ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 6, с. 73–87

УДК 531.3

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЯЕМЫХ ШАРНИРНЫХ МЕХАНИЗМОВ СО ЗВЕНЬЯМИ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ ДЛЯ ЭКЗОСКЕЛЕТОВ ЧЕЛОВЕКА

© 2021 г. А. В. Борисов[a,*], Г. М. Розенблат[b,], Л. В. Кончина[a,***], М. Г. Куликова[a,****], К. С. Маслова[a,*****]**

[a] *Филиал ФГБОУ ВО НИУ "МЭИ" в г. Смоленске. Смоленск, Россия*

[b] *Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ) Москва, Россия*

**e-mail: BorisowAndrej@yandex.ru*

***e-mail: gr51@mail.ru*

****e-mail: la_kon@mail.ru*

*****e-mail: kulikova0808@rambler.ru*

******e-mail: maslowaksusha1@yandex.ru*

Поступила в редакцию 13.11.2020 г.
После доработки 11.01.2021 г.
Принята к публикации 11.01.2021 г.

Рассматривается пространственная модель экзоскелета со звеньями переменной длины. Построение многозвенной модели проведено на основе анализа модели одного звена с одной закрепленной точкой в пространстве и модели с двумя звеньями переменной длины. В связи с возникающими трудностями при построении систем дифференциальных уравнений движения при относительно большом количестве звеньев, связанных с большим временем составления даже при использовании современных систем компьютерной математики, рассмотрено обобщение для механизма на случай произвольного конечного количества звеньев и предложен скоростной метод построения систем дифференциальных уравнений движения рассматриваемых моделей механизмов. Приводится модель экзоскелета с пятью звеньями переменной длины в пространстве, которая может использоваться при создании реально работающего экзоскелета или антропоморфного робота. В предложенной модели применяется конструкция звена экзоскелета с двумя абсолютно твердыми весомыми участками, расположенными на обоих концах звена и невесомым участком между ними в центре звена. Получены аналитически синтезированные траектории движения и приведены результаты численного моделирования движения человеко-машинной системы в виде человека в экзоскелете. Применение предложенной модели позволит человеку снизить нагрузку на суставы, увеличить силу, повысить комфортабельность и время непрерывного использования экзоскелета.

Ключевые слова: человеко-машинная система, звено переменной длины, шарнир, произвольное число звеньев, экзоскелет, система дифференциальных уравнений движения, управление, анимационная визуализация движения

DOI: 10.31857/S0572329921050020

1. Введение. Создание и исследование пространственных моделей управляемых шарнирных механизмов со звеньями переменной длины с целью проектирования и изготовления экзоскелетов для опорно-двигательного аппарата человека является ак-

туальной задачей, результаты решения которой могут быть использованы для увеличения силы, выносливости и восстановления двигательных способностей человека.

В оздоровительных учреждениях России [1] и мира [2] экзоскелеты применяются для восстановления двигательных способностей больных. В ИПМ им. М.В. Келдыша РАН создан экзоскелет нижних конечностей для лечения пациентов с заболеваниями опорно-двигательного аппарата [3]. В Лаборатории бионической робототехники ИПМ им. М.В. Келдыша РАН в помощь врачам разработаны экзоскелеты ExoArm и ExoChair [4]. Для медицины, спасательных работ и т.п. в проекте "ЭкзоАтлет" разработаны модели пассивных и активных экзоскелетов [5]. Проводится внедрение в медицинскую практику разработанных моделей [6].

Решению прикладных задач и применению экзоскелетов в промышленном производстве посвящены научно-практические работы и патенты Яцуна С.Ф. [7, 8]. Имеются патенты отечественных и зарубежных моделей экзоскелетов, направленные на применение их в промышленности [9–11].

Теоретическим разработкам математических моделей экзоскелетов с управляемыми гидравлическими, электромеханическими приводами и их аналитическому и численному исследованию посвящены работы [12–14]. Обзору возможностей применения экзоскелета в военных целях посвящена работа [15].

Вопросы управления сложными нелинейными механическими системами, представляющие интерес для применения в антропоморфных механизмах, рассматриваются в работах Черноусько Ф.Л., Ананьевского И.М., Решмина С.А., Болотника Н.Н. [16, 17]. Способы построения дифференциальных уравнений динамики и решения прикладных задач управления сложными динамическими системами рассматриваются в работах Мухарлямова Р.Г. [18–20].

В работах авторов статьи [21–26] проведен анализ многих публикаций, не вошедших в данный обзор. Из изучения научной литературы и патентов экзоскелетов, следует, что пока не существуют модели экзоскелетов, являющиеся комфортабельными для человека и имеющие значительное время автономной работы. Предложенная пространственная модель управляемого механизма в виде экзоскелета отличается от имеющихся моделей наличием звеньев переменной длины, которые повышают комфортабельность перемещения в нем и частично решает имеющиеся задачи в создании единого кибернетического организма в виде человека в экзоскелете.

2. Постановка задачи. Практической задачей разработки предлагаемой модели является повышение комфортабельности при эксплуатации экзоскелета, частичная разгрузка мышц опорно-двигательного аппарата человека, увеличение продолжительности времени работы в нем и восстановление двигательных способностей человека. В результате проводимого исследования предполагается создание математической модели пространственного экзоскелета и моделирования движения человека в экзоскелете. Для решения поставленной задачи требуется адаптировать разработанные ранее [23, 24] методы и составить систему дифференциальных уравнений движения для рассматриваемой модели. В связи с этим требуется провести анализ моделей с одним звеном, двумя звеньями и т.д. и выявить общие закономерности построения матриц, входящих в эти уравнения, синтезировать антропоморфную траекторию движения для модели экзоскелета с пятью звеньями переменной длины. Для визуальной оценки полученного движения человеко-машинной робототехнической системы в виде человека в экзоскелете необходимо осуществить анимационную визуализацию движения разработанной модели.

3. Модель одного закрепленного звена экзоскелета переменной длины в пространстве. Введем неподвижную правую декартову систему координат $Oxyz$, в которой происходит движение механизма (рис. 1).

Рассмотрим модель звена, которая состоит из двух весомых абсолютно жестких частей, совершающих движение относительно друг друга вдоль прямой A_1A_2,

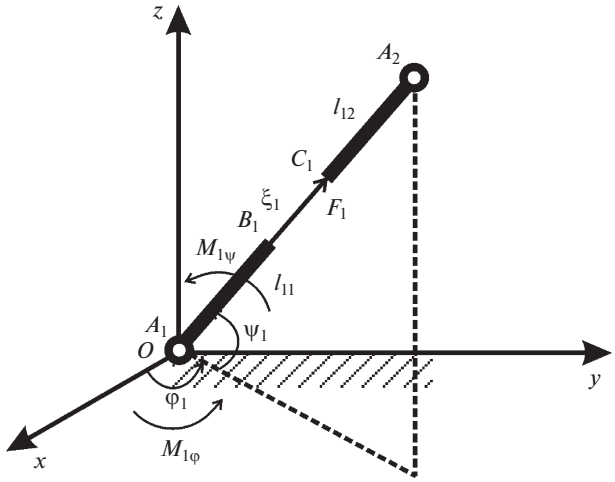

Рис. 1. Модель шарнирно закрепленного звена экзоскелета переменной длины в пространстве

проходящей через его начало и конец (рис. 1). В точке A_1, жестко соединенной с опорной поверхностью, расположена комбинация двух цилиндрических шарниров, позволяющих звену реализовывать повороты в двух взаимно ортогональных направлениях (рис. 1). Под действием силы тяжести, реакций со стороны опоры и соседних стержней (не показанных на рис. 1) происходит движение участка C_1A_2 относительно участка A_1B_1 вдоль направления A_1A_2, тем самым обеспечивается изменение длины звена на участке B_1C_1.

