ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 6, с. 130–138

УДК 539.4

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАМИЛЬТОНА–КЭЛИ

Е. В. Мурашкин[a,]*, Ю. Н. Радаев[a,]**

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*
**e-mail: evmurashkin@gmail.com*
***e-mail: y.radayev@gmail.com*

Поступила в редакцию 21.04.2021 г.
После доработки 24.04.2021 г.
Принята к публикации 26.04.2021 г.

В статье приводятся обобщения понятий векторного и смешанного произведения и указана их связь с фундаментальным ориентирующим скаляром, необходимых для построения алгебраической теории Гамильтона–Кэли в случае пространства произвольной заданной размерности n в псевдотензорном случае. В известных литературных источниках, касающихся механики деформируемого твердого тела, обычно рассматривается случай трехмерного пространства. Проведено доказательство теоремы Гамильтона–Кэли в псевдотензорной формулировке. Вес псевдотензора предполагается целым числом. Примерами здесь служат тензоры микрополярной теории упругости, в частности, гемитропной микрополярной упругости. Обсуждаются уравнения динамики гемитропного микрополярного континуума в терминах псевдотензоров.

Ключевые слова: псевдотензор, псевдоаффинор, фундаментальный орентирующий скаляр, косое произведение, инвариант, комитант, микрополярный гемитропный континуум

DOI: 10.31857/S0572329921060106

Вводные замечания. Модель гемитропной микрополярной теории упругости широко используется при моделировании био-, нано- и метаметриалов, например в механике сотовых конструкций (honeycomb structures), [1–3]. Одной из особенностей гемитропных материалов является существование зеркальных мод при распространении гармонических волн, что объясняется их чувствительностью к изменению ориентации пространства (зеркальным отражениям и инверсиям пространства). Следует отметить, что подавляющее большинство работ, посвященных этим исследованиям, обходят стороной вопросы применения псевдотензоров при описании гемитропных континуумов, несмотря на достаточную проработанность аппарата алгебры псевдотензоров [4–8]. Отметим, что построение определяющего упругого потенциала для гемитропного континуума возможно исключительно при использовании псевдотензорных формулировок, и только после этого возможен корректный переход к абсолютным тензорам и вывод уравнений микрополярной теории. Еще одним существенным аспектом является необходимость согласовывать баланс весов во всех уравнениях теории, особенно при использовании символов перестановок, которые можно трактовать одновременно как псевдотензоры весов $+1$ и -1.

Многочисленные руководства по тензорному анализу чаще всего обходят стороной вопросы, связанные с алгеброй псевдотензоров [9]. Ранее, в работах авторов [10–12] обсуждались вопросы применения алгебры псевдотензоров в трехмерном пространстве к задачам механики растущих тел и микрополярной теории упругости. В настоящей работе рассматривается более общий случай n-мерного евклидова пространства. Введены понятия фундаментального ориентирующего псевдоскаляра, косого и векторного произведений. Приводится доказательство известной алгебраической теоремы Гамильтона–Кэли в терминах псевдотензоров в n-мерном евклидовом пространстве. Следует отметить, что указанная теорема занимает центральное место в теории определяющих уравнений механики. Рассмотрены вопросы применения алгебры псевдотензоров при построении моделей гемитропного микрополярного тела. Определены веса основных тензоров, с которыми приходится сталкиваться в механике гемитропной микрополярной среды, в том числе определяющих псевдоскаляров. Приведены уравнения динамики гемитропного микрополярного континуума в терминах перемещений и микровращений в псевдотензорной формулировке.

1. Определение и основные формулы алгебры псевдотензоров. Рассмотрим в n-мерном пространстве две системы координат x^k и $\overline{x}^k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Преобразование относительного тензора веса W (псевдотензора веса W) от системы координат x^k к новой системе координат $\overline{x}^k$ осуществляется по закону [13, 14]

$$\overline{T}_{ij\ldots k}^{lm\ldots n} = \Delta^W (\partial_p \overline{x}^l)(\partial_q \overline{x}^m) \cdots (\partial_s \overline{x}^n)(\overline{\partial}_i x^a)(\overline{\partial}_j x^b) \cdots (\overline{\partial}_k x^c) T_{ab\ldots c}^{pq\ldots s} \tag{1.1}$$

где

$$\Delta = \det(\overline{\partial}_j x^i), \quad \partial_p = \frac{\partial}{\partial x^p}, \quad \overline{\partial}_p = \frac{\partial}{\partial \overline{x}^p}$$

Здесь черта сверху указывает на значение величины в новой системе координат $\overline{x}^k$ $(k = 1, 2, \ldots n)$, Δ – якобиан преобразования, W – вес псевдотензора. Отметим, что закон преобразования псевдотензоров отличается от закона преобразования абсолютных тензоров дополнительным множителем Δ^W. W – целое число, так как в противном случае значение Δ^W не будет однозначным.

