ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 6, с. 16–22

УДК 539.3

О РАЗЛОЖЕНИИ РЕШЕНИЙ СКАЛЯРНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ПО БЛОЧНЫМ ЭЛЕМЕНТАМ

© 2021 г. В. А. Бабешко[a,b,*], О. В. Евдокимова[a], О. М. Бабешко[b]

[a] *Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону, Россия*
[b] *Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия*
**e-mail: babeshko41@mail.ru*

Поступила в редакцию 01.03.2021 г.
После доработки 07.03.2021 г.
Принята к публикации 18.03.2021 г.

Ранее в работе авторов разработан метод сведения граничных задач механики сплошной среды для систем дифференциальных уравнений к граничным задачам для отдельных уравнений, называемых скалярными. Этот подход опирается на преобразование Б.Г. Галеркина для систем дифференциальных уравнений в частных производных и метод блочного элемента. В настоящей работе, основываясь на известных свойствах метода блочного элемента, развиваются три подхода, позволяющих реализовать применение метода блочного элемента к достаточно сложным скалярным граничным задачам. Впервые, по аналогии с экспоненциальной подстановкой, используемой в обыкновенных дифференциальных уравнениях с постоянными коэффициентами, в работе применяется блочная подстановка, позволяющая решать граничные задачи для уравнений в частных производных. В результате исследования искомые решения скалярных граничных задач представляются в виде суммы с помощью простейших блочных элементов, что значительно упрощает исследование получаемых точных решений.

Ключевые слова: блочный элемент, скалярные граничные задачи, бигармоническое уравнение, обратные операторы

DOI: 10.31857/S0572329921060027

Введение. В работе [1] авторами разработан интегродифференциальный метод сведения векторных граничных задач, то есть, описываемых системами дифференциальных уравнений в частных производных, к скалярным граничным задачам, описываемым лишь отдельными дифференциальными уравнениями в частных производных. В основе этого подхода лежит преобразование Б.Г. Галеркина [2, 3]. Оно успешно применялось во многих работах для исследования и решения векторных граничных задач механики сплошных сред, теории поля, математической физики и в других областях. Особо следует отметить применение этого подхода в работах [4–6]. Во всех этих работах метод применялся для исследования и решения граничных задач в классических областях, к которым относятся полупространство, слоистые области, области, которые формируются в результате построения представлений групп преобразований пространства – цилиндры, сферы, и другие подобные области [7–9]. Области, отличающиеся от вышеназванных, относятся к неклассическим областям. Простейшей плоской неклассической областью, является прямоугольный клин, то есть первый квадрант в плоской декартовой системе координат. Являясь неклассической областью, она характеризуется тем, что ее границы уходят на бесконечность, что создает сложности для применения численных методов. Таким образом, исследованием точного обращения граничных задач в этой области, одновременно выявляются и особенности свойств решений в ней. Так, точные решения граничных задач методом блочного элемента позволили выявить новый тип землетрясений, названных стартовыми, обнаружить ранее не описанный новый тип трещин, дополняющих трещины Гриффитса, изучить субдукционные процессы и цунами, исследовать акустические свойства среды в сложных областях [10–16]. Метод блочного элемента оказался удобным и для исследования сред сложных реологий в неклассических областях за счет преобразований векторных граничных задач в скалярные. В качестве примера, система двумерных динамических уравнений Ламе в первом квадранте [1] сведена к решению уравнений Гельмгольца относительно двух функций. Более сложные, а именно, бигармонические уравнения, возникают при сведении преобразованием Б.Г. Галеркина векторной системы уравнений Ламе к скалярным уравнениям [4]. Бигармонические уравнения имеют и самостоятельный интерес, описывая поведение поверхности пластин Кирхгофа в статическом и динамическом случаях [17, 18].

Практика прямого решения сложных граничных задач методом блочного элемента показала, что разложение решения по простым, по сложности, блочным элементам предпочтительнее прямого решения исходной граничной задачи этим методом [1, 19]. В настоящей работе излагаются три подхода, которые могут реализовываться с применением метода блочного элемента. Обсуждаются их аналоги в сравнении с известными классическими подходами. В зависимости от поставленных задач, можно ориентироваться на тот или иной подход при проведении исследования.