Система имеет два весомых абсолютно жестких стержня: A_1B_1 и C_1A_2. На рис. 1 схематично изображено звено A_1A_2 и введены соответствующие обозначения. Длины звеньев $A_1B_1 = l_{11}$, $C_1A_2 = l_{12}$, двойная нумерация индексов связана с построением многозвенной модели экзоскелета: первый индекс i соответствует номеру звена, второй α – номеру весомого участка на звене. Переменность длины звена реализуется за счет относительного движения вдоль направления звена A_1A_2 участка C_1A_2. Участок переменной длины B_1C_1 считается невесомым. Считаем, что на нем имеется пружина, действующая с силой F_1 которая обеспечивает изменение длины звена в соответствии с нагрузкой от других звеньев, приложенной к данному звену.

Положение весомого участка звена зависит от трех параметров и однозначно определяется углами $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$ и переменной длиной участка стержня $\xi_1(t)$. Рассматриваемая система имеет три степени свободы. Обозначим через $M_{1\varphi}$ и $M_{1\psi}$ управляющие моменты, развиваемые в шарнире A_1. Для управления поворотами звена можно использовать, например, электрические двигатели с редукторами или искусственные мышцы. Продольная сила F_1 управляет изменением длины звена. Для управляемого изменения длины звена можно использовать пневматический или гидравлический цилиндры. Возможно также использование шагового электрического двигателя с винтовой или реечной передачами. В данной модели управляющие устройства, позволяющие изменять конфигурацию механизма, не конкретизируются, а моделируются сосредоточенными в шарнирах моментами $M_{1\varphi}$ и $M_{1\psi}$ и продольной силой F_1, направленной вдоль звена.

Кинетическая энергия звена складывается из энергии звена A_1B_1 и C_1A_2:

$$T = T_{A_1B_1} + T_{C_1A_2},$$
$$2T = (\dot{\xi}_1^2)m_{12} + (I_{11} + I_{12} + m_{12}(l_{11}^2 + l_{11}l_{12} + 2\xi_1 l_{11} + \xi_1 l_{12} + \xi_1^2))(\dot{\varphi}_1^2\cos^2\psi_1 + \dot{\psi}_1^2) \tag{3.1}$$

Дифференциальные уравнения движения, составленные с помощью уравнений Лагранжа второго рода, имеют вид:

$$(I_{11} + I_{12} + m_{12}((2l_{11} + l_{12})\xi_1 + (l_{11} + l_{12})l_{11} + \xi_1^2))(\ddot{\varphi}_1\cos^2\psi_1 -$$
$$- 2\dot{\varphi}_1\dot{\psi}_1\cos\psi_1\sin\psi_1) + m_{12}\cos^2\psi_1(2l_{11} + l_{12} + 2\xi_1)\dot{\xi}_1\dot{\varphi}_1 = M_{1\varphi} \tag{3.2}$$

$$(I_{11} + I_{12} + m_{12}((2l_{11} + l_{12})\xi_1 + (l_{11} + l_{12})l_{11} + \xi_1^2))\ddot{\psi}_1 +$$
$$+\cos\psi_1\sin\psi_1(I_{11} + I_{12} + m_{12}((2l_{11} + l_{12})\xi_1 + (l_{11} + l_{12})l_{11} + \tag{3.3}$$
$$+\xi_1^2)\dot{\varphi}_1^2 + g(m_{11}l_{11}/2 + m_{12}(l_{11} + l_{12}/2 + \xi_1))\cos\psi_1 + m_{12}(2l_{11} + l_{12} + 2\xi_1)\dot{\xi}_1\dot{\psi}_1 = M_{1\psi}$$

$$m_{12}\ddot{\xi}_1 - m_{12}(2l_{11} + l_{12} + 2\xi_1)(\dot{\varphi}_1^2\cos^2\psi_1 + \dot{\psi}_1^2)/2 + gm_{12}\sin\psi_1 = F_1 \tag{3.4}$$

Таким образом, составлена система дифференциальных уравнений движения (3.2)–(3.4), которая описывает модель звена экзоскелета переменной длины на плоскости.

4. Модель двух закрепленных звеньев экзоскелета переменной длины в пространстве. Введем неподвижную правую декартову систему координат $Oxyz$, в которой происходит движение механизма (рис. 2). Рассмотрим модель механизма, состоящего из двух звеньев переменной длины в пространстве. Конструкция каждого звена включает в себя две весомые абсолютно твердые части, совершающие движение относительно друг друга вдоль прямой, соединяющей начало и конец звена (рис. 2). В жестко закрепленной точке A_1 имеется комбинация цилиндрических шарниров, аналогичная модели с одним звеном. Участки звена $A_1B_1 = l_{11}$ массой m_{11} и моментом инерции относительно оси, перпендикулярной звену и проходящей через его начало I_{11} и $C_1A_2 = l_{12}$ и инерционными характеристиками m_{12}, I_{12} считаем абсолютно твердыми. Под действием внутренней управляющей силы F_1 обеспечивается необходимое изменение длины звена на невесомом участке $B_1C_1 = \xi_1(t)$ переменной длины, которое происходит за счет движения участка C_1A_2 относительно участка A_1B_1 вдоль направления A_1A_2. В качестве полюса для второго звена A_2A_3 выберем точку A_2. Его конструкция и механизм работы аналогичны первому звену.

Положение механизма зависит от шести параметров и однозначно определяется углами $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\psi_2(t)$ и переменными длинами участков звеньев $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$. Следовательно, рассматриваемая механическая система имеет шесть степеней свободы.

Кинетическая энергия механизма звена получается интегрированием по весомым отрезкам инерционных участков A_1B_1, C_1A_2, A_2B_2, и C_2A_3:

$$2T = \sum_{i=1}^{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\int_0^{l_{i\alpha}} V_{i\alpha}^2\rho_{i\alpha}dx_{i\alpha} \tag{4.1}$$

где $x_{i\alpha}$ – координата бесконечно малой частицы α-го инерционного участка i-го звена, $\rho_{i\alpha}$ – плотность α-го участка i-го звена, при этом $m_{i\alpha} = \rho_{i\alpha}l_{i\alpha}$, $I_{i\alpha} = \rho_{i\alpha}l_{i\alpha}^3/3$, $l_{i\alpha}$, $m_{i\alpha}$, $I_{i\alpha}$ – длина, масса, момент инерции α-го участка i-го звена, $V_{i\alpha}^2$ – квадрат скорости бесконечно малой частицы α-го участка i-го звена, например для участка C_1A_2 будет равен:

$$V_{12}^2 = \dot{\xi}_1^2 + (l_{11} + \xi_1 + x_{12})^2((C_1^\psi)^2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\psi}_1^2) \tag{4.2}$$

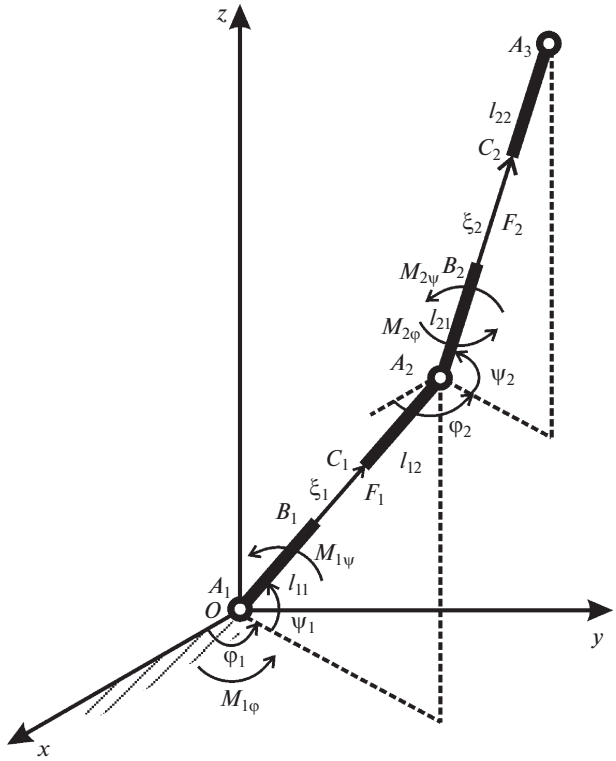

Рис. 2. Модель двух шарнирно соединенных звеньев экзоскелета переменной длины в пространстве