Для псевдотензоров справедливы следующие утверждения:

1. Сумма двух псевдотензоров одинаковой валентности и веса будет псевдотензором той же валентности и веса

$$\overset{[W]}{A}{}^{ij}_{\cdot\cdot kl} = \overset{[W]}{B}{}^{ij}_{\cdot\cdot kl} + \overset{[W]}{C}{}^{ij}_{\cdot\cdot kl}$$

2. Тензорное произведение псевдотензоров (возможно, различных валентностей) дает псевдотензор с итоговым весом, равным сумме весов сомножителей

$$\overset{[W_1+W_2]}{A}{}^{ijpqs}_{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot klrtm} = \overset{[W_1]}{B}{}^{ij}_{\cdot\cdot kl} \overset{[W_2]}{C}{}^{pqs}_{\cdot\cdot\cdot rtm}$$

3. Результатом свертки псевдотензора будет псевдотензор того же веса. В том числе, полная свертка псевдотензора веса W будет псевдоскаляром того же веса.

2. Фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр в n-мерном пространстве. Фундаментальным понятием многомерной геометрии является относительный ковариантный n-вектор (антисимметричный псевдотензор валентности n с компонентами $\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ [4, 15]) веса –1, с единственной существенной компонентой

$$\epsilon_{12\ldots n} = 1$$

Относительный контравариантный n-вектор $\epsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ задается аналогично, но имеет противоположный вес +1. Тензоры $\epsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ и $\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ называются также символами перестановок.

Свертка антисимметричного тензора $e_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ с n абсолютными векторами $\underset{1}{\mathbf{a}}, \underset{2}{\mathbf{a}}, \mathbf{a}, \ldots, \underset{n}{\mathbf{a}}$

$$e_{i_1 i_2 \ldots i_n} \underset{1}{a}^{i_1} \underset{2}{a}^{i_2} \ldots \underset{n}{a}^{i_n} \tag{2.1}$$

где $e_{i_1 i_2 \ldots i_n} = e\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, $e = e_{12 \ldots n}$ – псевдоскаляр веса $+1$, называется косым произведением и обозначается

$$\ulcorner \underset{1}{\mathbf{a}}, \underset{2}{\mathbf{a}}, \ldots, \underset{n}{\mathbf{a}} \lrcorner \tag{2.2}$$

При положительном значении косого произведения (2.1) систему n векторов называют правой, а при отрицательном – левой. Косое произведение абсолютных векторов является абсолютным скаляром.

Значение косого произведения (2.1) может быть вычислено в детерминантной форме

$$\ulcorner \underset{1}{\mathbf{a}}, \underset{2}{\mathbf{a}}, \ldots, \underset{n}{\mathbf{a}} \lrcorner = e \det(\underset{c}{a}^{i}) = e \begin{vmatrix} \underset{1}{a}^1 & \underset{2}{a}^1 & \ldots & \underset{n}{a}^1 \\ \underset{1}{a}^2 & \underset{2}{a}^2 & \ldots & \underset{n}{a}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underset{1}{a}^n & \underset{2}{a}^n & \ldots & \underset{n}{a}^n \end{vmatrix} \tag{2.3}$$

Если свернуть антисимметричный тензор $e_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ с $(n-1)$ абсолютными векторами $\underset{1}{\mathbf{a}}, \underset{2}{\mathbf{a}}, \ldots, \underset{n-1}{\mathbf{a}}$, то получим абсолютный вектор

$$b_i = e_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i} \underset{1}{a}^{i_1} \underset{2}{a}^{i_2} \ldots \underset{n-1}{a}^{i_{n-1}} \tag{2.4}$$

который называется векторным произведением указанных векторов.

