ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 6, с. 23–32

УДК 539.3

НОВОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТРЕЩИНЕ В РАСТЯГИВАЕМОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЕ

В. В. Васильев[a,*], С. А. Лурье[a,b], В. А. Салов[a]

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

[b] *Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия*

**e-mail: vvvas@dol.ru*

Поступила в редакцию 17.03.2021 г.
После доработки 22.03.2021 г.
Принята к публикации 29.03.2021 г.

Рассматривается классическая плоская задача теории упругости о трещине в растягиваемой ортотропной упругой неограниченной плоскости, приводящая к сингулярному решению для напряжений в окрестности края трещины. Приводятся соотношения обобщенной теории упругости, включающие малый масштабный параметр. Уравнения обобщенной теории имеют более высокий порядок чем уравнения классической теории и позволяют устранить сингулярность классического решения. Масштабный параметр определяется экспериментально. Полученные результаты определяют влияние длины трещины на несущую способность пластины и сравниваются с результатами эксперимента для пластин из стеклотекстолита и углепластика.

Ключевые слова: теория упругости, неклассическая теория упругости, плоская задача о трещине в ортотропной пластине

DOI: 10.31857/S0572329921060167

1. Введение – классическое решение задачи о трещине. Рассмотрим неограниченную ортотропную пластину с трещиной длиной $2c$, находящуюся в условиях одноосного растяжения напряжением σ_0 (рис. 1). Напряженно-деформированное состояние пластины определяется классическим решением, полученным методом комплексных потенциалов [1]. Напряжения определяются равенствами

$$\sigma_x = -p^2 \operatorname{Re}\frac{Aw_1}{\sqrt{w_1^2 - c^2}} - q^2 \operatorname{Re}\frac{Bw_2}{\sqrt{w_2^2 - c^2}} \tag{1.1}$$

$$\sigma_y = \operatorname{Re}\frac{Aw_1}{\sqrt{w_1^2 - c^2}} + \operatorname{Re}\frac{Bw_2}{\sqrt{w_2^2 - c^2}} \tag{1.2}$$

$$\tau_{xy} = -p \operatorname{Im}\frac{Aw_1}{\sqrt{w_1^2 - c^2}} - q \operatorname{Im}\frac{Bw_2}{\sqrt{w_2^2 - c^2}} \tag{1.3}$$

Здесь A и B – некоторые постоянные коэффициенты, $w_1 = x + ipy$, $w_2 = x + iqy$, $p = 1/\sqrt{k_1}$, $q = 1/\sqrt{k_2}$ и $k_{1,2}$ связаны с корнями характеристического уравнения, соответствующего обобщенному бигармоническому уравнению плоской задачи, и выражаются через упругие постоянные ортотропного материала следующим образом:

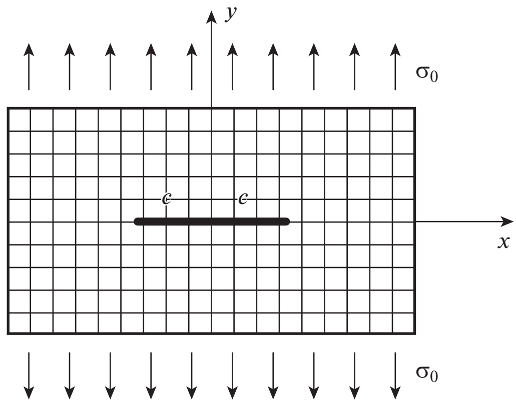

Рис. 1. Ортотропная пластина с трещиной

$$k_{1,2} = E_y\left(\frac{1}{2G_{xy}} - \frac{\nu_{yx}}{E_x}\right) \pm \sqrt{E_y^2\left(\frac{1}{2G_{xy}} - \frac{\nu_{yx}}{E_x}\right)^2 - \frac{E_y}{E_x}} \quad E_x\nu_{xy} = E_y\nu_{yx}$$