Система дифференциальных уравнений движения в форме уравнений Лагранжа второго рода имеет вид:

$$\begin{gathered}\zeta_{11}[(C_1^{\psi})^2\ddot{\varphi}_1 - 2C_1^{\psi}S_1^{\psi}\dot{\varphi}_1\dot{\psi}_1] + \zeta_{12}(C_1^{\psi})^2\dot{\xi}_1\dot{\varphi}_1 - \eta_{21}[C_1^{\psi}C_2^{\psi}C_{12}^{\varphi}\ddot{\varphi}_2 + C_1^{\psi}S_2^{\psi}S_{12}^{\varphi}\ddot{\psi}_2 + \\ + C_1^{\psi}C_2^{\psi}S_{12}^{\varphi}\dot{\varphi}_2^2 + C_1^{\psi}C_2^{\psi}S_{12}^{\varphi}\dot{\psi}_2^2 - 2C_1^{\psi}S_2^{\psi}C_{12}^{\varphi}\dot{\varphi}_2\dot{\psi}_2] - \\ - \eta_{12}[C_1^{\psi}C_2^{\psi}S_{12}^{\varphi}\ddot{\xi}_2 + 2C_1^{\psi}C_2^{\psi}C_{12}^{\psi}\dot{\xi}_2\dot{\varphi}_2 + 2C_1^{\psi}S_2^{\psi}S_{12}^{\varphi}\dot{\xi}_2\dot{\psi}_2] = M_{\varphi_1}\end{gathered} \tag{4.3}$$

$$\begin{gathered}\eta_{21}[C_1^{\psi}C_2^{\psi}C_{12}^{\varphi}\ddot{\varphi}_1 - S_1^{\psi}C_1^{\psi}S_{12}^{\varphi}\ddot{\psi}_1 - C_1^{\psi}C_2^{\psi}S_{12}^{\varphi}\dot{\varphi}_1^2 - C_1^{\psi}C_2^{\psi}S_{12}^{\varphi}\dot{\psi}_1^2 - 2C_1^{\psi}S_1^{\psi}C_{12}^{\varphi}\dot{\varphi}_1\dot{\psi}_1] + \\ + 2\eta_{22}[C_1^{\psi}C_2^{\psi}C_{12}^{\varphi}\dot{\xi}_1\dot{\varphi}_1 - C_2^{\psi}S_1^{\psi}S_{12}^{\varphi}\dot{\xi}_1\dot{\psi}_1] + \zeta_{22}[(C_2^{\psi})^2\ddot{\varphi}_2 - 2C_2^{\psi}S_2^{\psi}\dot{\varphi}_2\dot{\psi}_2] + \\ + \eta_{22}[C_1^{\psi}C_2^{\psi}S_{12}^{\varphi}\ddot{\xi}_1 + 2(C_2^{\psi})^2\dot{\xi}_2\dot{\varphi}_2] = M_{\varphi_2}\end{gathered} \tag{4.4}$$

$$\begin{gathered}\zeta_{11}[\ddot{\psi}_1 + C_1^{\psi}S_2^{\psi}\dot{\varphi}_1^2] + 2\zeta_{12}\dot{\xi}_1\dot{\psi}_1 - \eta_{21}[S_1^{\psi}C_2^{\psi}S_{12}^{\varphi}\ddot{\varphi}_2 + (C_1^{\psi}C_2^{\psi} + S_1^{\psi}S_2^{\psi}C_{12}^{\varphi})\ddot{\psi}_2 + \\ + S_1^{\psi}C_2^{\psi}C_{12}^{\varphi}\dot{\varphi}_2^2 + (S_1^{\psi}C_2^{\psi}C_{12}^{\varphi} - C_1^{\psi}S_2^{\psi})\dot{\psi}_2^2 + 2S_1^{\psi}S_2^{\psi}S_{12}^{\varphi}\dot{\varphi}_2\dot{\psi}_2] - \\ - 2\eta_{12}[S_1^{\psi}C_2^{\psi}S_{12}^{\varphi}\dot{\xi}_2\dot{\varphi}_2 - (S_1^{\psi}C_2^{\psi}C_{12}^{\varphi} - C_1^{\psi}S_2^{\psi}S_2^{\psi})\dot{\xi}_2 + 2(C_1^{\psi}C_2^{\psi} + S_1^{\psi}S_2^{\psi}C_{12}^{\varphi})\dot{\xi}_2\dot{\psi}_2] = M_{\psi_1}\end{gathered} \tag{4.5}$$

$$\begin{gathered}\eta_{21}[C_1^{\psi}S_2^{\psi}S_{12}^{\varphi}\ddot{\varphi}_1 + (C_1^{\psi}C_2^{\psi} + S_1^{\psi}S_2^{\psi}C_{12}^{\varphi})\ddot{\psi}_1 + C_1^{\psi}S_2^{\psi}C_{12}^{\varphi}\dot{\varphi}_1^2 + (C_1^{\psi}S_2^{\psi}C_{12}^{\varphi} - \\ - S_1^{\psi}C_2^{\psi})\dot{\psi}_1^2 - 2S_1^{\psi}S_2^{\psi}S_{12}^{\varphi}\dot{\varphi}_1\dot{\psi}_1] + \eta_{22}[2C_1^{\psi}S_2^{\psi}S_{12}^{\varphi}\dot{\xi}_1\dot{\varphi}_1 + 2(C_1^{\psi}C_2^{\psi} + S_1^{\psi}S_2^{\psi}C_{12}^{\varphi})\dot{\xi}_1\dot{\psi}_1 + \\ + (C_1^{\psi}S_2^{\psi}C_{12}^{\varphi} - S_1^{\psi}C_2^{\psi})\ddot{\xi}_1] + \xi_{22}[\ddot{\psi}_2 + S_2^{\psi}C_2^{\psi}\varphi_2^2] + 2\zeta_{21}\dot{\xi}_2\dot{\psi}_2 = M_{\psi_2}\end{gathered} \tag{4.6}$$

$$-\zeta_{12}[(C_1^\psi)^2\dot\varphi_1^2+\dot\psi_1^2]-\theta_{12}\ddot\xi_1+\eta_{22}[C_1^\psi C_2^\psi S_{12}^\varphi\ddot\varphi_2+(S_1^\psi C_2^\psi-C_1^\psi S_2^\psi C_{12}^\varphi)\ddot\psi_2-C_1^\psi C_2^\psi C_{12}^\varphi\dot\varphi_2^2-$$
$$-(S_1^\psi S_2^\psi+C_1^\psi C_2^\psi C_{12}^\varphi)\dot\psi_2^2-2C_1^\psi S_2^\psi S_{12}^\varphi\dot\varphi_2\dot\psi_2+2C_1^\psi C_2^\psi S_{12}^\varphi\dot\xi_2\dot\varphi_2]+ \tag{4.7}$$
$$+\theta_{21}[(S_1^\psi S_2^\psi+C_1^\psi C_2^\psi C_{12}^\varphi)\ddot\xi_2+2(S_1^\psi C_2^\psi-C_1^\psi S_2^\psi C_{12}^\varphi)\dot\xi_2\dot\psi_2]=F_{\xi_1}$$

$$-\eta_{12}[C_1^\psi C_2^\psi S_{12}^\varphi\ddot\varphi_1+(S_1^\psi C_2^\psi C_{12}^\varphi-C_1^\psi S_2^\psi)\ddot\psi_1+C_1^\psi C_2^\psi C_{12}^\varphi\dot\varphi_1^2+(S_1^\psi S_2^\psi+$$
$$+C_1^\psi C_2^\psi C_{12}^\varphi)\dot\psi_1^2-2S_1^\psi C_2^\psi S_{12}^\varphi\dot\varphi_1\dot\psi_1]+2\theta_{21}[(S_1^\psi C_2^\psi C_{12}^\varphi-C_1^\psi S_2^\psi)\dot\xi_1\dot\psi_1+ \tag{4.8}$$
$$+2C_1^\psi C_2^\psi S_{12}^\varphi\dot\xi_1\dot\varphi_1-(S_1^\psi S_2^\psi+C_1^\psi C_2^\psi C_{12}^\varphi)\xi_1]-\zeta_{21}[(C_2^\psi)^2\dot\varphi_2^2+\dot\psi_2^2]-\theta_{22}\xi_2=F_{\xi_2}$$