При свертке $(n-1)$ абсолютного вектора $\underset{1}{\mathbf{a}}, \underset{2}{\mathbf{a}}, \ldots, \underset{n-1}{\mathbf{a}}$ с антисимметричным относительным тензором $\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ получим ковариантный псевдовектор веса -1

$$\overset{[-1]}{b_i} = \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i} \underset{1}{a}^{i_1} \underset{2}{a}^{i_2} \ldots, \underset{n-1}{a}^{i_{n-1}} \tag{2.5}$$

Косое и векторное произведения связаны соотношением

$$\ulcorner \underset{1}{\mathbf{a}}, \underset{2}{\mathbf{a}}, \ldots, \underset{n}{\mathbf{a}} \lrcorner = \left[\underset{1}{\mathbf{a}}, \underset{2}{\mathbf{a}}, \ldots, \underset{n-1}{\mathbf{a}} \right] \cdot \underset{n}{\mathbf{a}} \tag{2.6}$$

Если в качестве системы векторов $\underset{1}{\mathbf{a}}, \underset{2}{\mathbf{a}}, \ldots, \underset{n}{\mathbf{a}}$ принять векторы ковариантного базиса $\underset{1}{\imath}, \underset{2}{\imath}, \ldots, \underset{n}{\imath}$, в n-мерном пространстве, то на основании (4) находим

$$\ulcorner \underset{1}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}, \ldots, \underset{n}{\boldsymbol{\imath}} \lrcorner = e \tag{2.7}$$

поскольку $\det(\underset{c}{\imath}^{i}) = 1$, что позволяет назвать e фундаментальным ориентирующим псевдоскаляром и разделить правые и левые локальные базисные системы.

Учитывая формулы Лагранжа–Грамма–Шмидта, приходим к

$$e^2 = \lceil \underset{1}{\imath}, \underset{2}{\imath}, \ldots, \underset{n}{\imath} \rfloor^2 = \begin{vmatrix} \underset{1}{\imath}\cdot\underset{1}{\imath} & \underset{1}{\imath}\cdot\underset{2}{\imath} & \ldots & \underset{1}{\imath}\cdot\underset{n}{\imath} \\ \underset{2}{\imath}\cdot\underset{1}{\imath} & \underset{2}{\imath}\cdot\underset{2}{\imath} & \ldots & \underset{2}{\imath}\cdot\underset{n}{\imath} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underset{n}{\imath}\cdot\underset{1}{\imath} & \underset{n}{\imath}\cdot\underset{2}{\imath} & \ldots & \underset{n}{\imath}\cdot\underset{n}{\imath} \end{vmatrix} = \det(g_{ij}) = g \tag{2.8}$$

Откуда следует, что g является псевдоскаляром веса +2, а также $e = \sqrt{g}$ для правоориентированного базиса и $e = -\sqrt{g}$ для левориентированного базиса.

В трехмерном пространстве e определяется смешанным произведением базисных векторов

$$e = \overset{[+1]}{e} = \lceil \underset{1}{\imath}, \underset{2}{\imath}, \underset{3}{\imath} \rfloor = (\underset{1}{\imath}\cdot\underset{2}{\imath})\cdot\underset{3}{\imath} \tag{2.9}$$

а фундаментального ориентирующего псевдоскаляра отрицательного веса −1 есть

$$\frac{1}{e} = \overset{[-1]^{-1}}{e} = \lceil \overset{1}{\imath}, \overset{2}{\imath}, \overset{3}{\imath} \rfloor = (\overset{1}{\imath}\cdot\overset{2}{\imath})\cdot\overset{3}{\imath} \tag{2.10}$$

Отметим, что фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр позволяет легко преобразовывать псевдотензоры в абсолютные тензоры. Введем тензор $\mathbf{T}$ согласно

$$\mathbf{T} = e^{-W}\overset{[W]}{\mathbf{T}} \tag{2.11}$$

Подсчитывая баланс весов, приходим к заключению о том, что $\mathbf{T}$ является абсолютным тензором, а соотношение (2.11) позволяет легко преобразовать полином Гамильтона—Кэли к псевдотензорной форме [11].

