ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 6, с. 55–56

УДК 531.383

О ДВИЖЕНИИ УПРУГОГО НЕРАСТЯЖИМОГО КОЛЬЦА

© 2021 г. Д. М. Климов[a],*

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**e-mail: klimov@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 29.07.2021 г.
После доработки 04.08.2021 г.
Принята к публикации 05.08.2021 г.

При изучении динамики волнового твердотельного гироскопа широко используются различные приближенные методы. В настоящей статье излагается способ получения решения уравнения колебаний тонкого нерастяжимого кольца, вращающегося с произвольно изменяющейся угловой скоростью. Полученное решение может быть использовано для оценки точности приближенных методов.

Ключевые слова: твердотельный гироскоп, нерастяжимое кольцо, приближенные методы

DOI: 10.31857/S0572329921060052

Для исследования динамики кольца будем использовать следующее уравнение из публикации [1]

$$\frac{\partial^4 w(\varphi,\tau)}{\partial\tau^2\partial\varphi^2}-\frac{\partial^2 w(\varphi,\tau)}{\partial\tau^2}+4\omega(\tau)\frac{\partial^2 w(\varphi,\tau)}{\partial\tau\partial\varphi}+2\frac{d\omega(\tau)}{d\tau}\frac{\partial w(\varphi,\tau)}{\partial\varphi}+\frac{\partial^6 w(\varphi,\tau)}{\partial\varphi^6}+$$
$$+2\frac{\partial^4 w(\varphi,\tau)}{\partial\varphi^4}+\frac{\partial^2 w(\varphi,\tau)}{\partial\varphi^2}-\omega^2(\tau)\left(\frac{\partial^4 w(\varphi,\tau)}{\partial\varphi^4}+3\frac{\partial^2 w(\varphi,\tau)}{\partial\varphi^2}\right)=0 \tag{1}$$

Здесь w – перемещение точек кольца по радиусу, φ – угол точки на кольце, τ – нормированное время, ω – угловая скорость кольца.

Будем искать решение в виде

$$w(\varphi,\tau)=a(\tau)\sin[k\varphi+\psi(\tau)]\cos(n\tau)-b(\tau)\cos[k\varphi+\psi(\tau)]\sin(n\tau) \tag{2}$$

Здесь $a(\tau)$, $b(\tau)$, $\psi(\tau)$, n считаются неизвестными, k – целое число. Далее положим $k=2$, для других k выкладки проводятся аналогичным образом.

На производную

$$\frac{\partial w(\varphi,\tau)}{\partial\tau}=\frac{da(\tau)}{d\tau}\sin[2\varphi+\psi(\tau)]\cos(n\tau)+$$
$$+a(\tau)\cos[2\varphi+\psi(\tau)]\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\cos(n\tau)-$$
$$-a(\tau)\sin[2\varphi+\psi(\tau)]n\sin(n\tau)-\frac{db(\tau)}{d\tau}\cos[2\varphi+\psi(\tau)]\sin(n\tau)+$$
$$+b(\tau)\sin[2\varphi+\psi(\tau)]\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\sin(n\tau)-b(\tau)\cos[2\varphi+\psi(\tau)]n\cos(n\tau) \tag{3}$$

наложим условие

$$\frac{da(\tau)}{d\tau}\sin[2\varphi+\psi(\tau)]\cos(n\tau)+a(\tau)\cos[2\varphi+\psi(\tau)]\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\cos(n\tau)-$$
$$-\frac{db(\tau)}{d\tau}\cos[2\varphi+\psi(\tau)]\sin(n\tau)+b(\tau)\sin[2\varphi+\psi(\tau)]\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\sin(n\tau)=0 \quad (4)$$

Уравнение (1) с учетом соотношений (2)–(4) переписывается в виде

$$5\frac{da(\tau)}{d\tau}\sin[2\varphi+\psi(\tau)]n\sin(n\tau)+5a(\tau)\cos[2\varphi+\psi(\tau)]\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}n\sin(n\tau)+$$
$$+5a(\tau)\sin[2\varphi+\psi(\tau)]n^2\cos(n\tau)+5\frac{db(\tau)}{d\tau}\cos[2\varphi+\psi(\tau)]n\cos(n\tau)-$$
$$-5b(\tau)\sin[2\varphi+\psi(\tau)]\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}n\cos(n\tau)-5b(\tau)\cos[2\varphi+\psi(\tau)]n^2\sin(n\tau)+$$
$$+8\omega(\tau)[-a(\tau)\cos[2\varphi+\psi(\tau)]n\sin(n\tau)+b(\tau)\sin[2\varphi+\psi(\tau)]n\cos(n\tau)]+ \quad (5)$$
$$+4\frac{d\omega(\tau)}{d\tau}[a(\tau)\cos[2\varphi+\psi(\tau)]\cos(n\tau)+b(\tau)\sin[2\varphi+\psi(\tau)]\sin(n\tau)]-$$
$$-36a(\tau)\sin[2\varphi+\psi(\tau)]\cos(n\tau)+36b(\tau)\cos[2\varphi+\psi(\tau)]\sin(n\tau)-$$
$$-4\omega^2(\tau)[a(\tau)\sin[2\varphi+\psi(\tau)]\cos(n\tau)-b(\tau)\cos[2\varphi+\psi(\tau)]\sin(n\tau)]=0$$

Из уравнения (5) находим систему двух уравнений при множителях $\sin(n\tau)\cos[2\varphi+\psi(\tau)]$ и $\cos(n\tau)\sin[2\varphi+\psi(\tau)]$

$$5a(\tau)\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}n-5b(\tau)n^2-8\omega(\tau)a(\tau)n+36b(\tau)+4\omega^2(\tau)b(\tau)=0$$
$$5a(\tau)n^2-5b(\tau)\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}n+8\omega(\tau)b(\tau)n-36a(\tau)-4\omega^2(\tau)a(\tau)=0$$

Эта система имеет решение

$$n=\sqrt{z_{1,2}},\quad \frac{d\psi(\tau)}{d\tau}=\frac{8}{5}\omega(\tau)$$

где $z_{1,2}$ являются корнями уравнения $5z^2-4\omega^2(\tau)-36=0$. Аналогично система уравнений из коэффициентов при $\sin(n\tau)\sin[2\varphi+\psi(\tau)]$, $\cos(n\tau)\cos[2\varphi+\psi(\tau)]$

$$5\frac{da(\tau)}{d\tau}+4\frac{d\omega(\tau)}{d\tau}b(\tau)=0$$
$$5\frac{db(\tau)}{d\tau}+4\frac{d\omega(\tau)}{d\tau}a(\tau)=0$$

имеет решение

$$a(\tau)=C_1\mathrm{sh}\left(\frac{4}{5}\frac{\omega(\tau)}{n}\right)+C_2\mathrm{ch}\left(\frac{4}{5}\frac{\omega(\tau)}{n}\right)$$
$$b(\tau)=-C_1\mathrm{ch}\left(\frac{4}{5}\frac{\omega(\tau)}{n}\right)-C_2\mathrm{sh}\left(\frac{4}{5}\frac{\omega(\tau)}{n}\right)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690138-6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* О динамических эффектах в упругом вращающемся кольце // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 5. С. 17–24.