Примем $y = 0$ и рассмотрим интервал $-c < x < c$, соответствующий границам трещины (рис. 1). Из равенств (1.1), (1.2) следует, что на этом интервале $\sigma_x = \sigma_y = 0$. Выражение (1.3) позволяет заключить, что условие $\tau_{xy} = 0$ на границе трещины выполняется если

$$pA + qB = 0 \tag{1.4}$$

При $|x| \to \infty$ напряжение σ_y должно стремиться к σ_0 (рис. 1). Можно показать, что в пределе для любого луча $y = kx$ имеют место предельные соотношения

$$\lim_{x,y\to\infty} \frac{w_{1,2}}{\sqrt{w_{1,2}^2 - c^2}} = 1$$

В результате из условия $\sigma_y\left(|x| \to \infty\right) \to \sigma_0$ получим $A + B = \sigma_0$. Это условие совместно с уравнением (1.4) дает

$$A = -\frac{q\sigma_0}{p - q}, \quad B = \frac{p\sigma_0}{p - q} \tag{1.5}$$

Однако из равенства (1.1) следует, что при этих значениях коэффициентов σ_x также стремится не к нулю, а к σ_0 при $|x| \to \infty$. Для устранения этого эффекта на напряженное состояние пластины, соответствующее рис. 1, следует наложить сжатие в направлении оси x напряжением σ_0 [1]. Окончательно, из равенств (1.1)–(1.3) и (1.5) получим

$$\sigma_x = pq\sigma_0\left(\frac{p}{p-q}\mathrm{Re}\frac{w_1}{\sqrt{w_1^2 - c^2}} + \frac{q}{p-q}\mathrm{Re}\frac{w_2}{\sqrt{w_2^2 - c^2}} - 1\right)$$

$$\sigma_y = -\frac{\sigma_0}{p-q}\mathrm{Re}\left(\frac{qw_1}{\sqrt{w_1^2 - c^2}} - \frac{pw_2}{\sqrt{w_2^2 - c^2}}\right) \tag{1.6}$$

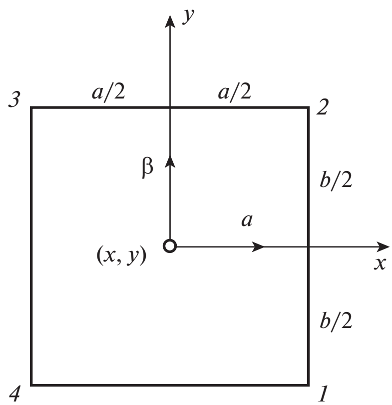

Рис. 2. Элемент пластины

$$\tau_{xy} = \frac{pq\sigma_0}{p-q}\operatorname{Im}\left(\frac{w_1}{\sqrt{w_1^2-c^2}} - \frac{w_2}{\sqrt{w_2^2-c^2}}\right)$$

На действительной оси при $y = 0$ и $x > c$ имеем

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{E_x}{E_y}}\sigma_0\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-c^2}} - 1\right) \tag{1.7}$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_0 x}{\sqrt{x^2-c^2}} \tag{1.8}$$

$$\tau_{xy} = 0$$

2. Уравнения плоской задачи обобщенной теории упругости. Обобщенная теория упругости позволяет получить регулярное решение задач, имеющих в рамках классической упругости сингулярное решение [2]. Для вывода соответствующих уравнений рассмотрим показанный на рис. 2 элемент, обладающий малыми, но конечными размерами a и b. Введем локальные координаты α и β такие, что $-a/2 \le \alpha \le a/2$, $-b/2 \le \beta \le b/2$. Симметричный тензор напряжений $t(t_x, t_y, t_{xy} = t_{yx})$ представим рядом Тейлора в окрестности точки (x, y), т.е.

$$\begin{gathered} t(x, y; \alpha, \beta) = t(x, y) + \alpha\frac{\partial t}{\partial x} + \beta\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{1}{2!}\left(\alpha^2\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + 2\alpha\beta\frac{\partial^2 t}{\partial x\partial y} + \beta^2\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right) + \\ + \frac{1}{3!}\left(\alpha^3\frac{\partial^3 t}{\partial x^3} + 3\alpha^2\beta\frac{\partial^3 t}{\partial x^2\partial y} + 3\alpha\beta^2\frac{\partial^3 t}{\partial x\partial y^2} + \beta^3\frac{\partial^3 t}{\partial y^3}\right) \end{gathered} \tag{2.1}$$