1. Постановка задачи и методы решения. В качестве примера рассматривается граничная задача для уравнения Ламе в [4] в области Ω, в первом квадранте прямоугольной декартовой системы координат при некоторых ненулевых гармонических во времени граничных условиях

$$L_{mn}(u_n) = 0, \quad L_{mn} = \delta_{mn}\Delta + \sigma\partial_m^2\partial_n^2 - p,$$
$$m, n, = 1,2,3, \quad \sigma = \mu^{-1}(\lambda + \mu), \quad \partial_m^h = \frac{\partial^h}{\partial x_m^h}, \tag{1.1}$$

$\delta_{m,n}$ – символ Кронекера, Δ – Лапласиан

$$\Delta = (\partial_1^2 + \partial_2^2)$$

Осуществим преобразование Б.Г. Галеркина, положив [4]

$$u_1 = \begin{vmatrix} \chi_1 & L_{12} & L_{13} \\ \chi_2 & L_{22} & L_{23} \\ \chi_3 & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix}, \quad u_2 = \begin{vmatrix} L_{11} & \chi_1 & L_{13} \\ L_{21} & \chi_2 & L_{23} \\ L_{31} & \chi_3 & L_{33} \end{vmatrix}, \quad u_3 = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \chi_1 \\ L_{21} & L_{22} & \chi_2 \\ L_{31} & L_{32} & \chi_3 \end{vmatrix}$$

и обозначив $T_i = \Delta\chi_i$. Тогда система уравнений (1.1) приводится к бигармоническим уравнениям относительно функций Галеркина T_i
вида

$$(\Delta\Delta - k^2)T_i = 0, \quad k = \text{const}$$

Дополнительным исследованием определяются для функций T_i граничные условия, исходя из заданных первоначально.

Другой пример дает граничная задача об изгибе прямоугольной пластины при гармонических воздействиях на ее границы [17, 18]ю

В дальнейшем рассматривается двумерная скалярная граничная задача для бигармонического уравнения в области первого квадранта при задании на границе гармонически изменяющихся функций и первых нормальных производных к границам

$$Lu = (\partial_1^4 + 2\partial_1^2\partial_2^2 + \partial_2^4 - k^2)u = 0, \quad k^2 = \rho h^{-2}\omega^2 12(1-\nu^2)E^{-1}$$
$$u_1(x_1,0) = g_1(x_1,0), \quad \partial_2^1 u(x_1,0) = b_1(x_1,0) \tag{1.2}$$
$$u_2(0,x_2) = g_2(0,x_2), \quad \partial_1^1 u_2(0,x_2) = b_2(0,x_2)$$

Введем оператор граничной задачи, приняв Ω, то есть первый квадрант, за область его определения, а за внешние воздействия гармонические во времени вертикальные перемещения границ $ue^{-i\omega t}$ и такие же углы поворотов на границе. Здесь ρ — погонная плотность материала, h — толщина пластины, ω — частота гармонических воздействий на пластину, ν и E — коэффициент Пуассона и модуль Юнга материала пластины соответственно.

Ниже рассматриваются подходы, которые, в зависимости от целей исследования, могут использовать метод блочного элемента, позволяющий успешно решать те граничные задачи, которые являются не совсем удобными для других методов.

2. Прямой метод блочного элемента. Метод блочного элемента можно применить непосредственно к уравнению граничной задачи (1.2). Используя алгоритм метода блочного элемента [1, 11, 19], включающего шаги внешней алгебры, внешнего анализа, фактор — топологии.

В случае задачи второго рода задаются функции и производные при $x_1 = 0$ и при $x_2 = 0$, а именно $u(0,x_2)$, $u(x_1,0)$, $\partial_1 u(0,x_2)$, $\partial_2 u(x_1,0)$.