где: $C_i=\cos\varphi_i$, $S_i=\sin\varphi_i$, $(i=1, 2)$, $C_{12}^\varphi=\cos(\varphi_1-\varphi_2)$, $S_{12}^\varphi=\sin(\varphi_1-\varphi_2)$, $\theta_{21}=\theta_{22}=m_{22}$, $\theta_{11}=\theta_{12}=m_{12}+m_{21}+m_{22}$, $\eta_{12}=2(l_{11}+l_{12}+\xi_1)m_{22}$, $\zeta_{11}=I_{11}+I_{12}+(l_{11}^2+2l_{11}\xi_1+\xi_1^2+$ $+l_{11}l_{12}+l_{12}\xi_1)m_{12}+(l_{11}^2+2l_{11}\xi_1+\xi_1^2+2l_{11}l_{12}+l_{12}^2+2l_{12}\xi_1)(m_{21}+m_{22})$, $\eta_{21}=[(l_{11}+l_{12}+$ $+\xi_1)(l_{21}(m_{21}+2m_{22})+m_{22}(2\xi_2+l_{22}))]/2$, $\eta_{22}=[(l_{21}(m_{21}+2m_{22})+m_{22}(2\xi_2+l_{22}))]/2$, $\zeta_{12}=$ $=2(l_{11}+\xi_1)(m_{12}+m_{21}+m_{22})+l_{12}(m_{12}+2(m_{21}+m_{22}))$, $\zeta_{21}=m_{22}(2l_{21}+l_{22}+2\xi_2)$, $\zeta_{22}=$ $=[I_{21}+I_{22}+m_{22}(l_{21}^2+l_{21}l_{22}+2l_{21}\xi_2+l_{22}\xi_2+\xi_2^2)]$ – инерционно-геометрические характеристики звеньев, учитывающие расположение весомых участков на звене.

Таким образом, получена система дифференциальных уравнений движения в форме уравнений Лагранжа второго рода для рассматриваемого механизма.

Время, затраченное на офисном компьютере на составление системы дифференциальных уравнений движения с помощью уравнений Лагранжа второго рода для модели механизма с одним звеном, составило 5.2 с, с двумя звеньями 1061.0 с, с тремя звеньями 12611.8 с. Из приведенного времени работы видно, что проблема разработки скоростных алгоритмов составления систем дифференциальных уравнений движения для механизмов с достаточно большим количеством звеньев является актуальной.

5. Обобщение модели механизма на случай произвольного количества звеньев переменной длины. Рассмотрим многозвенную стержневую модель с n звеньями. Система имеет звенья переменной длины, конструкция которых была описана выше. Все длины стержней складываются из двух участков постоянной длины $l_{i\alpha}$ $(i=1, ..., n;\ \alpha=1, 2)$ и переменной длины $\xi_i=\xi_i(t)$. На рис. 3 изображена модель с n звеньями переменной длины в одноопорной фазе движения и введены соответствующие обозначения.

Положение однозначно определяется углами φ_i, ψ_i и участком переменной длины стержней ξ_i. Рассматриваемая система имеет $3n$ степеней свободы, т.к. движение каждого звена описывается набором из трех параметров: углов $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$ и изменением длины невесомого участка $\xi_i(t)$. Массы участков звеньев постоянной длины обозначим $m_{i\alpha}$, моменты инерции звеньев постоянной длины относительно осей, проходящих через один из концов весомого стержня, перпендикулярно плоскости движения – $I_{i\alpha}$ $(i=1, ..., n;\ \alpha=1, 2)$. Обозначим: $M_{i\varphi}$, $M_{i\psi}$ – моменты, развиваемые в i-м шарнире; F_i – продольная сила, действующая вдоль i-го стержня, обеспечивающая изменение его длины. Моменты и продольные силы являются управлением в данной механической системе.

Уравнения движения элементов n-звенной механической системы в одноопорной фазе представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений, которые в матричной форме можно записать в виде:

$$A_\kappa(\varphi,\psi,\xi)\ddot\varphi+B_\kappa(\varphi,\psi,\xi)\ddot\psi+C_\kappa(\varphi,\psi,\xi)\ddot\xi+D_\kappa(\varphi,\psi,\xi)\dot\Phi\dot\varphi+E_\kappa(\varphi,\psi,\xi)\dot\Psi\dot\psi+$$
$$+2F_\kappa(\varphi,\psi,\xi)\dot\Phi\dot\xi+2G_\kappa(\varphi,\psi,\xi)\dot\Phi\dot\psi+2H_\kappa(\varphi,\psi,\xi)\dot\Psi\dot\xi+gK_\kappa(\psi)=M_\kappa(\varphi,\psi,\xi) \tag{5.1}$$

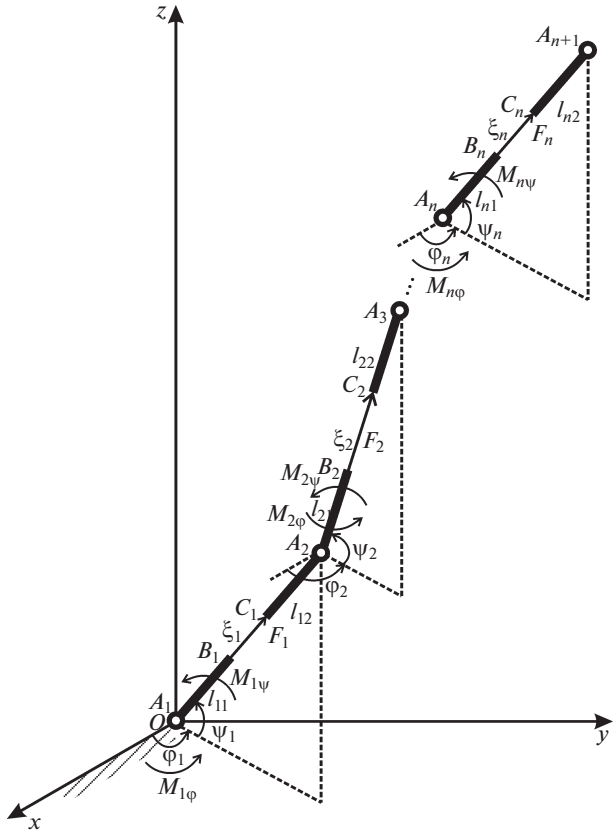

Рис. 3. Модель n шарнирно соединенных звеньев экзоскелета переменной длины в пространстве

где нижние индексы у матриц указывают на описание соответствующей обобщенной координаты: $\kappa = 1, ..., 3$, где 1 соответствует обобщенной координате φ, 2 – ψ, 3 – ξ; $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)^T$, $\psi = (\psi_1, ..., \psi_n)^T$ – векторы углов; $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)^T$ – вектор участков переменной длины звеньев; $\dot{\varphi}$ – вектор угловых скоростей; $\ddot{\varphi}$ – вектор угловых ускорений; $\dot{\Phi} = \mathrm{diag}(\dot{\varphi}_1, ..., \dot{\varphi}_n)$ – диагональная матрица; M – векторы управляющих моментов и сил на участке переменной длины звена; A, B, G, H – матрицы, учитывающие инерционные свойства системы; C, K – матрицы, определяемые моментами силы тяжести; D, E, F – матрицы, учитывающие переменную длину звеньев.

В качестве примера рассмотрим формулу для матрицы A_φ. Матрица $A_\varphi = (a_{ij})$ является симметрической: $a_{ij} = a_{ji}$, поэтому достаточно привести для нее только диагональные и наддиагональные элементы, т.е., если i – номер строки, j – номер столбца, то i, $j = 1,2, ..., n$, при этом $j \geq i$.