3. Уравнение Гамильтона—Кэли для псевдотензора второго ранга. Рассмотрим псевдотензор второй валентности (псевдоаффинор), заданный своими смешанными компонентами $\overset{[W]}{T}{}^{j\cdot}_{\cdot k}$ $(j, k = \overline{1, n})$, веса W в n-мерном пространстве. Простейшим псевдоинвариантом веса [W] псевдоаффинора $\overset{[W]}{T}{}^{j\cdot}_{\cdot k}$ является его псевдослед (имеющий вес W)

$$\underset{1}{\overset{[W]}{S}} = \mathrm{tr}\,\overset{[W]}{\mathbf{T}} = \overset{[W]}{T}{}^{j\cdot}_{\cdot j} \tag{3.1}$$

С помощью псевдоследов степеней $\overset{[W]}{T}{}^{j\cdot}_{\cdot k}$ можно определить систему псевдоинвариантов псевдоаффинора $\overset{[W]}{T}{}^{j\cdot}_{\cdot k}$:

$$\underset{k}{\overset{[kW]}{S}} = \mathrm{tr}\,\overset{[kW]}{\mathbf{T}}{}^{k} = \overset{[W]}{T}{}^{j_1\cdot}_{\cdot j_2}\,\overset{[W]}{T}{}^{j_2\cdot}_{\cdot j_3}\cdots\overset{[W]}{T}{}^{j_{k-1}\cdot}_{\cdot j_k}\,\overset{[W]}{T}{}^{j_k\cdot}_{\cdot j_1} \quad (k = 2, 3, 4, \ldots, n) \tag{3.2}$$

Другой системой псевдоинвариантов будет

$$\underset{1}{\overset{[W]}{\mathrm{I}}} = \overset{[W]}{T}{}^{j\cdot}_{\cdot j} = \mathrm{tr}\,\overset{[W]}{\mathbf{T}}, \quad k!\,\underset{k}{\overset{[kW]}{\mathrm{I}}} = \overset{[W]}{T}{}^{i_1\cdot}_{\cdot [i_1}\,\overset{[W]}{T}{}^{i_2\cdot}_{\cdot i_2}\cdots\overset{[W]}{T}{}^{i_k\cdot}_{\cdot i_k]} \quad (k = 2, 3, 4, \ldots, n) \tag{3.3}$$

Здесь в квадратные скобки заключены индексы по которым выполняется операция альтернирования:

$$k!\overset{[kW]}{\underset{k}{\mathrm{I}}} = \overset{[W]}{T}{}^{i_1\cdot}_{\cdot[i_1}\overset{[W]}{T}{}^{i_2\cdot}_{\cdot i_2}\cdots\overset{[W]}{T}{}^{i_k\cdot}_{\cdot i_k]} = \boldsymbol{\delta}^{i_1i_2\ldots i_k}_{j_1j_2\ldots j_k}\overset{[W]}{T}{}^{j_1\cdot}_{\cdot i_1}\overset{[W]}{T}{}^{j_2\cdot}_{\cdot i_2}\cdots\overset{[W]}{T}{}^{j_k\cdot}_{\cdot i_k} \tag{3.4}$$

Абсолютный тензор $\boldsymbol{\delta}^{j_1j_2\ldots j_k}_{i_1i_2\ldots i_k}$, называемый обобщенной дельтой Кронекера, определяется в n-мерном пространстве для $k \le n$ согласно правилу

$$\boldsymbol{\delta}^{j_1j_2\ldots j_k}_{i_1i_2\ldots i_k} = \begin{cases} +1, & \text{если } j_1j_2\ldots j_k \text{ различные натуральные числа } 1,2,\ldots,n \\ & \text{и если } i_1i_2\ldots i_k \text{ является четной перестановкой } j_1j_2\ldots j_k \\ -1, & \text{если } j_1j_2\ldots j_k \text{ различные натуральные числа } 1,2,\ldots,n \\ & \text{и если } i_1i_2\ldots i_k \text{ является нечетной перестановкой } j_1j_2\ldots j_k \\ 0, & \text{во всех остальных случаях} \end{cases} \tag{3.5}$$

Несложно заметить, что в n-мерном пространстве

$$\varepsilon_{i_1i_2\ldots i_n} = \delta^{12\ldots n}_{i_1i_2\ldots i_n}, \quad \varepsilon_{i_1i_2\ldots i_n}\varepsilon^{j_1j_2\ldots j_n} = \delta^{j_1j_2\ldots j_n}_{i_1i_2\ldots i_n}, \quad \delta^{j_1j_2\ldots j_m}_{i_1i_2\ldots i_m} = 0 \quad (m > n). \tag{3.6}$$

Псевдоинварианты $\overset{[kW]}{\underset{k}{\mathrm{I}}}$ являются полиномами от $\overset{[W]}{\underset{1}{S}}, \overset{[W]}{\underset{2}{S}}, \ldots, \overset{[kW]}{\underset{k}{S}}$, причем $\overset{[kW]}{\underset{k}{S}}$ входит в них в первой степени. Верно и обратное утверждение: псевдоинварианты $\overset{[kW]}{\underset{k}{S}}$ определяются полиномиальной зависимостью от $\overset{[kW]}{\underset{k}{S}}$.

