ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 6, с. 149–155

*УДК 539.3*

# ОЦЕНКА УЧЕТА МОМЕНТНЫХ СВОЙСТВ СРЕДЫ НА ПРИМЕРЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ


**Д. В. Тарлаковский[a,b,*], Нгуен Ван Лам[a,**]**

[a] *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия*

[b] *НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

**e-mail: tdvhome@mail.ru*

***e-mail: nvlammai2019@gmail.com*

Поступила в редакцию 28.02.2021 г.
После доработки 28.02.2021 г.
Принята к публикации 04.03.2021 г.

Дана оценка учета моментных свойств среды на примере нестационарной осесимметричной задачи о распространении возмущений от сферической полости в среде Коссера. С этой целью для перемещений и угла поворота выделяется упругие составляющие этих полей. Используются разложения искомых функций в ряды по полиномам Лежандра и Гегенбауэра, преобразование Лапласа по времени, а также метод малого параметра, в качестве которого используется коэффициент, характеризующий связь перемещений и угол поворота. Оригиналы регулярных составляющих решения вычисляются с помощью вычетов в линейном приближении по малому параметру. Приведены примеры расчетов для материала в виде зернистого композита из алюминиевой дроби в эпоксидной матрице. Показано, что количественные отличия практически отсутствуют, а качественно процессы в моментной и классической упругой среде существенно отличаются.

*Ключевые слова:* среда Коссера, сферическая полость, нестационарные осесимметричные возмущения, сравнение с упругим решением

**DOI:** 10.31857/S0572329921060143

**1. Введение.** С развитием современной науки и техники требуется исследование динамических процессов в композиционных материалах, которые широко применяются в различных конструкциях объектов, требуется использование моделей сплошных сред, отличных от традиционных. Таковыми являются упругие моментные среды, к которым, в том числе, относится модель Коссера [1].

Число работ, посвященных задачам нестационарной моментной теории упругости со сферической полостью, крайне ограничено. К ним относятся, например, работы [2–10]. В [2, 3] исследованы задачи о действии нестационарных осесимметричных кинематических возмущений на сферическую полость в среде Коссера. Аналогичные вопросы для упрощенной модели псевдоконтинуума Коссера рассмотрены в работах [4, 5]. В [6] дано исследование динамической связанной осесимметричной задачи микрополярной теории упругости для бесконечной в радиальном направлении изотропной среды. В статьях [7, 8] построены решения двумерных нестационарных задач для упругих моментных полупространства и полуплоскости. Осесимметричные задачи для упругих тел с несимметричным тензором напряжений со сферическими границами исследованы в работах [9, 10].

В то же время оценка учета моментных свойств среды фактически отсутствует. Этот вопрос и рассматривается в данной работе на примере задачи о распространении нестационарных осесимметричных возмущений от сферической полости в пространстве, занятом средой Коссера.

**2. Постановка задачи.** В пространстве, занятом средой Коссера [1], в сферической системе координат $r, \vartheta, \theta$ ($r \ge 0$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \vartheta < 2\pi$) с центром в точке $O$ и ортонормированным базисом $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\vartheta$, рассматривается движение абсолютно твердого шара радиуса $R$ вдоль оси $Oz$ прямоугольной декартовой системы координат по закону $z = Z(\tau)$, где $z = R\cos\theta$, $\tau$ – время.

В [2, 3] подробно изложена постановка более общей задачи о распространении осесимметричных кинематических возмущений от сферической полости в среде Коссера, включающая уравнения движения в потенциалах, связь перемещений с потенциалами, физические соотношения, нулевые начальные условия, требования ограниченности решения и граничные условия

$$w\big|_{r=1} = W_0(\theta,\tau), \quad v\big|_{r=1} = V_0(\theta,\tau), \quad \omega\big|_{r=1} = 0 \tag{2.1}$$

где левые части этих равенств – ненулевые компоненты векторов перемещения $\mathbf{u} = w(r,\theta,\tau)\mathbf{e}_r + v(r,\theta,\tau)\mathbf{e}_\theta$ и поворота $\boldsymbol{\omega} = \omega(r,\theta,\tau)\mathbf{e}_\vartheta$.