Элементы симметрической матрицы A_φ имеют вид:

$$a_{ij} = \delta_{ij}\left(\sum_{\alpha=1}^{2} I_{i\alpha}\right) + (l_{i1} + \xi_i + l_{i2})\left\{m_{i2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\delta_{ij}}{2}\right)(l_{i1} + \xi_i) + \left(\sum_{k=j+1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{2} m_{k\alpha}\right)(l_{i1} + \xi_i + l_{i2}) + \right.$$
$$\left. + \left((1 - \delta_{ij})\left(\sum_{k=j+1}^{n}\left(m_{k1}l_{k1} + m_{k2}(l_{k2} + 2l_{k1} + 2\xi_k)\right)\right)\right)\right\}\cos(\varphi_i - \varphi_j)\cos\psi_i\cos\psi_j \qquad (5.2)$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$ – символ Кронекера.

Матричная форма записи уравнений движения (5.1) является универсальной и может быть применена к описанию движения экзоскелета или антропоморфного робота с любым числом звеньев.

Дальнейшей задачей является разработка методов управления подобными системами с заданным числом звеньев переменной длины.

6. Модель экзоскелета с пятью звеньями переменной длины в пространстве. При переходе к многозвенной модели экзоскелета описанные выше закономерности позволяют получить алгоритм построения систем дифференциальных уравнений движения трехмерных моделей экзоскелетов, аналогично тому, как это описано в работе [21] для звеньев переменной длины с точечными сосредоточенными массами.

Экзоскелет состоит из звеньев переменной длины (рис. 4), соединенных комбинацией двух цилиндрических шарниров, обеспечивающих необходимую подвижность соединения звеньев для антропоморфного движения. Каждое звено переменной длины состоит из невесомой части, способной изменять свою длину и двух весомых абсолютно жестких частей длинами l_{ij} ($i = 1, 2, ..., 5; j = 1, 2$), совершающих движение относительно друг друга вдоль прямой, проходящей через начало и конец звена. То есть изменение длины звена реализуется за счет относительного движения весомых участков вдоль направления звена на участке $B_iC_i = \xi_i(t)$ ($i = 1, 2, ..., 5$). Каждое последующее звено соединяется с предыдущим с помощью комбинации двух цилиндрических шарниров, взаимно перпендикулярных друг другу и обеспечивающих реализацию необходимой подвижности звеньев. Первое звено соединено шарнирно с неподвижной опорой.

Положение механизма однозначно определяется углами между звеньями $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$ и переменными длинами участков звеньев $\xi_i(t)$ ($i = 1, 2, ..., 5$). Рассматриваемая пространственная модель экзоскелета имеет пятнадцать степеней свободы.

Массы весомых абсолютно твердых участков звеньев A_iB_i равны m_{i1}, моменты инерции относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, I_{i1}, массы участков $C_iA_{i\pm1}$ равны m_{i2}, моменты инерции относительно оси, проходящей через его конец перпендикулярно плоскости движения, I_{i2}. Плотность материала, из которого изготовлен j-й весомый участок i-го звена, ρ_{ij} ($i = 1, 2, ..., 5; j = 1, 2$).

Кинетическая энергия звеньев складывается из энергий весомых участков звеньев A_iB_i и $C_iA_{i\pm1}$, которые совершают сложное движение: вращательное вокруг полюса, находящегося в точке прикрепления к предыдущему звену, и поступательное вдоль направления звена.

В результате реализации предложенного выше алгоритма получаются дифференциальные уравнения движения механизма, которые представлены выше в обобщенном векторно-матричном виде (5.1). Матрицы для модели с пятью подвижными звеньями переменной длины получаются весьма громоздкими, поэтому здесь не приводятся.

7. Числовой пример определения управляющих воздействий при движении экзоскелета с человеком внутри по заданной траектории. Для оценки жесткости пружин определим управляющие моменты в шарнирах, необходимые для механизма при антропоморфном движении. Для этого используем алгоритм управления движением экзоскелета на основе периодических функций, обеспечивающих антропоморфность походки устройства [25, 27]. Зададим функции изменения углов и длин звеньев механизма следующим образом:

$$\psi_1(t) = \pi/2 + j_1 \sin\left[f_1 - \left(1 - \cos\left[2\pi t/T\right]\right)\pi/2\right]$$
$$\psi_2(t) = \pi/2 + j_2 \cos\left[f_2 - \left(1 - \cos\left[2\pi t/T\right]\right)\pi/2\right]$$

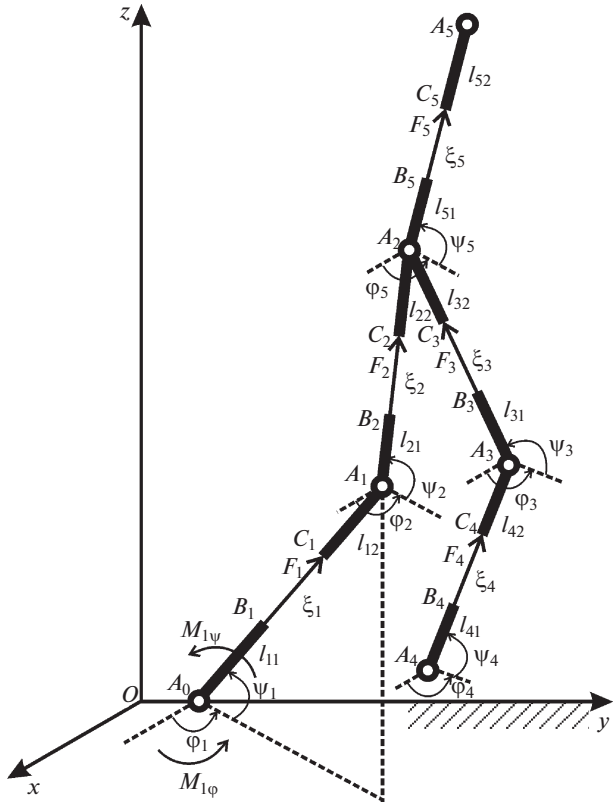

Рис. 4. Модель пяти шарнирно соединенных звеньев экзоскелета переменной длины в пространстве

$$\begin{gathered}
\psi_3(t) = \pi/2 + j_3 \cos\left[f_3 - \left(1 + \cos\left[2\pi t/T\right]\right)\pi/2\right] \\
\psi_4(t) = \pi/2 + j_4 \sin\left[f_4 - \left(1 + \cos\left[2\pi t/T\right]\right)\pi/2\right] \\
\psi_5(t) = \pi/2, \quad \varphi_1(t) = j_1 \sin\left[2\pi t/T\right] \\
\varphi_2(t) = j_2 \cos\left[2\pi t/T\right], \quad \varphi_3(t) = j_3 \cos\left[2\pi t/T\right] \\
\varphi_4(t) = j_4 \sin\left[2\pi t/T\right], \quad \varphi_5(t) = j_5 \cos\left[2\pi t/T\right] \\
\xi_1(t) = l_1^* - l_{11} - l_{12} + l_1^* l \sin\left[2\pi t/T\right] \\
\xi_2(t) = l_2^* - l_{21} - l_{22} + l_2^* l \sin\left[2\pi t/T\right], \quad \xi_3(t) = l_3^* - l_{31} - l_{32} - l_3^* l \sin\left[2\pi t/T\right] \\
\xi_4(t) = l_4^* - l_{41} - l_{42} - l_4^* l \sin\left[2\pi t/T\right], \quad \xi_5(t) = l_5^* - l_{51} - l_{52} + l_5^* l \sin\left[2\pi t/T\right]
\end{gathered} \tag{7.1}$$

где T – период ходьбы, j_i и f_i (i = 1, ..., 5) – параметры ходьбы, l_i^* – начальная длина недеформированного звена, l – коэффициент изменения длины звена.