Тогда можем реализовать этап алгоритма метода блочного элемента называемый “внешней формой”. Он приводит к погружению граничной задачи в топологическое пространство и к дальнейшему построению внешней формы и функционального уравнения. В случае рассматриваемой скалярной задачи получается единственное функциональное уравнение вида

$$[(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 - k^2]U(\alpha_1,\alpha_2) = \omega(\alpha_1,\alpha_2)$$
$$\omega(\alpha_1,\alpha_2) = i\alpha_2 T_1(\alpha_1,0) + i\alpha_1 T_2(0,\alpha_2) - S_1(\alpha_1,0) - S_2(0,\alpha_2) - P_1(\alpha_1,0) - P_2(0,\alpha_2) \tag{2.1}$$
$$P(\alpha_1,\alpha_2) = \mathbf{F}(\alpha_1,\alpha_2)p(x_1,x_2), \quad S_n = \mathbf{F}(\alpha_1,\alpha_2)s_n, \quad T_n = \mathbf{F}(\alpha_1,\alpha_2)t_n$$

Здесь введены внешняя форма $\omega(\alpha_1,\alpha_2)$ после применения преобразования Фурье, и система обозначений

$$\partial_2^3 U(\alpha_1,0) + \partial_1^2\partial_2^1 U(\alpha_1,0) = S_1(\alpha_1,0), \quad \partial_2^2 U(\alpha_1,0) + \partial_1^2 U(\alpha_1,0) = T_1(\alpha_1,0)$$
$$\partial_1^3 U(0,\alpha_2) + \partial_1^1\partial_2^2 U(0,\alpha_2) = S_2(0,\alpha_2), \quad \partial_2^2 U(0,\alpha_2) + \partial_1^2 U(0,\alpha_2) = T_2(0,x_2)$$
$$[(-i\alpha_2)^2\partial_2^1 + (-i\alpha_1)^2\partial_1^1]U(\alpha_1,0) +$$
$$+ [(-i\alpha_2)^3 + (-i\alpha_1)^2(-i\alpha_2)]U(\alpha_1,0) = P_1(\alpha_1,0)$$
$$[(-i\alpha_2)^2\partial_2^1 + (-i\alpha_1)^2\partial_1^1]U(0,\alpha_2) +$$
$$+ [(-i\alpha_1)^3 + (-\alpha_2)^2(-i\alpha_1)]U(0,\alpha_2) = P_2(0,\alpha_2)$$

$\mathbf{F}(\alpha_1,\alpha_2)$ — оператор преобразования Фурье, α_1, α_2 — его параметры. Дальнейшее состоит в выполнении этапа внешнего анализа, включающего факторизацию коэффициента функционального уравнения, вычислении форм-вычетов Лере, построение псевдодифференциальных уравнений и их решений. Решения псевдодифференциальных уравнений вносятся во внешние формы и позволяют получить представление решения граничной задачи в форме упакованного блочного элемента.

Общее представление решения граничной задачи, с учетом (2.1) имеет вид

$$u(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{R^2} \frac{\omega(\alpha_1,\alpha_2)}{[(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 - k^2]} e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2$$

R^2 — двумерное пространство действительных чисел. Числитель под интегралом в решении обращается в нуль в определенных полюсах знаменателя, которые отбираются формами-вычетами Лере. Эти полюсы для носителя в области первого квадранта имеют вид

$$\alpha_{11+} = i\sqrt{\alpha_2^2 - k}, \quad \alpha_{12+} = i\sqrt{\alpha_2^2 + k}, \quad \alpha_{21+} = i\sqrt{\alpha_1^2 - k}, \quad \alpha_{22+} = i\sqrt{\alpha_2^2 + k}$$

Разрезы многозначных функций берутся из требования нахождения носителя граничной задачи в первом квадранте. Достоинством применения прямого метода к сложному уравнению (1.2) является компактная запись решения и возможность расширения постановки граничной задачи. Например, возможно на границе области Ω задавать не только нормальные производные для некоторых граничных условий, но также и косые производные.

Однако практика решения граничных задач прямым методом блочного элемента, выполненная, например, в [1, 19] показала, что для упрощения формул, предпочтительнее, если имеется возможность, строить решение граничной задачи, в виде разложения с помощью более простых блочных элементов.