Здесь и далее используются безразмерные величины со следующими единицами измерения: длина – $R$, время – $R/c_1$, масса – $\rho R^3$, где $c_1$ – скорость распространения волн растяжения-сжатия, а $\rho$ – плотность среды.

При условии, что в рассматриваемом варианте движения шара он жестко сцеплен со средой, соответствующий вектор перемещения $\mathbf{u}$ и правые части первых двух равенств в (2.1) имеют вид:

$$\mathbf{u}\big|_{r=1} = Z\mathbf{k} = Z(\cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta), \quad W_0 = Z\cos\theta, \quad V_0(\theta,\tau) = -Z\sin\theta \tag{2.2}$$

где $\mathbf{k}$ – единичный направляющий вектор оси $Oz$.

**3. Решение задачи.** В [2, 3] кинематические параметры и компоненты напряженного состояния раскладываются в ряды по полиномам Лежандра $P_n(x)$ и Гегенбауэра $C_{n-1}^{3/2}(x)$ [11, 12]. Здесь приведем эти равенства только перемещения, угла поворота, правых частей граничных условий (2.1) и физических компонент $\sigma_{r\theta}$ и $\sigma_{\theta r}$ тензора напряжений:

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} w \\ W_0 \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix} w_n(r,\tau) \\ w_{0n}(\tau)\end{pmatrix}P_n(\cos\theta), \quad \begin{pmatrix} v \\ \omega \\ V_0\end{pmatrix} = -\sin\theta\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix} v_n(r,\tau) \\ \omega_n(r,\tau) \\ v_{0n}(\tau)\end{pmatrix}C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta) \\ \begin{pmatrix}\sigma_{r\theta} \\ \sigma_{\theta r}\end{pmatrix} = -\sin\theta\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix}\sigma_{r\theta n} \\ \sigma_{\theta rn}\end{pmatrix}C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta)\end{gathered} \tag{3.1}$$

Коэффициенты этих рядов для искомых функций записываются в виде сверток (они обозначены звездочкой):

$$\begin{gathered} w_n(r,\tau) = G_{wwn}(r,\tau) \cdot w_{0n}(\tau) + G_{wvn}(r,\tau) \cdot v_{0n}(\tau) \\ v_n(r,\tau) = G_{vwn}(r,\tau) \cdot w_{0n}(\tau) + G_{vvn}(r,\tau) \cdot v_{0n}(\tau) \\ \omega_n(r,\tau) = G_{\omega wn}(r,\tau) \cdot w_{0n}(\tau) + G_{\omega vn}(r,\tau) \cdot v_{0n}(\tau) \\ \sigma_{r\theta n}(r,\tau) = G_{\sigma r\theta wn}(r,\tau) \cdot w_{0n}(\tau) + G_{\sigma r\theta vn}(r,\tau) \cdot v_{0n}(\tau) \\ \sigma_{\theta rn}(r,\tau) = G_{\sigma\theta rwn}(r,\tau) \cdot w_{0n}(\tau) + G_{\sigma\theta rvn}(r,\tau) \cdot v_{0n}(\tau) \end{gathered} \tag{3.2}$$

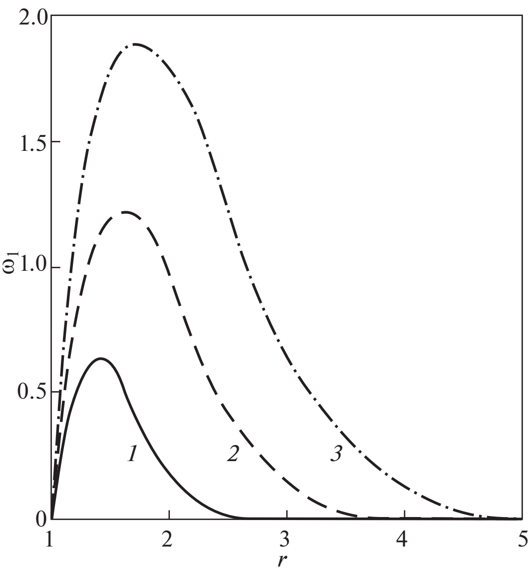


**Рис. 1.** Распределение функции $\omega_1(r,\tau)$ по радиусу в различные моменты времени: кривая *1* соответствует $\tau = 1.5$, *2* – $\tau = 2.5$, *3* – $\tau = 3.5$.