Для обеспечения возможности сопоставления результатов значения параметров для численных расчетов управляющих моментов и продольных сил были выбраны аналогично работам [26]. Начальные длины недеформированных звеньев: $l_1^* = l_4^* =$ 0.385 м, $l_2^* = l_3^* = 0.477$ м, $l_5^* = 0.771$ м. Эти длины на звене распределялись следующим

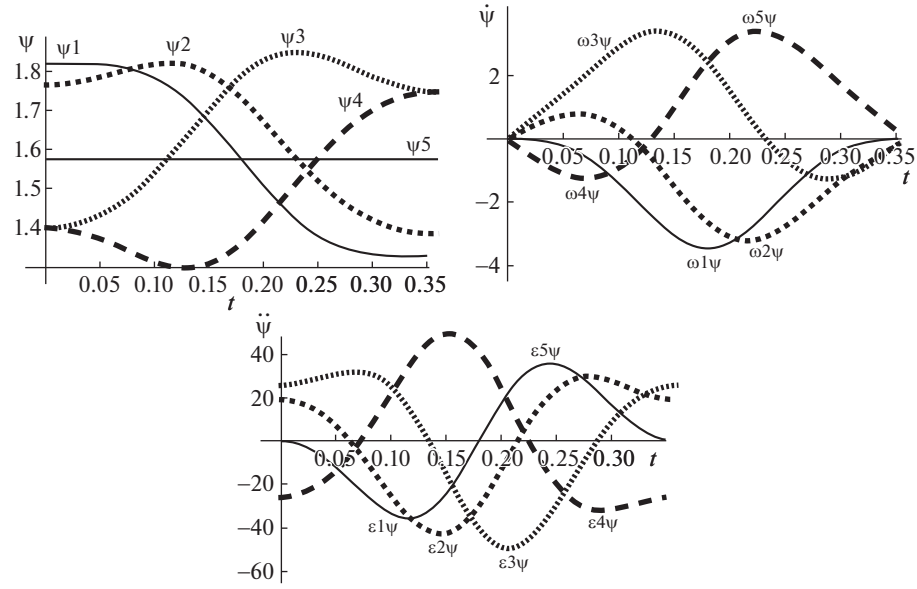

Рис. 5. Зависимость угловой координаты ψ (рад), угловой скорости $\dot{\psi}$ (рад/с) и углового ускорения $\ddot{\psi}$ (рад/с^2) подвижных звеньев экзоскелета от времени t (с), $\ddot{\psi}$ голень опорной ноги (звено 1), ····· бедро опорной ноги (звено 2), ▬ ▬ ▬ голень переносимой ноги (звено 3), ▪▪▪▪▪▪▪ бедро переносимой ноги (звено 4), — корпус (звено 5)

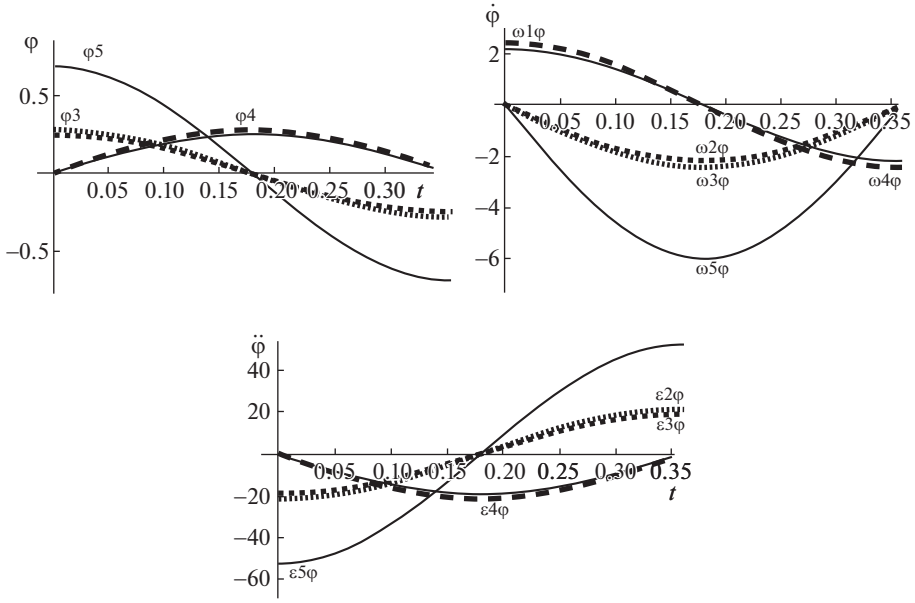

Рис. 6. Зависимость угловой координаты φ (рад), угловой скорости $\dot{\varphi}$ (рад/с) и углового ускорения $\ddot{\varphi}$ (рад/с^2) подвижных звеньев экзоскелета от времени t (с), — голень опорной ноги (звено 1), ▪▪▪▪▪▪▪ бедро опорной ноги (звено 2), ▬ ▬ ▬ голень переносимой ноги (звено 3), ····· бедро переносимой ноги (звено 4), — корпус (звено 5)

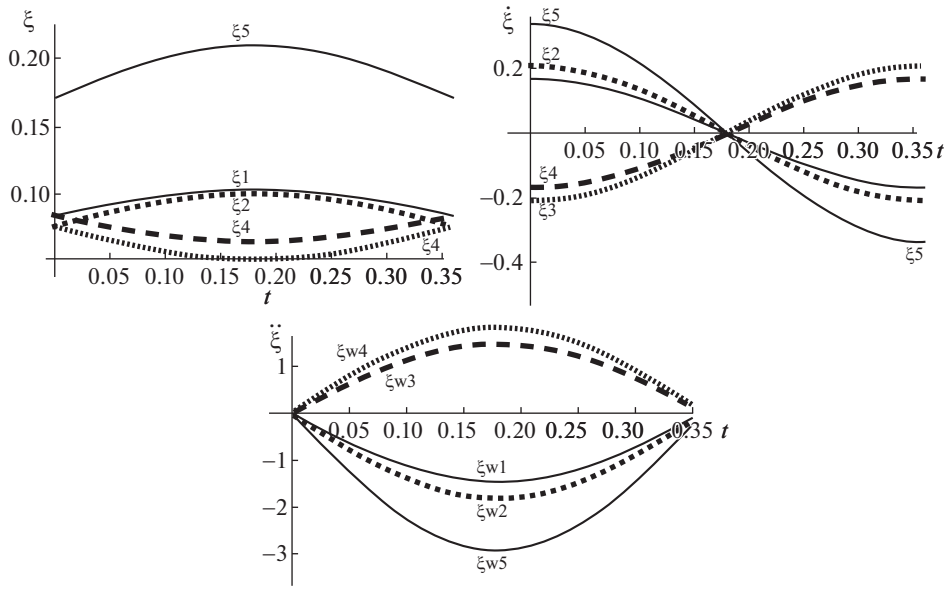

Рис. 7. Зависимость линейной координаты ξ (м), определяющей изменение длины звеньев экзоскелета, скорости $\dot{\xi}$ (м/с) и ускорения $\ddot{\xi}$ (м/с^2) от времени t (с), — голень опорной ноги (звено 1), ▪▪▪▪▪▪▪ бедро опорной ноги (звено 2), ▬ ▬ ▬ голень переносимой ноги (звено 3), ····· бедро переносимой ноги (звено 4), — корпус (звено 5)

образом: $l_{11} = l_{41} = 0.15$ м, $\xi_1^* = \xi_4^* = 0.085$ м, $l_{21} = l_{31} = 0.2$ м, $\xi_2^* = \xi_3^* = 0.077$ м, $l_{51} = 0.3$ м, $\xi_5^* = 0.171$ м, $l_{i1} = l_{i2}$ ($i = 1, ..., 5$). Массы звеньев $m_1 = m_4 = 2.91$ кг, $m_2 = m_3 = 8.93$ кг, $m_5 = 28.93$ кг, они распределялись равномерно между двумя весомыми абсолютно твердыми участками звеньев, т.е. $m_{i1} = m_{i2} = m_i/2$ ($i = 1, ..., 5$). Моменты инерции весомых участков звеньев для стержней относительно оси, проходящей через нижнюю точку весомой части звена равны: $I_{11} = I_{41} = 0.011$ кг · м^2, $I_{21} = I_{31} = 0.060$ кг · м^2, $I_{51} = 0.434$ кг · м^2, $I_{i1} = I_{i2}$ ($i = 1, ..., 5$). Для приближенного моделирования инерционных свойств человеко-машинной системы все значения масс и моментов инерции умножались на коэффициент 1.5. Таким образом, учитывалась собственная масса звеньев экзоскелета и звеньев опорно-двигательного аппарата человека. Ускорение свободного падения $g = 9.81$ м/с^2. Время, в течение которого происходит одноопорная фаза шага, т.е. половина периода ходьбы $t_k = 0.36$ с. Коэффициент изменения длины звена $l = 0.25$. Параметры ходьбы: $j_1 = j_2 = 0.25, j_3 = j_4 = 0.279, j_5 = 0.1$, $f_1 = \pi/2, f_2 = f_4 = 0.687, f_3 = 0.884, f_5 = \pi$.