3. Расщепление операторов блочных элементов. С целью построения разложения решения граничной задачи для сложного скалярного уравнения по более простым блочным элементам представим дифференциальное уравнение колебания пластины Кирхгофа в следующем виде

$$Lu - q = (\Delta\Delta - k^2)u - q \equiv (\Delta - k)(\Delta + k) - q \tag{3.1}$$

Здесь q — приведенная нагрузка на плоскость пластины. Для исследования граничной задачи для уравнения (3.1) формально используем обратные операторы граничных задач. С их применением решение граничной задачи можно представить в одной из форм

$$u = (\Delta\Delta - k^2)^{-1}_{\partial\Omega} q, \quad u = (\Delta + k)^{-1}_{\partial\Omega}(\Delta - k)^{-1}_{\partial\Omega} q \tag{3.2}$$

Верхние индексы “—1” обозначают обратный оператор граничной задачи в первом квадранте. Нижний индекс $\partial\Omega$ подчеркивает наличие у плиты не нулевых граничных условий. Ради простоты будем рассматривать случай, когда в (3.1) принято $q = 0$.

Для этого случая предыдущее выражение представимо в виде

$$u = (\Delta\Delta - k^2)^{-1}_{\partial\Omega} = (\Delta + k)^{-1}_{\partial\Omega}(\Delta - k)^{-1}_{\partial\Omega} \tag{3.3}$$

Тогда расщепляющие обратные операторы строятся в результате решения граничных задач

$$\begin{gathered}(\Delta - k)w = 0, \quad (\Delta + k)v = w \\ w(x_1, 0) = g_1(x_1, 0) \quad w(0, x_2) = g_2(0, x_2) \\ \partial_1 v(x_1, 0) = b_1(x_1, 0) \quad \partial_2 v(0, x_2) = b_2(0, x_2)\end{gathered}$$

Расщепив оператор, решаем последовательно две граничные задачи.

$$w(x_1, x_2) = (\Delta - k)^{-1}_{\partial\Omega}, \quad u(x_1, x_2) = (\Delta + k)^{-1}_{\partial\Omega} w(x_1, x_2)$$

Решение $w(x_1, x_2)$ первой граничной задачи в первом квадранте построено во многих работах [14—16]. В случае задачи Дирихле оно представимо в виде упакованного блочного элемента вида

$$\begin{gathered}w(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{R^2} \frac{\omega_1(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + k)} e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} i d\alpha_1 d\alpha_2 \\ \omega_1(\alpha_1, \alpha_2) = \langle [G_1(\alpha_{11+}, 0) - G_1(\alpha_1, 0)](\alpha_2 - \alpha_{21+}) + \\ + [G_2(0, \alpha_{21+}) - G_2(0, \alpha_2)](\alpha_1 - \alpha_{11+})\rangle \\ w(x_1, 0) = g_1(x_1, 0) \quad w(0, x_2) = g_2(0, x_2)\end{gathered} \tag{3.4}$$

Здесь функции b_1, b_2 являются либо произвольными и будут определены позже, либо принятыми в (1.2).

Вторая граничная задачи оказывается неоднородной.

$$(\Delta + k)_{\partial\Omega} u(x_1, x_2) = w(x_1, x_2)$$

Для упрощения, приведем ее к однородной, сделав замену переменного

$$u(x_1, x_2) = v(x_1, x_2) + w_*(x_1, x_2) \tag{3.5}$$

Здесь $v(x_1, x_2)$ — новая неизвестная, а $w_*(x_1, x_2)$ — любое частное решение неоднородного уравнения. В частности, можно взять

$$w_*(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} \frac{\omega_1(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + k)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k)} e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} i d\alpha_1 d\alpha_2$$

В результате замены получается уравнение вида

$$(\Delta + k)_{\partial\Omega} v(x_1, x_2) = 0, \quad \partial_1 v(x_1, 0) = \varphi_1(x_1), \quad \partial_2 v(0, x_2) = \varphi_2(x_2)$$

Функции $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2(x_2)$ либо произвольные и определяются позже при удовлетворении граничных условий (1.2), либо уточняются при корректировке граничных условий в связи с введением частного решения (3.5).