Ядра сверток в этих равенствах есть поверхностные функции влияния, а именно, $G_{wwn}$, $G_{vwn}$, $G_{\omega wn}$, $G_{\sigma r\theta wn}$ и $G_{\sigma\theta rwn}$ – коэффициенты $w_n$, $v_n$, $\omega_n$, $\sigma_{r\theta n}$ и $\sigma_{\theta rn}$, удовлетворяющие граничным условиям

$$w_n|_{r=1} = \delta(\tau), \quad v_n|_{r=1} = \omega_n|_{r=1} = 0$$

а $G_{wvn}$, $G_{vvn}$, $G_{\omega vn}$, $G_{\sigma r\theta vn}$ и $G_{\sigma\theta rvn}$ – аналогичные величины, для которых выполняются равенства

$$v_n|_{r=1} = \delta(\tau), \quad w_n|_{r=1} = \omega_n|_{r=1} = 0$$

Здесь $\delta(\tau)$ – дельта-функция Дирака [13].

Функции влияния определены в [2, 3] с помощью преобразования Лапласа в линейном приближении по малому параметру $\alpha$, характеризующему связь поля перемещений с углом поворота. При этом показано, что две из этих функций имеют сингулярные слагаемые:

$$\begin{gathered} G_{wwn}(r,\tau) = r^{-1}\delta(\tau - r + 1) + G_{wwnr}(r,\tau) \\ G_{vvn}(r,\tau) = r^{-1}\delta[\tau - \gamma_{1\alpha}(r-1)] + G_{vvnr}(r,\tau)\,\gamma_{1\alpha} = \gamma_1\sqrt{1-\alpha\gamma_1^2} \end{gathered} \tag{3.3}$$

где $\gamma_{1\alpha}$ и $\gamma_1$ – величины, обратные скоростям распространения волн свободного вращения и сдвига. При этом изображения (им соответствует индекс “$L$”) $G^L_{wwnr}(r,s)$, $G^L_{wwn}(r,s)$, $G^L_{vwnr}(r,s)$, $G^L_{vvnr}(r,s)$, $G^L_{\omega wn}(r,s)$ и $G^L_{\omega vn}(r,s)$ являются правильными рациональными функциями параметра преобразования $s$, что позволяет достаточно просто находить их оригиналы с помощью вычетов.

В случае прямолинейного движения шара с учетом равенств $C_0^{3/2}(x) = 1$ и $P_1(x) = x$ из (2.2) и (3.1) получаем

$$w_{00}(\tau)=0,\quad w_{01}(\tau)=Z(\tau),\quad v_{01}(\tau)=-Z(\tau),$$
$$w_{0n}(\tau)=v_{0n}(\tau)=0\quad(n\geq 2)\tag{3.4}$$

Следовательно, в рядах (3.1) для перемещений и угла поворота отличны от нуля только коэффициенты при $n = 1$:

$$w=w_1\cos\theta,\quad v=-v_1\sin\theta,\quad \omega=-\omega_1\sin\theta$$

При этом функции $w_1$, $v_1$ и $\omega_1$ в соответствии с (3.2) и (3.4) определяются так:

$$w_1(r,\tau)=r^{-1}Z(\tau-r+1)+\left[G_{ww1r}(r,\tau)-G_{wv1}(r,\tau)\right]\cdot Z(\tau)$$
$$v_1(r,\tau)=-r^{-1}Z\left[\tau-\gamma_{1\alpha}(r-1)\right]+\left[G_{vw1}(r,\tau)-G_{vv1r}(r,\tau)\right]\cdot Z(\tau)\tag{3.5}$$
$$\omega_1(r,\tau)=\left[G_{\omega w1}(r,\tau)-G_{\omega v1}(r,\tau)\right]\cdot Z(\tau)$$

На рис. 1 для примера приведены откорректированные по отношению к [3] графики распределения по радиусу функции $\omega_1$ в различные моменты времени. При этом полагается, что среда является зернистым композитом из алюминиевой дроби в эпоксидной матрице [14], а закон движения шара имеет вид $Z(\tau)=\tau_+$.