Псевдоинвариант $\overset{[2W]}{\underset{2}{\mathrm{I}}}$, определенный формулой (3.4), вычисляется по формуле

$$2\overset{[2W]}{\underset{2}{\mathrm{I}}} = \delta^{i_1i_2}_{j_1j_2}\overset{[W]}{T}{}^{j_1\cdot}_{\cdot i_1}\overset{[W]}{T}{}^{j_2\cdot}_{\cdot i_2} \tag{3.7}$$

и равен сумме слагаемых вида

$$\delta^{i_1i_2}_{j_1j_2}\overset{[W]}{T}{}^{j_1\cdot}_{\cdot i_1}\overset{[W]}{T}{}^{j_2\cdot}_{\cdot i_2} = \overset{[W]}{T}{}^{i_1\cdot}_{\cdot i_1}\overset{[W]}{T}{}^{i_2\cdot}_{\cdot i_2} - \overset{[W]}{T}{}^{i_1\cdot}_{\cdot i_2}\overset{[W]}{T}{}^{i_2\cdot}_{\cdot i_1} \tag{3.8}$$

Суммы пар слагаемых $\delta^{i_1i_2}_{j_1j_2}\overset{[W]}{T}{}^{j_1\cdot}_{\cdot i_1}\overset{[W]}{T}{}^{j_2\cdot}_{\cdot i_2}$ и $\delta^{i_12i_1}_{j_1j_2}\overset{[W]}{T}{}^{j_1\cdot}_{\cdot i_2}\overset{[W]}{T}{}^{j_2\cdot}_{\cdot i_1}$ равны главным минорам определителя $\det(\overset{[W]}{T}{}^{j\cdot}_{\cdot k})$, полученным вычеркиванием всех строк и столбцов кроме строк и столбцов с индексами j_1 и j_2. Тогда псевдоинвариант $\overset{[2W]}{\underset{2}{\mathrm{I}}}$ равен сумме всех главных миноров второго порядка определителя $\det(\overset{[W]}{T}{}^{j\cdot}_{\cdot k})$.

Аналогично можно показать, что псевдоинвариант $\overset{[kW]}{\underset{k}{\mathrm{I}}}$ равен сумме всех главных миноров k-го порядка определителя $\det(\overset{[W]}{T}{}^{j\cdot}_{\cdot i})$. В частности, $\overset{[nW]}{\underset{n}{\mathrm{I}}} = \det(\overset{[W]}{T}{}^{j\cdot}_{\cdot i})$.

Введем комитанты $\overset{[kW]}{\underset{k}{C}}{}^{i}_{\cdot j}$ псевдоаффинора $\overset{[W]}{T}{}^{i\cdot}_{\cdot j}$, задающиеся согласно формуле [4]

$$\overset{[kW]}{\underset{k}{C}}{}^{i\cdot}_{\cdot j} = \frac{(-1)^k(k+1)}{k!}\delta^{i_1i_2\ldots i_ki}_{j_1j_2\ldots j_kj}\overset{[W]}{T}{}^{j_1\cdot}_{\cdot i_1}\overset{[W]}{T}{}^{j_2\cdot}_{\cdot i_2}\cdots\overset{[W]}{T}{}^{j_k\cdot}_{\cdot i_k} \tag{3.9}$$

Комитанты $\underset{k}{\overset{[kW]}{C}}{}^{i\cdot}_{\cdot j}$ можно выразить через степени аффинора и псевдоинварианты $\underset{p}{\overset{[pW]}{I}}$ $(p \le k)$. Так например, для $\underset{1}{\overset{[W]}{C}}{}^{i\cdot}_{\cdot j}$ получим

$$\underset{1}{\overset{[W]}{C}}{}^{i\cdot}_{\cdot j} = -\overset{[W]}{T}{}^{i_1\cdot}_{\cdot i_1}\delta^i_j + \overset{[W]}{T}{}^{i_1\cdot}_{\cdot j}\delta^i_{i_1} = \overset{[W]}{T}{}^{i\cdot}_{\cdot j} - \overset{[W]}{T}{}^{i_1\cdot}_{\cdot i_1}\delta^i_j \tag{3.10}$$