Ограничимся членами представленными в равенстве (2.1) и найдем равнодействующие напряжений, действующих на гранях 1-2 и 3-4 элемента, показанного на рис. 2. Принимая $\alpha = \pm a/2$ и подставляя разложение (2.1), получим

$$R_{3-4}^{1-2}(t) = \int_{-b/2}^{b/2} t\,d\beta = b\left[t \pm \frac{a}{2}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{1}{8}\left(a^2\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{b^2}{3}\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right) \pm \frac{a}{48}\left(a^2\frac{\partial^3 t}{\partial x^3} + b^2\frac{\partial^3 t}{\partial x\partial y^2}\right)\right](x, y)$$

Здесь $t = t(t_x, t_{xy})$ и символ (x, y) означает, что равнодействующие сил, действующих по граням 2-3 и 1-4 элемента получаются если взаимно заменить x, y; α, β и a, b. Уравнения равновесия элемента имеют вид

$$R_{1-2}(t_x) - R_{3-4}(t_x) + R_{2-3}(t_{yx}) - R_{1-4}(t_{yx}) = 0$$

$$R_{2-3}(t_y) - R_{1-4}(t_y) + R_{1-2}(t_{xy}) - R_{3-4}(t_{xy}) = 0$$

Подставляя сюда равнодействующие R, можно получить дифференциальные уравнения равновесия плоской задачи. Опуская дальнейшие преобразования, описанные в работе [2] для случая $a = b$, запишем уравнения равновесия в окончательной форме

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} = 0 \tag{2.2}$$

где

$$T(T_x, T_y, T_{xy}) = t - L(t), \quad L(f) = s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{2.3}$$

Здесь T — обобщенное напряжение, выражающееся через традиционное напряжение по формулам (2.3), а s и r — структурные параметры выражающиеся через размеры элемента a и b [2].

По аналогии с обобщенными напряжениями введем обобщенные деформации (рис. 2)

$$E_{xx} = \frac{1}{ab} \int_{-b/2}^{b/2} [u_x(x, y; \alpha = a/2, \beta) - u_x(x, y; \alpha = -a/2, \beta)] d\beta, \quad E_{xy} = \gamma_x + \gamma_y \quad (x, y)$$

$$\gamma_x = \frac{1}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} [u_x(x, y; \alpha, \beta = b/2) - u_x(x, y; \alpha, \beta = -b/2)] d\alpha \quad (x, y) \tag{2.4}$$

Здесь u — перемещение точки (x, y) (рис. 2). Предположим, что перемещения можно представить в окрестности точки (x, y) разложениями аналогичными равенству (2.1). Тогда обобщенные деформации (2.4) принимают следующую окончательную форму:

$$E_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial x}, \quad E_{yy} = \frac{\partial U_y}{\partial y}, \quad E_{xy} = \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \tag{2.5}$$

где

$$U(U_x, U_y) = u - L(u) \tag{2.6}$$

— обобщенное перемещение и L — оператор, определяемый вторым равенством (2.3).

Для ортотропного материала обобщенные напряжения связаны с обобщенными деформациями следующим образом:

$$T_x = \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \left(E_{xx} + \nu_{xy} E_{yy} \right) \quad (x, y), \quad T_{xy} = G_{xy} E_{xy} \tag{2.7}$$

При $r = s = 0$ соотношения (2.7) вырождаются в традиционный закон Гука. Упругие постоянные E, ν, G определятся из опытов, в которых напряженно-деформированное состояние материала является однородным. В этом случае оператор $L(f) = 0$ и обобщенные напряжения и деформации совпадают с традиционными. Таким образом, соотношения упругости (2.7) включают традиционные упругие постоянные. Кроме этого полученные соотношения содержат два структурных параметра s и r, которые определяются экспериментально применительно к рассматриваемой задаче.

Уравнения (2.2), (2.5) и (2.7) по форме совпадают с соответствующими уравнениями классической теории упругости, только вместо традиционных напряжений и перемещений t и u включают обобщенные характеристики T и U. В качестве решения системы (2.2), (2.5) и (2.7) можно использовать решение, соответствующее классической теории упругости, определяющее обобщенные напряжения и перемещения T, U. Традиционные напряжения и перемещения t, u находятся в результате интегрирования уравнений Гельмгольца (2.3) и (2.6). Если классическое решение не имеет особенностей и согласуется с экспериментом, то $s = r = 0$ и обобщенное решение вырождается в классическое. Если классическое решение имеет особенность, то решение дополнительного уравнения Гельмгольца позволяет ее устранить.