**4. Оценка учета моментных свойств.** Ее проведем для перемещений и угла поворота. При этом учитываем, что значение $\alpha = 0$ соответствует классическому упругому решению [2, 3]. Следовательно, разность

$$\mathbf{u}_c=\mathbf{u}-\mathbf{u}_e,\quad \mathbf{u}_e=\mathbf{u}\big|_{\alpha=0}=w_e(r,\theta,\tau)\,\mathbf{e}_r+v_e(r,\theta,\tau)\,\mathbf{e}_\theta\tag{4.1}$$

определяет вклад в перемещения особенностей модели моментной среды.

Оценку аналогичного вклада в вектор поворота проводим с помощью следующих величин:

$$\boldsymbol{\omega}_{ce}=\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}_e=\boldsymbol{\omega}_{cp}-\boldsymbol{\omega}_{pe}=\omega_{ce}\mathbf{e}_\vartheta,\quad \boldsymbol{\omega}_{cp}=\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}_p=\omega_{cp}\mathbf{e}_\vartheta$$
$$\boldsymbol{\omega}_{pe}=\boldsymbol{\omega}_p-\boldsymbol{\omega}_e=\omega_{pe}\mathbf{e}_\vartheta\tag{4.2}$$
$$2\boldsymbol{\omega}_e=\mathrm{rot}\,\mathbf{u}_e,\quad 2\boldsymbol{\omega}_p=\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$$

Отметим, что векторы $\boldsymbol{\omega}_e$ и $\boldsymbol{\omega}_p$ соответствуют моделям теории упругости и псевдоконтинуума Коссера [1].

Для соответствующих функций влияния вводим подобные (4.1) и (4.2) обозначения:

$$G_{\zeta ce}=G_\zeta-G_{\zeta e},\quad G_{\zeta e}=G_\zeta\big|_{\alpha=0}\quad(\zeta=wwnr,wvn,vwn,vvnr,\omega wn,\omega vn)$$
$$G_{\zeta cp}=G_\zeta-G_{\zeta p},\quad G_{\zeta pe}=G_{\zeta p}-G_{\zeta e}\quad(\zeta=\omega wn,\omega vn)\tag{4.3}$$

Сначала рассматриваем соответствующие перемещениям функции. В силу их аналитической зависимости от малого параметра $\alpha$ имеют место следующие соотношения:

$$G_{\zeta ce}(r,\tau)=O(\alpha),\quad \alpha\to 0\quad(\zeta=wwnr,wvn,vwn,vvnr)$$

Для координат векторов в (4.1)

$$w_{nce}=w_n-w_{ne},\quad v_{nce}=v_n-v_{ne},\quad w_{ne}=w_n\big|_{\alpha=0},\quad v_{ne}=v_n\big|_{\alpha=0}$$

из первых двух равенств в (3.5) получаем

$$w_{nce}(r,\tau)=G_{wwnrce}(r,\tau)\cdot w_{0n}(\tau)+G_{wvnce}(r,\tau)\cdot v_{0n}(\tau)$$
$$v_{nce}(r,\tau)=r^{-1}\left\{v_{0n}\left[\tau-\gamma_{1\alpha}(r-1)\right]-v_{0n}\left[\tau-\gamma_1(r-1)\right]\right\}+$$
$$+\,G_{vwnce}(r,\tau)\cdot w_{0n}(\tau)+G_{vvnrce}(r,\tau)\cdot v_{0n}(\tau)$$

Для разности в первом слагаемом во втором равенстве с учетом (3.3) при $\alpha\to 0$ справедливо соотношение

$$v_{0n}\left[\tau-\gamma_{1\alpha}(r-1)\right]-v_{0n}\left[\tau-\gamma_1(r-1)\right]=$$
$$=\frac{\gamma_1^3(r-1)}{2}\dot{v}_{0n}\left[\tau-\gamma_1(r-1)\right]\alpha+o(\alpha)=O(\alpha)$$

Следовательно, имеют место равенства $w_{nce}(r,\tau)$, $v_{nce}(r,\tau)=O(\alpha)$, $\alpha\to 0$, т.е. поправки, вносимые в перемещение за счет учета моментных свойств, имеют порядок $\alpha$.

