse vibrations of a clamped spinning membrane // AIAA J. 1968. V. 6. № 7. P. 1395–1397.

6. *Barasch S., Chen Y.* On the vibration of a rotating disc // *J. Appl. Mech.* 1972. V. 39. P. 1143–1144. <https://doi.org/10.1115/1.3422847>
7. *Iwan W.D., Moeller T.L.* The stability of a spinning elastic disc with a transverse load system // *J. Appl. Mech.* 1976. 43. P. 485–490. <https://doi.org/10.1115/1.3423896>
8. *Benson R.C., Bogy D.B.* Deflection of a very flexible spinning disc due to a stationary transverse load // *J. Appl. Mech.* 1978. V. 45. P. 636–641. <https://doi.org/10.1115/1.3424374>
9. *Crandall S.H.* Stability of vibratory modes in moving media // *Dynamic Problems of Rigid-Elastic Systems and Structures* / Ed. by *Banichuk N.V., Klimov D.M., Schiehlen W.* Berlin: Springer-Verlag, 1991. P. 65–72.
10. *Paidoussis M.P.* Fluid-structure interaction: slender structures and axial flow. V. 2. Elsevier Academic Press, 2004.
11. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.
12. *Моисеев Н.Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971. 424 с.
13. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 415 с.
14. *Баничук Н.В.* Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука, 1986. 303 с.
15. *Троицкий В.А., Петухов Л.В.* Оптимизация формы упругих тел. М.: Наука, 1982. 432 с.
16. *Banichuk N., Jeronen J., Neittaanmäki P., Saksa T., Tuovinen T.* *Mechanics of Moving Materials.* Cham: Springer, 2014. 253 p.
17. *Banichuk N., Barsuk A., Jeronen J., Tuovinen T., Neittaanmäki P.* *Stability of axially moving materials.* Cham, Switzerland: Springer, 2020. 642 p.
18. *Баничук Н.В., Иванова С.Ю.* О подавлении поперечных колебаний упругой панели, продольно движущейся в потоке жидкости // *Доклады РАН. Физика, технические науки.* 2020. Т. 492. С. 81–85.
19. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
20. *Келдыш М.В.* О методе Б.Г. Галёркина для решения краевых задач // *Изв. АН СССР, сер. матем.* 1942. Т. 6. № 6. С. 309–330.
21. *Свирский И.В.* Методы Бубнова–Галёркина и последовательных приближений. М.: Наука, 1968. 199 с.