Воспользуемся формулой

$$\begin{aligned}\underset{k}{\overset{[kW]}{C}}{}^{i\cdot}_{\cdot j} = \frac{(-1)^k}{k!}\Big(&\delta^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}\overset{[W]}{T}{}^{j_1\cdot}_{\cdot i_1}\overset{[W]}{T}{}^{j_2\cdot}_{\cdot i_2}\cdots\overset{[W]}{T}{}^{j_k\cdot}_{\cdot i_k}\delta^i_j - \\ &-\delta^{i_2 i_3 \cdots i_k i}_{j_2 j_3 \cdots j_k j_1}\overset{[W]}{T}{}^{j_1\cdot}_{\cdot j}\overset{[W]}{T}{}^{j_2\cdot}_{\cdot i_2}\overset{[W]}{T}\,T^{j_3\cdot}_{\cdot i_3}\cdots\overset{[W]}{T}{}^{j_k\cdot}_{\cdot i_k} - \\ &-\delta^{i_1 i_3 \ldots i_k i}_{j_1 j_3 \ldots j_k j_2}\overset{[W]}{T}{}^{j_2\cdot}_{\cdot j}\overset{[W]}{T}{}^{j_1\cdot}_{\cdot i_1}\overset{[W]}{T}{}^{j_3\cdot}_{\cdot i_3}\cdots\overset{[W]}{T}{}^{j_k\cdot}_{\cdot i_k} - \\ &-\delta^{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i}_{j_1 j_2 \ldots j_{k-1} j_k}\overset{[W]}{T}{}^{j_1\cdot}_{\cdot i_1}\overset{[W]}{T}{}^{j_2\cdot}_{\cdot i_2}\cdots\overset{[W]}{T}{}^{j_{k-1}\cdot}_{\cdot i_{k-1}}\overset{[W]}{T}{}^{j_k\cdot}_{\cdot j}\Big)\end{aligned} \tag{3.11}$$

Заметим, что все слагаемые в правой части равенства (3.11), начиная с третьего слагаемого, равны второму слагаемому. Поэтому, равенство (3.11) с учетом определений $\underset{k}{\overset{[kW]}{\mathrm{I}}}$ и $\underset{k-1}{\overset{[(k-1)W]}{C}}{}^{i\cdot}_{\cdot i_1}$ можно записать в виде

$$\underset{k}{\overset{[kW]}{C}}{}^{i\cdot}_{\cdot j} = (-1)^k\underset{k}{\overset{[kW]}{\mathrm{I}}}\delta^i_j + \underset{k-1}{\overset{[(k-1)W]}{C}}{}^{i\cdot}_{\cdot i_1}\overset{[W]}{T}{}^{i_1\cdot}_{\cdot j} \tag{3.12}$$

Продолжая по индукции и вводя прямую тензорную запись, получим

$$\underset{k}{\overset{[kW]}{\mathbf{C}}} = \overset{[W]}{\mathbf{T}}{}^k - \underset{1}{\overset{[W]}{\mathrm{I}}}\overset{[W]}{\mathbf{T}}{}^{k-1} + \underset{2}{\overset{[2W]}{\mathrm{I}}}\overset{[W]}{\mathbf{T}}{}^{k-2} - \cdots + (-1)^k\underset{k}{\overset{[kW]}{\mathrm{I}}}\overset{[0]}{\mathbf{I}} \tag{3.13}$$

При $k = n$ правая часть равенства (3.9) содержит операцию альтернирования по $n+1$ индексу и поэтому равна нулю, т.е.

$$\underset{n}{\overset{[nW]}{\mathbf{C}}} = \overset{[nW]}{\mathbf{0}} = \overset{[W]}{\mathbf{T}}{}^n - \underset{1}{\overset{[W]}{\mathrm{I}}}\overset{[W]}{\mathbf{T}}{}^{n-1} + \underset{2}{\overset{[2W]}{\mathrm{I}}}\overset{[W]}{\mathbf{T}}{}^{n-2} - \cdots + (-1)^n\underset{n}{\overset{[nW]}{\mathrm{I}}}\overset{[0]}{\mathbf{I}} \tag{3.14}$$

Соотношение (3.14) означает справедливость уравнения Гамильтона–Кэли для псевдотензоров в случае n-мерного пространства[1]. Другое доказательство, приведенное в [11] для случая трехмерного евклидова пространства, может быть также обобщено на многомерный случай.