Приведем графики задаваемых аналитически углов поворота ψ, угловой скорости $\dot{\psi}$ и углового ускорения $\ddot{\psi}$ подвижных звеньев экзоскелета от времени (рис. 5), углов поворота φ, угловой скорости $\dot{\varphi}$ и углового ускорения $\ddot{\varphi}$ подвижных звеньев экзоскелета от времени (рис. 6), изменения длин ξ невесомых участков звеньев экзоскелета и их скоростей $\dot{\xi}$ и ускорений $\ddot{\xi}$ от времени (рис. 7).

Приведем полученные в результате решения обратной задачи динамики графики управляющих моментов в шарнирах-суставах экзоскелета от времени (рис. 8) и про-

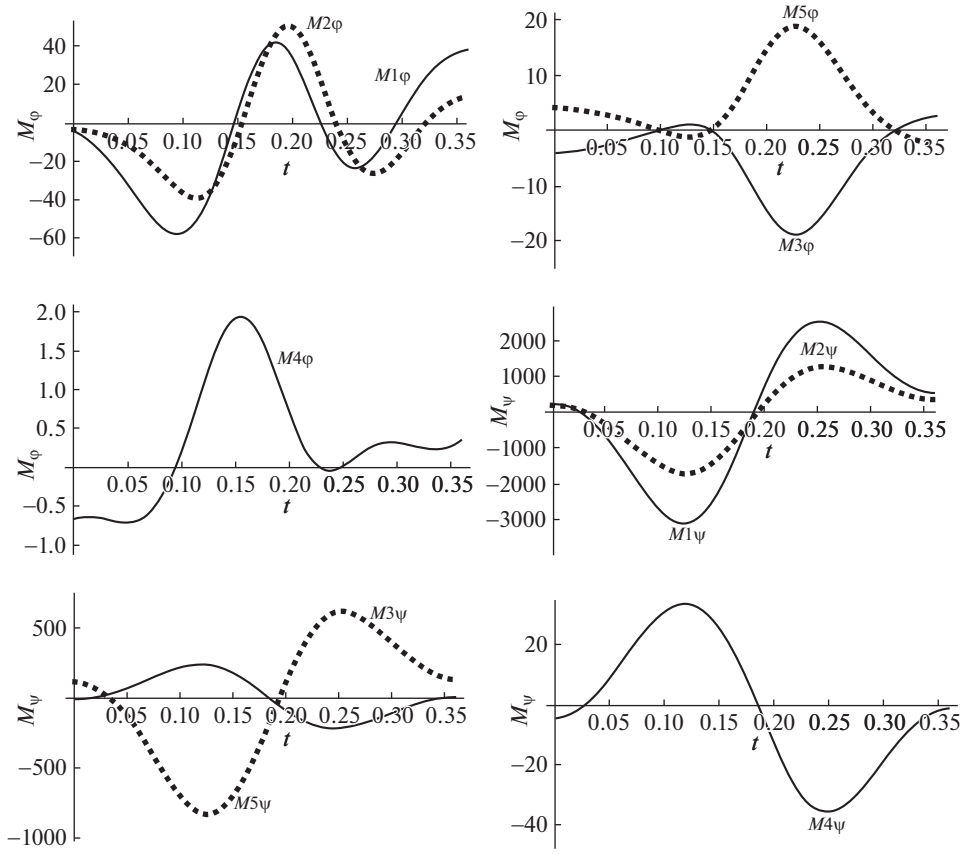

Рис. 8. Зависимость моментов M (Н · м), управляющих поворотами в шарнирах между подвижными звеньями экзоскелета от времени t (с)

дольных сил, действующих вдоль звеньев экзоскелета от времени (рис. 9), получающихся при задании кинематики движения в виде (7.1). Для наглядности представления результатов на рис. 8 и 9 графики сгруппированы по масштабу абсолютных максимальных значений.

Полученные зависимости управляющих усилий показывают имеющуюся периодичность в управлении и синхронизацию управляющих воздействий при движении экзоскелета. Синхронизация наиболее выраженно проявляется на зависимостях управляющих моментов и сил с индексами 1 и 2 – для голени и бедра опорной ноги.

Кадры анимации от начального положения до конечного выглядят следующим образом (рис. 10). На кадрах тонкими отрезками показаны невесомые части звеньев переменной длины, толстыми – весомые, абсолютно твердые.

Таким образом, в процессе исследований синтезирована пространственная анимационная модель движения человеко-машинной системы, наглядно демонстрирующая возможности подобного управления ходьбой.

Заключение. В работе предложена конструкция экзоскелета со звеньями переменной длины, состоящими из двух массивных абсолютно твердых участков и расположенным между ними невесомым участком переменной длины. С помощью представленного в работе алгоритма построения систем дифференциальных уравнений движе-

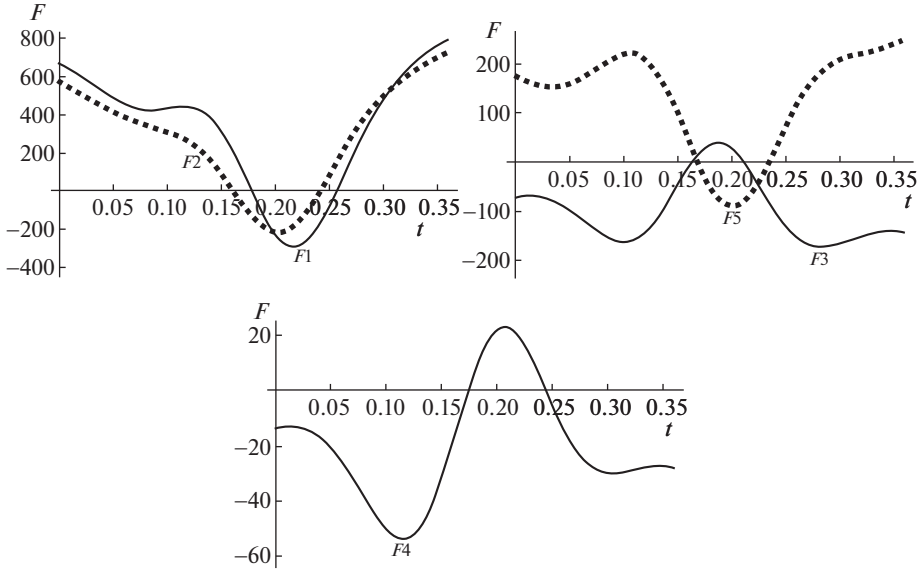

Рис. 9. Зависимость продольной силы F (Н), управляющей изменением длины звена экзоскелета от времени t (с)

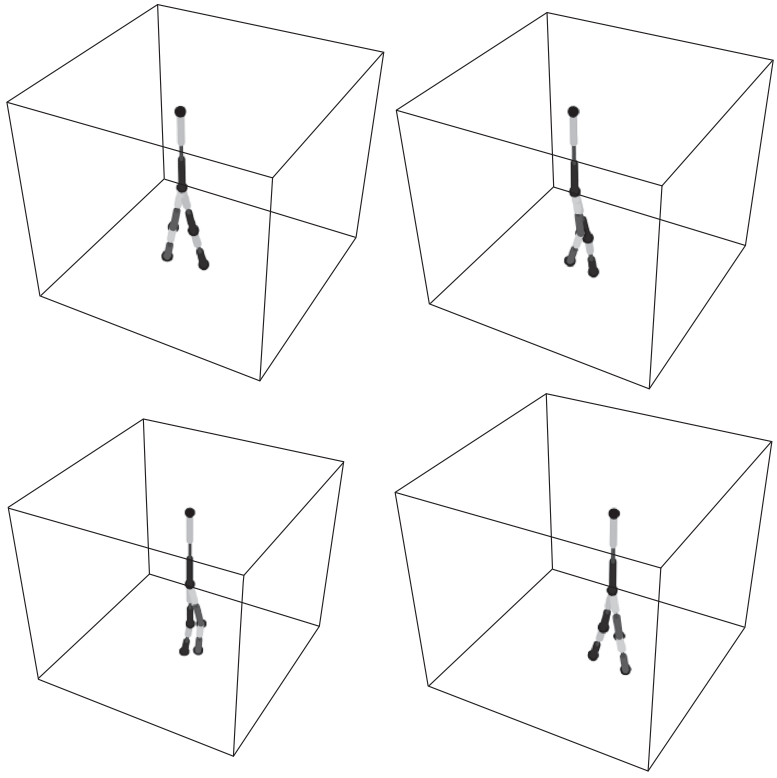

Рис. 10. Кадры анимации движения антропоморфной походки экзоскелета с пятью шарнирно соединенными звеньями переменной длины

ния трехмерных моделей экзоскелетов получена система дифференциальных уравнений движения, описывающая движения механизма в пространстве.