Построим решение этой граничной задачи в форме упакованных блочных элементов в предположении задания на границе области Ω нормальных производных, имеем

$$v(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} \frac{\omega_2(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k)} e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$\omega_2(\alpha_1, \alpha_2) = \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_{21+}} - 1\right] \left\langle \Phi_2(0, \alpha_2) - \Phi_2(0, \alpha_{22+}) \frac{\alpha_2}{\alpha_{22+}} \right\rangle +$$
$$+ \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{22+}} - 1\right] \left\langle \Phi_1(\alpha_1, 0) - \Phi_1(\alpha_{21+}, 0) \frac{\alpha_1}{\alpha_{21+}} \right\rangle$$
$$\Phi_k = \mathbf{F}\varphi_k$$

Отсюда, для функции $u(x_1, x_2)$ получаем представление,

$$u(x_1, x_2) = v(x_1, x_2) + w_*(x_1, x_2)$$

служащее для определения произвольных функций в граничных условиях из требования удовлетворения граничным условиям (1.2), если принимались произвольные функции в граничных условиях, либо они выполнятся автоматически в случае корректировки граничных условий частным решением (3.5).

4. Метод подстановки. Этот метод идентичен применению экспоненциальной подстановки в однородных обыкновенных дифференциальных уравнениях с постоянными коэффициентами. В этом методе строятся характеристические уравнения, доопределяющие параметры экспоненциальных подстановок. Затем берется их полная совокупность. Аналогичная ситуация возникает с блочными элементами в рассматриваемой граничной задаче для бигармонического уравнения в области Ω, но уже для уравнения в частных производных в неклассической области. Из ранее изложенного следует, что блочные элементы с произвольными граничными условиями на границах области Ω являются собственными функциями бигармонического уравнения и представляют их полную систему.

Поэтому решение граничной задачи можно искать в виде.

$$u(x_1, x_2) = v(x_1, x_2) + w(x_1, x_2) \tag{4.1}$$

Более детальный анализ решений граничных задач позволил получить асимптотические представления поведения решений для блочных элементов вблизи границ. Они даются формулами

$$
\begin{gathered}
v(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} B_2(\alpha_2)e^{i(\alpha_{11+}x_1)}e^{-i\alpha_2 x_2}d\alpha_2 \\
w(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_2(\alpha_2)e^{i(\alpha_{12+}x_1)}e^{-i\alpha_2 x_2}d\alpha_2, \quad 0<x_1\ll 1 \\
v(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} B_1(\alpha_1)e^{i(\alpha_{21+}x_2)}e^{-i\alpha_1 x_1}d\alpha_1 \\
w(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_1(\alpha_1)e^{i(\alpha_{22+}x_2)}e^{-i\alpha_1 x_1}d\alpha_1, \quad 0<x_2\ll 1
\end{gathered}
\tag{4.2}
$$

Имея их, уже не сложно получить точное решение граничной задачи для бигармонического уравнения в первом квадранте (1.2), составив с помощью функций $u(0,x_2)$, $u(x_1,0)$, $\partial_1 u(0,x_2)$, $\partial_2 u(x_1,0)$ следующие соотношения

$$
\begin{gathered}
u(0,x_2)=v(0,x_2)+w(0,x_2) \\
\partial_1 u(0,x_2)=\partial_1 v(0,x_2)+\partial_1 w(0,x_2) \\
u(x_1,0)=v(x_1,0)+w(x_1,0) \\
\partial_2 u(x_1,0)=\partial_2 v(x_1,0)+\partial_2 w(x_1,0)
\end{gathered}
$$

Применив преобразования Фурье к асимптотическим соотношениям (4.2) и вычислив предельные выражения на границах области Ω, получим две системы уравнений, решения которых имеют вид

$$
\begin{gathered}
B_1(\alpha_2)=\Delta_2^{-1}\left[i\alpha_{22+}U(\alpha_1,0)-\partial_2 U(\alpha_1,0)\right] \\
B_2(\alpha_2)=\Delta_1^{-1}\left[i\alpha_{12+}U(0,\alpha_2)-\partial_1 U(0,\alpha_2)\right] \\
G_1(\alpha_2)=\Delta_2^{-1}\left[\partial_2 U(\alpha_1,0)-i\alpha_{21+}U(\alpha_1,0)\right] \\
G_2(\alpha_2)=\Delta_1^{-1}\left[\partial_1 U(0,\alpha_2)-i\alpha_{11+}U(0,\alpha_2)\right] \\
\Delta_1=i(\alpha_{12+}-\alpha_{11+}), \quad \Delta_2=i(\alpha_{22+}-\alpha_{21+})
\end{gathered}
$$