4. Гемитропное микрополярное тело. Линейная микрополярная теория гемитропного тела корректно может быть развита только в терминах относительных тензоров. Известные из литературных источников формулировки теории гемитропного микрополярного тела в терминах абсолютных тензоров корректно получаются только из псевдотензорных формулировок [10, 12], но ни в коем случае не наоборот. Приведем в

[1] На самом деле, при выводе уравнения Гамильтона–Кэли нами не использовалось понятие евклидовой метрики пространства, что означает справедливость уравнения (3.14) в случае произвольного n-мерного пространства

Таблица 1. Основные псевдотензоры микрополярной теории упругости

Терминологическое обозначение	Корневое символьное обозначение	Вес	Преобразование к абсолютному тензору
метрический тензор	g_{ij}	0	
фундаментальный тензор	g^{ij}	0	
детерминант метрического тензора	g	+2	$\overset{[+2]}{g} = e^2$
тензор перестановок	ε^{ijk}	+1	$e^{ijk} = \frac{1}{e}\overset{[+1]}{\varepsilon}{}^{ijk}$
тензор перестановок	ε_{ijk}	−1	$e_{ijk} = e\overset{[-1]}{\varepsilon}{}_{ijk}$
фундаментальный ориентирующий скаляр	e	+1	$\overset{[+1]}{e} = e$
фундаментальный ориентирующий скаляр	$\frac{1}{e}$	−1	$\overset{[-1]}{e}{}^{-1} = \frac{1}{e}$
естественный элемент объема	$d\tau$	−1	$dV = e\overset{[-1]}{d\tau}$
инвариантный элемент объема	dV	0	
набла Гамильтона	∇_i	0	
вектор перемещений	u^k	0	
ассимметричный тензор деформаций	ε_{ij}	0	
тензор малых деформаций	$\varepsilon_{(ij)} = \varepsilon_{ij}$	0	
вектор поверхностных сил	$t^k = n_i\sigma^{ik}$	0	
тензор силовых напряжений	σ^{ik}	0	
объемные силы	X^{k}	0	
упругий потенциал	$\mathcal{U}$	0	
плотность	ρ	0	
вектор поверхностных моментов	$m_k = n_i\mu^{i\cdot}_{\cdot k}$	−1	$m_k = e\overset{[-1]}{m_k}$
тензор моментных напряжений	$\mu^{i\cdot}_{\cdot k}$	−1	$\mu^{i\cdot}_{\cdot k} = e\overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$
ассоциированный вектор моментных напряжений	μ^i	0	
ассоциированный вектор силовых напряжений	τ_k	−1	$\tau_k = e\overset{[-1]}{\tau}{}_k$
объемные моменты	Y_{k}	−1	$Y_k = e\overset{[-1]}{Y}{}_k$
коэффициент микроинерции	$\mathfrak{J}$	−2	$\mathfrak{J} = e^2\overset{[-2]}{\mathfrak{J}}$

Таблица 1. Окончание

Терминологическое обозначение	Корневое символьное обозначение	Вес	Преобразование к абсолютному тензору
тензор микроповоротов	Ω_{ik}	0	
вектор микровращений	ϕ^i	+1	$\phi^i = \frac{1}{e}\overset{[+1]}{\phi}{}^i$
тензор деформации изгиба—кручения	$\kappa_{i\cdot}^{\cdot s}$	+1	$\kappa_{i\cdot}^{\cdot s} = \frac{1}{e}\overset{[+1]}{\kappa}{}_{i\cdot}^{\cdot s}$
сопутствующий вектор деформации изгиба—кручения	κ_i	0	

табл. 1 основные псевдотензорные величины теории микрополярной упругости с указанием их веса.

Следуя обозначениям, принятым в работах [12, 16], уравнения динамики микрополярного тела можно принять в виде

$$\nabla_i \sigma^{ik} = \rho \partial_{\cdot\cdot} u^k \tag{4.1}$$

$$\nabla_i \overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k} - 2\overset{[-1]}{\tau}{}^{i\cdot}_{k} = \overset{[-2]}{\Im}\, \partial_{\cdot\cdot} \overset{[+1]}{\varphi}{}^k \tag{4.2}$$