3. Обобщенное решение задачи о трещине. Как следует из равенств (1.6), сингулярность решения проявляется на оси трещины при $x = c$. В связи с этим воспользуемся частной формой уравнений обобщенной теории упругости, полученных в предыдущем разделе, приняв $b = dy$, т.е. предположим, что размер элемента, показанного на рис. 2, является конечным в направлении оси x и бесконечно малым – в направлении оси y. Тогда в полученных выше соотношениях необходимо принять $r = 0$. Как показано в работе [3] для изотропного материала, такой подход обладает удовлетворительной точностью по отношению к эксперименту и решению двумерной задачи [4]. Таким образом, уравнение (2.3) для напряжений $t_x = \sigma_x$ и $t_y = \sigma_y$ принимает вид

$$\sigma_x - s^2\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} = T_x, \quad \sigma_y - s^2\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2} = T_y \tag{3.1}$$

где в соответствие с равенствами (1.7) и (1.8)

$$T_x = \sqrt{\frac{E_x}{E_y}}\sigma_0\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - c^2}} - 1\right), \quad T_y = \frac{\sigma_0 x}{\sqrt{x^2 - c^2}} \tag{3.2}$$

Рассмотрим напряжение σ_y. Это напряжение не включает упругих постоянных, поэтому уравнение

$$\sigma_y - s^2\frac{d^2\sigma_y}{dx^2} = \frac{\sigma_0 x}{\sqrt{x^2 - c^2}}$$

аналогично соответствующему уравнению для изотропной пластины и его общее решение имеет вид [3]

$$\bar{\sigma}_y(\bar{x}) = C_1 e^{-\lambda\bar{x}} + C_2 e^{\lambda\bar{x}} + \frac{1}{2}\lambda\left(e^{-\lambda\bar{x}}\int\limits_1^{\bar{x}}\frac{\bar{x}e^{\lambda\bar{x}}d\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 - 1}} - e^{\lambda\bar{x}}\int\limits_1^{\bar{x}}\frac{\bar{x}e^{-\lambda\bar{x}}d\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 - 1}}\right)$$

Здесь $\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_0$, $\lambda = c/s$ и $\bar{x} = x/c$. Условие регулярности решения при $\bar{x} \to \infty$ выполняется если принять

$$C_2 = \lambda\int\limits_1^{\infty}\frac{\bar{x}e^{-\lambda\bar{x}}d\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 - 1}}$$

Определяя постоянную C_1 из условия на конце трещины $\bar{\sigma}_y(\bar{x} = 1) = 0$, окончательно получим следующее выражение для напряжения на оси $\bar{x}$ при $\bar{x} \geq 1$:

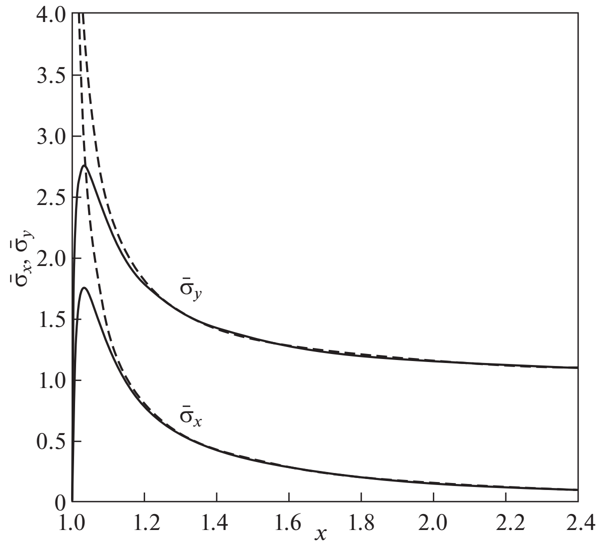

Рис. 3. Зависимость относительных напряжений от $\bar{x}$ при $\bar{x} \geq 1$

$$\bar{\sigma}_y(\bar{x}) = \frac{1}{2}\lambda\left(e^{-\lambda\bar{x}}\int_1^{\bar{x}}\frac{\bar{x}e^{\lambda\bar{x}}d\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2-1}} + e^{\lambda\bar{x}}\int_{\bar{x}}^{\infty}\frac{\bar{x}e^{-\lambda\bar{x}}d\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2-1}} - e^{\lambda(2-\bar{x})}\int_1^{\infty}\frac{\bar{x}e^{-\lambda\bar{x}}d\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2-1}}\right) \tag{3.3}$$