Для оценки влияния учета моментных свойств на угол поворота, прежде всего, замечаем, что для ненулевой координаты вектора $\boldsymbol{\omega}_{pe}$ в (4.2) справедливо соотношение $\omega_{pe}(r,\tau)=O(\alpha)$, $\alpha\to 0$.

Очевидно, аналогичные оценки имеют место и для функций $G_{\omega wnpe}$, $G_{\omega vnpe}$:

$$G_{\omega wnpe}(r,\tau),\quad G_{\omega vnpe}(r,\tau)=O(\alpha),\quad \alpha\to 0 \tag{4.4}$$

Далее выражаем ненулевую координату вектора $\boldsymbol{\omega}_{cp}$ через перемещения:

$$\omega_{cp}=\omega-\frac{1}{2r}\left[\frac{\partial(rv)}{\partial r}-\frac{\partial w}{\partial\theta}\right]$$

При этом из формул для напряжений $\sigma_{r\theta}$ и $\sigma_{\theta r}$ в [2, 3] следует равенство

$$\sigma_{r\theta}-\sigma_{\theta r}=2\alpha\left[\frac{\partial(rv)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}-2\omega\right]=-4\alpha\omega_{cp}$$

Отсюда вытекает, что при любом $n\geq 1$ равенство справедливо соотношение $4\alpha\omega_{ncp}=\sigma_{\theta rn}-\sigma_{r\theta n}$. Следовательно, функции $G_{\omega bncp}$ $(b=w,v)$ можно вычислить так:

$$4\alpha G_{\omega wncp}=G_{\sigma\theta rwn}-G_{\sigma r\theta wn},\quad 4\alpha G_{\omega vncp}=G_{\sigma\theta rvn}-G_{\sigma r\theta vn} \tag{4.5}$$

Дальнейшие выкладки удобнее провести в пространстве преобразования Лапласа по времени. Используя построенные в [2, 3] изображения функций в правых частях равенств в (4.5), приходим к таким результатам:

$$G^L_{\omega bncp}(r,s)=\tilde{G}^L_{\omega bncp}(r,s)+O(\alpha)\quad(\alpha\to 0),\quad \tilde{G}^L_{\omega bncp}(r,s)=H^L_{\omega bncp}(r,s)e^{-\gamma_1(r-1)s}$$
$$H^L_{\omega wncp}(r,s)=\frac{\gamma_1^2R_{n0}(\gamma_1 rs)R_{n0}(s)}{2r^{n+1}Q_n(s)},\quad H^L_{\omega vncp}(r,s)=\frac{\gamma_1^2R_{n0}(\gamma_1 rs)R_{n1}(s)}{2r^{n+1}Q_n(s)}$$

где

$$s^2Q_n(s)=R_{n1}(x)R_{n3}(y)-n(n+1)R_{n0}(x)R_{n0}(y)$$
$$R_{n0}(z)=\sum_{k=0}^{n}A_{nk}z^{n-k},\quad A_{nk}=\frac{(n+k)!}{2^k(n-k)!\,k!},$$
$$R_{n3}(z)=R_{n1}(z)-R_{n0}(z),\quad R_{n1}(z)=R_{n+1,0}(z)-nR_{n0}(z)$$

Таким образом, для функций $G_{\omega wnce}$ и $G_{\omega vnce}$ с учетом (3.4) справедливы соотношения

$$G_{\omega bnce}(r,\tau)=G_{\omega bncp}(r,\tau)+G_{\omega bnpe}(r,\tau)=$$
$$=G_{\omega bncp}(r,\tau)+O(\alpha)=\tilde{G}_{\omega bncp}(r,\tau)+O(\alpha),\quad \alpha\to 0$$