В терминах перемещений и микровращений уравнения динамики (4.2) для гемитропного микрополярного тела в псевдотензоной формулировке можно принять в виде [12, 16]

$$\begin{gathered}
G[(1 + e^2 \overset{[-2]}{c}_1)\nabla^s\nabla_s u^i + (1 - e^2 \overset{[-2]}{c}_1 + 2\nu(1-2\nu)^{-1})\nabla^i\nabla_k u^k + \\
+2\overset{[-2]}{c}_1 \varepsilon^{ikl}\nabla_k \overset{[+1]}{\phi}{}_l + \overset{[-1]}{L} c_4'\nabla^i\nabla_k \overset{[+1]}{\phi}{}^k + \overset{[-1]}{L} c_5'\nabla^k\nabla_k \overset{[+1]}{\phi}{}^i\,] = \rho\partial^2_{\cdot\cdot}u^i, \\
G\overset{[-1]}{L}\,\overset{[-1]}{L}[(1 + e^{-2}\overset{[+2]}{c}_2)\nabla^s\nabla_s \overset{[+1]}{\phi}{}^i + (1 - e^{-2}\overset{[+2]}{c}_2 + 2c_3)\nabla^i\nabla_k \overset{[+1]}{\phi}{}^k + \\
+\overset{[-1]}{L}{}^{-1} c_4'\nabla^i\nabla^k u_k + \overset{[-1]}{L}{}^{-1} c_5'\nabla^k\nabla_k u^i + \overset{[-1]}{L}{}^{-1} c_6' g^{ik}\varepsilon_{ksl}\nabla^s \overset{[+1]}{\phi}{}^l\,] - \\
-2G\overset{[-2]}{c}_1(2\overset{[+1]}{\phi}{}^i - \varepsilon^{isr}\nabla_s u_r) = \rho\overset{[-2]}{\Im}\,\partial^2_{\cdot\cdot}\overset{[+1]}{\phi}{}^i
\end{gathered} \tag{4.3}$$

Здесь G — упругий модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; $\overset{[-1]}{L}$ — характерная длина микрополярной теории; $\overset{[-2]}{c_1}$, $\overset{[+2]}{c_2}$, c_3, c_4, c_5, c_6 — определяющие микрополярные псевдоскаляры. Во втором уравнении существенно используется формула

$$\varepsilon^{isr} = e^2 g^{ij} g^{sk} g^{rl} \varepsilon_{jkl} \tag{4.4}$$

Заключение. В статье приведены обобщения понятий векторного и смешанного произведения и указана их связь с фундаментальным ориентирующим скаляром в случае евклидова пространства заданной размерности n.

1. Доказательство теоремы Гамильтона—Кэли проведено в терминах псевдотензоров в n-мерном пространстве.

2. Обсуждаются возможные применения алгебры псевдотензоров в механике сплошных сред.

3. Приведены веса основных псевдотензорных величин теории гемитропного микрополярного континуума.

4. Приводятся уравнения динамики гемитропного микрополярного континуума в терминах псевдотензоров.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 19-51-60001, № 20-01-00666.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lakes R.* Elastic and viscoelastic behavior of chiral materials // Int. J. Mech. Sci. 2001. V. 43, № 7. P. 1579–1589.
https://doi.org/10.1016/S0020-7403(00)00100-4
2. *Mackay T., Lakhtakia A.* Negatively refracting chiral metamaterials: a review // SPIE Reviews. 2010. V. 1. № 1. P. 1–29.
https://doi.org/10.1117/6.0000003
3. *Tomar S., Khurana A.* Wave propagation in thermo-chiral elastic medium // Appl. Math. Model. 2013. V. 37. № 22. P. 9409–9418.
https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.04.029
4. *Гуревич Г.Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с.
5. *Схоутен Я.А.* Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965. 456 с.
6. *Сокольников И.С.* Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.
7. *Synge J., Schild A.* Tensor calculus. Toronto: Toronto university press, 1949. V. 5. 334 p.
8. *Truesdell C., Toupin R.* The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanicsand Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by *S. Flügge.* Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.
9. *Кочин И.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Москва: Изд-во Акад. наук, 1951. 427 с.
10. *Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В.* Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82. № 4. С. 399–412.
11. *Murashkin E.V., Radayev Yu.N.* On a micropolar theory of growing solids // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24. № 3. С. 424–444.
12. *Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Yu.N.* On the Neuber theory of micropolarelasticity. A pseudotensor formulation // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24. № 4. С. 752–761.
13. *Veblen O., Thomas T.* Extensions of Relative Tensors // Transactions of the American Mathematical Society. 1924. V. 26. P. 373–377. URL: https://www.jstor.org/stable/1989146.
14. *Веблен О.* Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М.: Изд-во иностранной литературы, 1948. 139 с.
15. *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. М.: Наука, 1966.
16. *Радаев Ю.Н.* Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. С. 504–517. URL: http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635.