Решение первого уравнения (3.1) для σ_x имеет вид

$$\bar{\sigma}_x = \sqrt{\frac{E_x}{E_y}}\left[\bar{\sigma}_y(\bar{x}) - \sigma_0\right] \tag{3.4}$$

Решения (3.3) и (3.4), в отличие от классических решений (1.7) и (1.8), не являются сингулярными. Зависимости напряжений $\bar{\sigma}_{x,y}$от координаты $\bar{x} \geq 1$ при $\lambda = 50$ и показаны на рис. 3 сплошными линиями. Штриховые линии соответствуют классическому решению (1.7) и (1.8).

4. Экспериментальное исследование. Эксперимент проводился на пластинах из стеклотекстолита и углепластика, в которых направления армирования совпадают с осями x и y (рис. 1).

Упругие постоянные стеклотекстолита – $E_x = 23.6$ ГПа, $E_y = 27.5$ ГПа, $G_{xy} = 5.8$ ГПа, $\nu_{xy} = 0.1$, $\nu_{yx} = 0.116$. Пределы прочности при растяжении – $s_x = 340$ МПа и $s_y = 416$ МПа. Испытываемые пластины имели длину 250 мм, ширину 40 мм и толщину 1.12 мм. В середине продольного края растягиваемых пластин прорезались трещины с длиной 5, 10, 15 и 20 мм. Следует отметить, что эксперимент с боковой трещиной описывается здесь с помощью решения задачи о центральной трещине (рис. 1). Возможность такого подхода основана на асимптотическом анализе напряженного состояния вблизи конца трещины [5], согласно которому это состояние слабо зависит от условий нагружения вдали от трещины и формы трещины. На рис. 4 представлены диаграммы деформирования при растяжении пластин с трещинами различной длины в направлении оси y. Номера на кривых соответствуют длинам трещин в мм. Напряжение σ_0 измеряется в МПа, а величина Δ на горизонтальной оси определяет взаимное смещение в мм

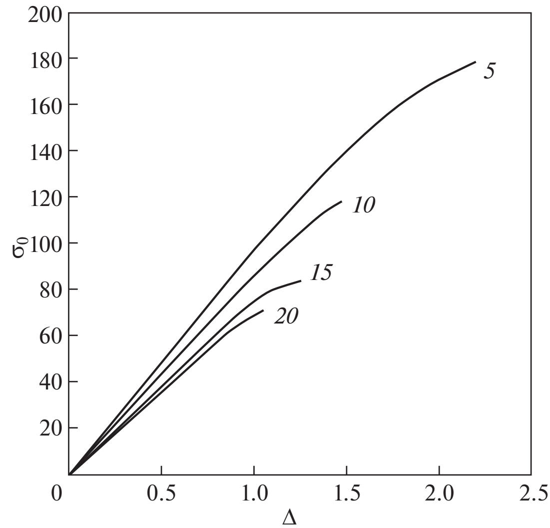

Рис. 4. Диаграмма деформирования пластин с трещинами различной длины

захватов испытательной машины на базе 175 мм. Максимальные напряжения, действующие в пластине вблизи трещины, представим следующим образом: $\sigma_x^m = k_x\sigma_o$ и $\sigma_y^m = k_y\sigma_0$, где k_x и k_y – коэффициенты концентрации напряжений в окрестности трещины. Используя решение (3.3) и (3.4) для экспериментальной пластины, можно построить зависимости k_x и k_y от параметра λ, показанные на рис. 5. Для оценки прочности пластины с трещиной используем квадратичный критерий прочности [6]