С использованием их и обозначений (3.3) из третьего равенства в (2.2) с точностью до слагаемых порядка $\alpha$ определяем поправку, вносимую в угол поворота за счет учета моментных свойств:

$$\omega_{nce}(r,\tau)=G_{\omega wnce}(r,\tau)\cdot w_{0n}(\tau)+G_{\omega vnce}(r,\tau)\cdot v_{0n}(\tau)=$$
$$=G_{\omega wncp}(r,\tau)\cdot w_{0n}(\tau)+G_{\omega vncp}(r,\tau)\cdot v_{0n}(\tau)=$$
$$=\omega_{ncp}(r,\tau)=\tilde{G}_{\omega wncp}(r,\tau)\cdot w_{0n}(\tau)+\tilde{G}_{\omega vncp}(r,\tau)\cdot v_{0n}(\tau)$$

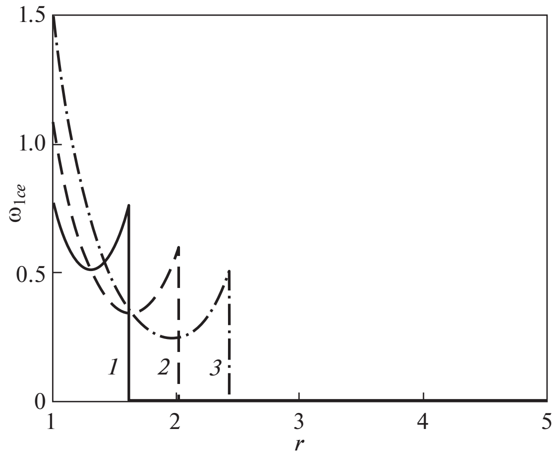


**Рис. 2.** Распределение поправки $\omega_{1ce}(r,\tau)$ по радиусу в различные моменты времени: кривая *1* соответствует $\tau = 1.5$, *2* – $\tau = 2.5$, *3* – $\tau = 3.5$.

Отсюда дополнительно следует, что поправки, вносимые моделями Коссера и псевдоконтинуума Коссера, в линейном приближении совпадают.

Для определения оригиналов функций $\tilde{G}_{\omega wncp}$ и $\tilde{G}_{\omega vncp}$ сначала выделяем целые части дробей $H^L_{\omega wncp}$ и $H^L_{\omega vncp}$ как функций параметра $s$:

$$H^L_{\omega wncp}(r,s) = \frac{\gamma_1}{2r} + H^L_{\omega wncpr}(r,s), \quad H^L_{\omega wncpr}(r,s) = H^L_{\omega wncp}(r,s) - \frac{\gamma_1}{2r}$$

$$s^{-1}H^L_{\omega vncp}(r,s) = \frac{\gamma_1}{2r} + H^L_{\omega vncpr}(r,s), \quad H^L_{\omega vncpr}(r,s) = s^{-1}H^L_{\omega vncp}(r,s) - \frac{\gamma_1}{2r}$$

Оригиналы регулярных составляющих $H^L_{\omega wncpr}$ и $H^L_{\omega vncpr}$ вычисляются с помощью вычетов. При этом оригиналы функций $\tilde{G}^L_{\omega wncp}$ и $\tilde{G}^L_{\omega vncp}$ определяются так (точка обозначает производную по времени):

$$\tilde{G}_{\omega wncp}(r,\tau) = \frac{\gamma_{1\alpha}}{2r}\delta\left[\tau - \gamma_1(r-1)\right] + G_{\omega wncpr},$$

$$\tilde{G}_{\omega vncp}(r,\tau) = \frac{\gamma_{1\alpha}}{2r}\dot{\delta}\left[\tau - \gamma_1(r-1)\right] + \dot{G}_{\omega vncpr}$$

$$G_{\omega wncpr}(r,\tau) = H_{\omega wncpr}\left[r, \tau - \gamma_1(r-1)\right] H\left[\tau - \gamma_1(r-1)\right]$$

$$G_{\omega vncpr}(r,\tau) = H_{\omega vncpr}\left[r, \tau - \gamma_1(r-1)\right] H\left[\tau - \gamma_1(r-1)\right]$$

где $H(\tau)$ – единичная функция Хевисайда [13].