Синтезированы траектории движения звеньев человека в экзоскелете, определены управляющие моменты и продольные силы. Получены зависимости управляющих усилий, показывающие имеющуюся периодичность в управлении и синхронизацию управляющих воздействий при движении экзоскелета. Проведена анимационная визуализация движения человеко-машиной системы в виде человека в экзоскелете, показана ее антропоморфность.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Смоленской области в рамках научного проекта № 19-48-670002.

The reported study was funded by RFBR and Smolensk region, project number 19-48-670002.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихоплав О.А., Иванова В.В., Гурьянова Е.А., Иванов И.Н.* Эффективность роботизированной механотерапии комплекса “LOKOMAT PRO” у пациентов, перенёсших инсульт // Вестник восстановительной медицины. 2019. № 5 (93). С. 57–64.
2. *Tsukahara A., Hasegawa Y., Eguchi K., Sankai Y.* Restoration of gait for spinal cord injury patients using HAL with intention estimator for preferable swing speed // IEEE Trans. Neural. Syst. Rehabil. Eng. 2015. V. 23. № 2. P. 308–318. https://doi.org/10.1109/TNSRE.2014.2364618
3. *Павловский В.Е. и др.* Биомехатронный комплекс нейрореабилитации – концепция, конструкция, модели и управление // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. № 111. М.: ИПМ, 2014. 19 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-111
4. Проекты. ExoChair. Промышленное оборудование. URL:https://karfidovlab.com/projects/exochair/ (дата обращения: 10.11.2020).
5. Exoatlet. Носимые экзоскелеты для реабилитации детей и взрослых. URL: https://exoatlet.lu/ (дата обращения: 10.11.2020).
6. *Котов С.В., Исакова Е.В., Лиждвой В.Ю., Секирин А.Б., Письменная Е.В., Петрушанская К.А., Геворкян А.А.* Методические рекомендации по нейрореабилитации больных рассеянным склерозом, имеющих нарушения ходьбы, с использованием экзоскелета ExoAtlet. М.: ГБУЗ МО МОНИКИ им. М.Ф. Владимирского, 2018. 26 с.
7. *Яцун С.Ф., Антипов В.М. Карлов А.Е., Аль Манджи Хамиль Хамед Мохаммед* Подъем груза в экзоскелете с гравитационной компенсацией // Известия Юго-Западного государственного университета. 2019. Т. 23. № 2. С. 8–17.
8. *Яцун С.Ф., Мищенко В.Я., Яцун А.С.* Пассивный грузовой экзоскелетон: патент на полезную модель RU 190786 U1, 12.07.2019. Заявка № 2019110529 от 09.04.2019. опубл. 12.07.2019.
9. *Родин И.А.* Простая конструкция компенсации веса человека при ходьбе и беге: патент на изобретение RU 2489130 C1. 10.08.2013. Заявка № 2011148041/14 от 28.11.2011. опубл. 10.08.2013.
10. *Иванов В.Г., Мерзанюкова Е.В., Санин Д.А.* Экзоскелет: патент на изобретение RU 2567589 C1, 10.11.2015. заявка № 2014132377/14 от 05.08.2014. опубл. 10.11.2015.
11. *Chu C., Chu A.* Passive Exoskeleton: patent № US7571839B2 United States, publication of 21.07.2009.
12. *Qing Guo, Songjing Li, Dan Jiang* A Lower Extremity Exoskeleton: Human-Machine Coupled Modeling, Robust Control Design, Simulation, and Overload-Carrying Experiment // Mathematical Problems in Engineering. V. 2015. P. 1–15. https://doi.org/10.1155/2015/905761
13. *Blažek P., Bydžovský J., Griffin R., Mls K., Peterson B.* Obstacle Awareness Subsystem for Higher Exoskeleton Safety // Towards Digital Intelligence Society. DISA 2020. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol 1281. Ed. by *Paralič J., Sinčák P., Hartono P., Mařík V.* Springer, Cham, 2021. P. 59–71. https://doi.org/10.1007/978-3-030-63872-6_3

14. *Bao W., Villarreal D., Chiao J.-C.* Vision-Based Autonomous Walking in a Lower-Limb Powered Exoskeleton // 2020 IEEE 20th International Conference on Bioinformatics and Bioengineering (BIBE). Cincinnati, OH: IEEE, 2020. P. 830–834. DOI: 10.1109 BIBE50027.2020.00141.
15. *Proud J.K., Lai D.T.H., Mudie K.L., Carstairs G.L., Billing D.C., Garofolini A., Begg R.K.* Exoskeleton Application to Military Manual Handling Tasks. Hum Factors. 2020 Nov 18:18720820957467. Epub ahead of print. PMID:
https://doi.org/10.1177/0018720820957467332032 37
16. *Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А.* Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с.
17. *Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н.* Локомоция многозвенных систем на плоскости: динамика, управление, оптимизация // Препринт ИПМех РАН. № 1128. М.: ИПМех РАН, 2016. 154 с.
18. *Mukharlyamov R.G., Tleubergenov M.I.* Control of System Dynamics and Constraints Stabilization // Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2017. Communications in Computer and Information Science, vol 700. Cham: Springer, 2017. P. 431–442.
19. *Мухарлямов Р.Г.* Управление динамикой системы с дифференциальными связями // Известия РАН. Теория и системы управления. 2019. № 4. С. 16–28.
20. *Каспирович И.Е., Мухарлямов Р.Г.* О методах построения уравнений динамики с учетом стабилизации связей // Известия РАН. МТТ. 2019. № 3. С. 124–135.
21. *Борисов А.В., Розенблат Г.М.* Динамика механических стержневых систем со звеньями переменной длины применительно к эндо-, экзоскелетам и антропоморфным роботам на плоскости и в пространстве // Справочник. Инженерный журнал с приложением. 2019. Приложение. № 10–11. С. 1–20.
22. *Borisov A.V.* Two-Dimensional And Three-Dimensional Models Of Anthropomorphic Robot And Exoskeleton With Links Of Variable Length // Proceedings of 24th International Conference “Mechanika 2019”. Kaunas: Kaunas University of Technology, 2019. P. 26–39.
23. *Борисов А.В., Розенблат Г.М.* Матричный метод составления дифференциальных уравнений движения экзоскелета и управление им // ПММ. 2017. Т. 81. № 5. С. 511–522.
24. *Борисов А.В., Розенблат Г.М.* Моделирование динамики экзоскелета с управляемыми моментами в суставах и переменной длиной звеньев с использованием рекуррентного метода составления дифференциальных уравнений движения // Известия РАН. Теория и системы управления. 2018. № 2. С. 148–174.
25. *Борисов А.В., Волкова Ю.Е., Кончина Л.В., Маслова К.С.* Пассивно-активный экзоскелет со звеньями переменной длины и пружинными элементами двух типов // Справочник. Инженерный журнал с приложением. 2020. № 9. С. 54–64.
26. *Борисов А.В.* Динамика эндо- и экзоскелета: монография. Смоленск: Смоленская городская типография, 2012. 296 с.
27. *Бербюк В.Е.* Динамика и оптимизация робототехнических систем. Киев: Наукова Думка, 1989. 192 с.