В результате подстановки найденных значений во внешнюю форму ω_1 в (3.4) для $w(x_1,x_2)$, и в (3.4) с внешней формой ω_2 для $v(x_1,x_2)$

$$
\begin{gathered}
\omega_2(\alpha_1,\alpha_2)=\langle[B_1(\alpha_{11+},0)-B_1(\alpha_1,0)](\alpha_2-\alpha_{21+})+ \\
+[B_2(0,\alpha_{21+})-B_2(0,\alpha_2)](\alpha_1-\alpha_{11+})\rangle \\
v(x_1,0)=g_1(x_1,0) \quad v(0,x_2)=g_2(0,x_2)
\end{gathered}
$$

получим по формуле (4.1) точное решение граничной задачи (1.2).

Вывод. В статье изложен последний этап, связанный с применением метода блочного элемента для исследования и решения ряда часто встречающихся граничных задач механики сплошных сред, теории поля, электродинамики для систем дифференциальных уравнений в частных производных, которые сводятся к отдельным уравнениям, осуществляемым преобразованием Б.Г. Галеркина. Граничные задачи для отдельных уравнений в частных производных, называемых скалярными, решаются методом блочного элемента без привлечения факторизации матриц-функций, что значительно упрощает изучение свойств решений. На примере исследования бигармонического уравнения продемонстрировано три разных подхода построения его решения методом блочного элемента, отмечены их достоинства и недостатки. Впервые, по аналогии с экспоненциальной подстановкой, используемой в обыкновенных дифференциальных уравнениях с постоянными коэффициентами, в работе установлена возможность применения блочной подстановки, позволяющей решать граничные задачи для уравнений в частных производных.

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации госзадания на 2021 г. Минобрнауки, проект (FZEN-2020-0020), ЮНЦ РАН проект (00-20-13) № госрег. 01201354241, и при поддержке грантов РФФИ (19-41-230003), (19-41-230004), (19-48-230014), (18-05-80008).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Евдокимов В.С.* Метод блочного элемента в разложении решений сложных задач механики // ДАН. 2020. Т. 495. № 6. С. 34–38.
2. *Galerkin B.G.* Contribution a la solution generale du probleme de la theorie de lelastisitecas de trois-dimensions // C. R. Acad. Sci. 1930. V. 190. P. 1047–1048; 1931. V. 193. P. 568–571.
3. *Moisil G.C.* Asupra sistemelor de ecuatii cu derivate partiale lineare si cu coeficienti constanti // Bull. Sci. Acad. RPR. Ser. A. 1949. V. 1. P. 1–32.
4. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
5. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
6. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 162 с.
7. *Гельфанд И.М., Минлос З.А. и Шапиро З.Я.* (1958) Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. М.: Физматлит, 1958. 368 с.
8. *Улитко А.Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наукова думка, 1979. 262 с.
9. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1985. 284 с.
10. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach// Acta Mech. 2018. V. 229. № 5. P. 2163–2175. https://doi.org/10.1007/s00707-017-2092-0
11. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On a mechanical approach to the prediction of earthquakes during horizontal motion of litospheric plates // Acta Mech. 2018. V. 229. P. 4727–4739. https://doi.org/10.1007/s00707-018-2255-7
12. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On features of starting earthquakes at rigid contacts of lithospheric plates with the base // Acta Mech. 2020. V. 231. P. 5205–5212. https://doi.org/10.1007/s00707-020-02816-2
13. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* About earthquakes in subduction zones with the potential to cause a tsunami // J. Appl. Computat. Mech. 2020. V. 7. P. 1232–1241. https://doi.org/10.22055/JACM.2020.32385.2007
14. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Трещины нового типа и модели некоторых наноматериалов // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 5. С. 13–20.
15. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В., Евдокимов В.С., Уафа С.Б.* О ресурсах подшипников и о механике субдукционных процессов // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 3. С. 12–19.
16. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* К проблеме акустических и гидродинамических свойств среды, занимающей область трехмерного прямоугольного клина // ПМТФ. 2019. Т. 60. № 6. С. 90–96.
17. *Тимашенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
18. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов. М.: Наука, 1979. 560 с.
19. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Применение метода блочного элемента в одной граничной задаче академика И.И. Воровича // ДАН. 2020. Т. 493. С. 42–47.