Окончательно для поправки на угол поворота получаем следующий результат:

$$\omega_{nce}(r,\tau) = \frac{\gamma_1}{2r} w_{0n}\left[\tau - \gamma_1(r-1)\right] + G_{\omega wncpr}(r,\tau)\cdot w_{0n}(\tau) +$$

$$+ \frac{\gamma_1}{2r}\dot{v}_{0n}\left[\tau - \gamma_1(r-1)\right] + G_{\omega vncpr}(r,\tau)\cdot \dot{v}_{0n}(\tau)$$

На рис. 2 приведены графики распределения функции $\omega_{1ce}(r,\tau)$ по радиусу в различные моменты времени, соответствующие поступательному перемещению вдоль оси $Oz$ по закону $Z(\tau) = \tau_+$ жестко сцепленного с полостью абсолютно твердого шара. Они определяют поправку к результатам, изображенным на рис. 1.

Из них следует, что за исключением окрестности точки $r = 1$ поправка имеет порядок $10^{-3}$, т.е. 0.1%. При этом для выбранного закона движения имеются качественные отличия, а именно, $\omega_1(1,\tau) = 0$ и $\omega_{1ce}(1,\tau) \neq 0$, а также непрерывность функции $\omega_1(r,\tau)$ и наличие разрывов первого рода в графиках $\omega_{1ce}(r,\tau)$.

**5. Заключение.** В линейном приближении по малому параметру найдена вносимая с учетом моментных свойств среды поправка в нестационарной осесимметричной задаче о распространении возмущений от сферической полости в пространстве. Показано, что количественные отличия практически отсутствуют. В то же время качественно процессы в моментной и классической упругой среде существенно отличаются. Эти же выводы, вероятно, можно сделать и для задач с другими геометрией и граничными условиями.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. *Lam V. Nguyen, Tarlakovskii D.V.* Propagation of Non-stationary Axisymmetric Perturbations from a Spherical Cavity in Cosserat Medium // Advanced Structured Materials, V. 122. Nonlinear Wave Dynamics. Springer Nature Switzerland AG, 2020. P. 273–292.
3. *Тарлаковский Д.В., Нгуен Ван Лам.* Действие нестационарных осесимметричных кинематических возмущений на сферическую полость в среде Коссера // Упругость и неупругость. Матер. Междунар. научн. симпоз. по пробл. мех. деформ. тел, посвященного 110-летию со дня рождения А. А. Ильюшина. Москва 20–21 января 2021 года. М.: Изд-во Московского университета, 2021. С. 6–13.
4. *Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В.* Распространение нестационарных осесимметричных возмущений от поверхности шара, заполненного псевдоупругой средой Коссера // Электронный журнал “Труды МАИ”. 2012. № 53. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=29267.
5. *Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В.* Дифракция нестационарных волн на сферической полости в псевдоконтинууме Коссера // РЭНСИТ. 2013. Т. 5. № 1. С. 119–125.
6. *Saxena Hirdeshwar S., Dhaliwal Ranjit S.* Application of the eigen-number method to an axisymmetric coupled micropolar thermoelasticity // Bull. Pol. Acad. Sci. Techn. Sci. 1990. T. 38. № 1. P. 7–18.
7. *Белоносов С.М.* Моментная теория упругости. Владивосток: Дальнаука, 1993. 148 с.
8. *Большаков В.И., Андрианов И.В., Данишевский В.В.* Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры. Днепропетровск: “Пороги”, 2008. 196 с.
9. *Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В.* Континуальная теория асимметрической упругости. Равновесие изотропного тела // ФТТ. 1964. Т. 6. Вып. 9. С. 2689–2699.
10. *Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В.* Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // ФТТ. 1960. Т. 2. Вып. 7. С. 1399–1409.
11. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1108 с.
12. Справочник по специальным функциям. Под ред. *М. Абрамовица, И. Стиган.* М.: Наука, 1979. 832 с.
13. *Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В.* Волны в сплошных средах: Учеб. пособ.: Для вузов. М.: Физматлит, 2004. 472 с.
14. *Ерофеев В.И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во МГУ, 1999. 328 с.