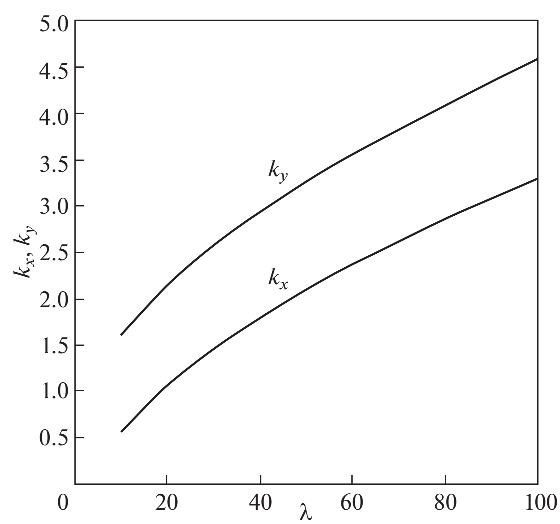

Рис. 5. Зависимости коэффициентов концентрации напряжений от параметра λ

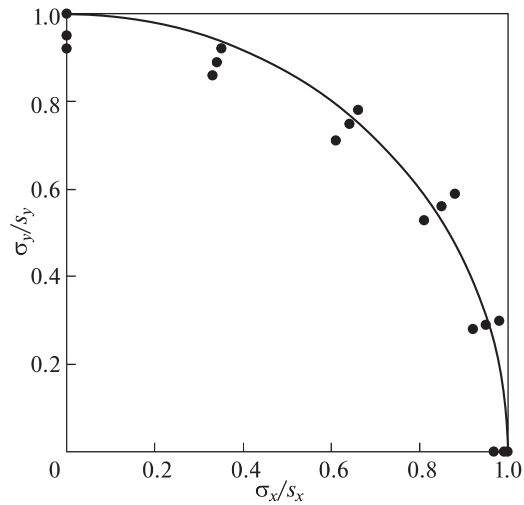

Рис. 6. Предельная кривая для стеклотекстолита (—) и результаты эксперимента (•)

$$\left(\frac{\sigma_x^m}{s_x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y^m}{s_y}\right)^2 = 1 \tag{4.1}$$

где $s_{x,y}$ – пределы прочности материала. Предельная кривая, соответствующая критерию (4.1), хорошо согласуется с экспериментом для стеклотекстолита (рис. 6). Выражая напряжения через коэффициенты концентрации и используя критерий (4.1), можно получить следующую зависимость для предельного напряжения, растягивающего пластину:

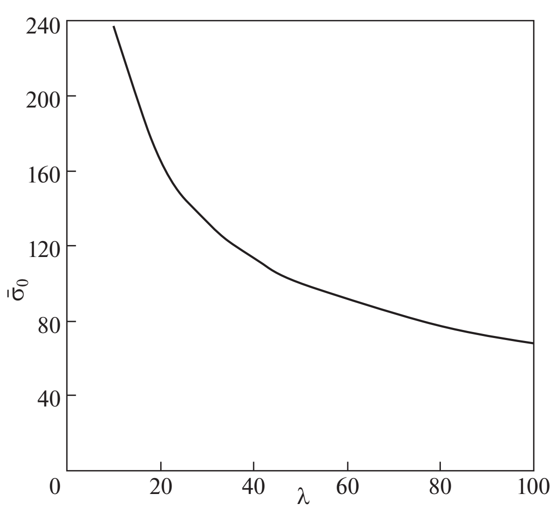

Рис. 7. Зависимость предельного напряжения $\bar{\sigma}_0$ [MPa] от параметра λ

Таблица 1. Расчетные и экспериментальные значения напряжений для пластин из стеклотекстолита с трещинами различной длины

Длина трещины c, мм	Параметр s, мм	Параметр λ	Расчетное предельное напряжение, МПа	Эксперим. предельное напряжение, МПа	Погрешность, %
10	0.25	40	114	118	3.4
15	0.25	60	90	84	7.1
20	0.25	80	78	71	9.8

Таблица 2. Расчетные и экспериментальные значения предельного напряжения для пластин из углепластика с трещинами различной длины

Длина трещины c, мм	Параметр s, мм	Параметр λ	Расчетное предельное напряжение, МПа	Эксперим. предельное напряжение, МПа	Погрешность, %
6	0.27	22.2	523	549	4.7
9	0.27	33.3	432	441	2
12	0.27	44.4	370	353	4.8

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k_x}{s_x}\right)^2 + \left(\frac{k_y}{s_y}\right)^2}}$$

Зависимость $\bar{\sigma}_0$, измеряемого в МПа, от параметра λ, построенная с помощью кривых, показанных на рис. 5, представлена на рис. 7.

Определение разрушающего напряжения $\bar{\sigma}_0$ осуществляется следующим образом. Для пластины с трещиной длиной 5 мм (кривая *5* на рис. 4) экспериментальное разрушающее напряжение составляет $\bar{\sigma}_0 = 179$ МПа. По графику на рис. 7 находим соответствующее значение параметра $\lambda = 20$ и масштабный коэффициент $s = c/\lambda = 0.25$ мм. Основная идея дальнейшего расчета заключается в том, что параметр s считается не зависящем от длины трещины. Тогда для пластины с трещиной длиной 10 мм получим $\lambda = c/s = 40$ и из рис. 7 следует $\bar{\sigma}_0 = 114$ МПа. Соответствующий экспериментальный результат (кривая *10* на рис. 4) – $\bar{\sigma}_0 = 118$ МПа. Результаты расчета представлены в табл. 1.

Как следует из табл. 1, предлагаемый метод удовлетворительно предсказывает разрушающее напряжение для пластин с трещинами. Следует заметить, что в последней пластине, для которой погрешность достигает 10%, длина трещины составляет половину ширины пластины.

Пластины из углепластика имели специальную гибридную структуру – они были образованы из однонаправленного углепластика, прошитого в поперечном направлении стеклянными нитями. Упругие постоянные материала необходимые для расчета – $E_x = 14$ ГПа, $E_y = 75.2$ ГПа. Пределы прочности при растяжении – $s_x = 170.5$ МПа, $s_y = 1150$ МПа. Ширина образцов – 30 мм, толщина – 1.5 мм. На продольных кромках растягиваемых образцов наносились трещины длиной 3, 6, 9 и 12 мм. Поскольку прочность и жесткость пластин при растяжении в продольном направлении (y, рис. 1) намного больше соответствующих характеристик для поперечного направления (x), для оценки прочности пластин из рассматриваемого материала может быть использован критерий максимальных напряжений. В этом случае для определения коэффициента концентрации напряжения может быть использована кривая для k_y на рис. 5. Расчет осуществляется методом, описанным выше. Для пластины с трещиной длиной 3 мм экспериментально получено предельное напряжение $\bar{\sigma}_0 = 690$ МПа, что соответствует коэффициенту концентрации напряжения $k_y = s_y/\bar{\sigma}_0 = 1.67$. По графику на рис. 5 находим $\lambda = 11$ и параметр $s = c/\lambda = 0.27$. Для пластины с длиной трещины 6 мм при найденной величине параметра s имеем $\lambda = c/s = 22.2$, что соответствует $k_y = 2.2$ и предельному напряжению $\bar{\sigma}_0 = 523$ МПа. Соответствующее экспериментальное значение – $\bar{\sigma}_0 = 549$ МПа. Результаты расчетов представлены в табл. 2.

Таблица 2 подтверждает удовлетворительную точность метода.

5. Заключение. Таким образом, согласно предлагаемому методу, задача расчета пластины с трещиной сводится к традиционной задаче о концентрации напряжений. Для пластины с заданными упругими характеристиками и длиной трещины экспериментально определяется масштабный параметр s, который считается независимым от длины трещины и определяет коэффициент концентрации напряжений в окрестности конца трещины.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 19-01-00355.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
2. *Васильев В.В., Лурье С.А.* Обобщенная теория упругости // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2015. № 4. С. 16–27.
3. *Васильев В.В., Лурье С.А.* Новое решение плоской задачи о равновесной трещине // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2016. № 5. С. 61–67.
4. *Васильев В.В., Лурье С.А.* Новый метод исследования хрупких тел с трещинами // Деформация и разрушение материалов. 2019. № 9. С. 12–19.
5. *Васильев В.В., Лурье С.А., Салов В.А.* Исследование прочности пластин с трещинами на основе критерия максимальных напряжений в масштабно-зависимой обобщенной теории упругости // Физическая мезомеханика. 2018. Т. 21. № 4. С. 5–12.
6. *Гольденблат И.И., Копнов В.А.* Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 192 с.