ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 5, с. 141–151

УДК 531.391:521.93

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УСТАНОВИВШЕГОСЯ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ЗЕМНОГО ПОЛЮСА

© 2021 г. В. В. Перепёлкин[a],*, И. В. Скоробогатых[a], Мьо Зо Аунг[a]

[a] *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия*

**e-mail: vadimkin1@yandex.ru*

Поступила в редакцию 29.12.2020 г.
После доработки 06.01.2021 г.
Принята к публикации 14.01.2021 г.

Определены приливные деформации в рамках модели вязкоупругой Земли, обусловленные ее движением по инерции вокруг центра масс. Полученные выражения полюсного прилива отличаются от общепринятой модели диссипативными слагаемыми. Эти слагаемые определяются скоростью движения полюса, а не его положением. Проведен анализ динамики движения земного полюса на чандлеровской частоте с учетом полюсного прилива. Показано, что оптимальная аппроксимация параметров полюсного прилива согласно общепринятой модели, не приводит к оптимальной аппроксимации параметров установившегося колебания полюса.

Ключевые слова: земной полюс, чандлеровское колебание, полюсный прилив, диссипация, геопотенциал, движение относительно центра масс

DOI: 10.31857/S0572329921050081

1. Введение. Ранее, до 1970 года, точность измерений не позволяла наблюдать приливные деформации, возникающие из-за переменности центробежного потенциала. Это стало возможным с 1970 г. после создания сверхпроводящего гравиметра, позволяющего регистрировать малые вариации ускорения силы тяжести.

Следствием переменности центробежного потенциала, который определяется не только скоростью осевого вращения, но и положением мгновенной оси вращения в теле Земли, является зависимость геопотенциала от движения земного полюса [1, 2]. Из-за смещения главных осей инерции деформируемой Земли происходит изменение ее центробежных моментов инерции [3]. При этом деформации вязкоупругой мантии сопровождаются диссипацией энергии, что должно приводить к изменению структурных свойств модели полюсного прилива, введением слагаемых, определяемых вариациями центробежных моментов инерции или вариациями коэффициентов тессеральной гармоники геопотенциала [4, 5].

Следствием вязкости мантии Земли является малое смещение полюсного прилива и сдвиг фазы колебаний центробежных моментов инерции относительно колебаний земного полюса. Это смещение достаточно мало. Однако, для исследования движения земного полюса оно представляет значительный интерес и определяет амплитуду необходимого возмущения для поддержания установившегося чандлеровского колебания.

В данной статье для модели вязкоупругой Земли найдены вариации центробежных моментов инерции, вызванные квазипериодическим смещением оси вращения в теле Земли. Рассмотрено их сравнение с моделью, рекомендованной к учету Международной службой вращения Земли (МСВЗ) [1]. Сопоставляются основные свойства теоретического полюсного прилива согласно представленной модели и модели, рекомендованной МСВЗ. Движение земного полюса изучается на основе динамических уравнений Эйлера–Лиувилля с учетом вариаций коэффициентов геопотенциала, обусловленных приливными деформациями мантии Земли. Дан сравнительный анализ динамики движения земного полюса на чандлеровской частоте с учетом предложенной модели полюсного прилива и модели, рекомендованной МСВЗ.

2. Вариации центробежных моментов инерции деформируемой Земли. В работах [7, 8] был рассмотрен один из способов определения вариаций центробежных моментов инерции, вызванных полюсным приливом. Наряду с рассмотренным ранее подходом воспользуемся и другим способом. При тех же предположениях определим деформации вязкоупругого слоя осесимметричной Земли, возникающие при ее движении по инерции вокруг центра масс с помощью модального подхода [9, 10]. Модель Земли в грубом приближении представляет собой вязкоупругое твердое тело, состоящее из центральной части (ядра) и вязкоупругой мантии. При этом считается, что относительные перемещения точек подвижной среды на границе между ядром и мантией отсутствуют, а внешняя граница свободна. Вследствие предположения о малости деформаций мантии Земли будем рассматривать процесс деформирования в квазистатическом приближении.

Вектор упругого смещения задается в цилиндрических координатах, к которым делается переход от декартовых координат, связанных с твердой частью модели Земли (начало координат – центр масс Земли, ось x_3 направлена по ее оси симметрии, оси x_2 и x_1 в экваториальной плоскости, перпендикулярной оси x_3).

Вектор перемещения $\mathbf{u}$ представим в виде ряда по собственным формам упругих колебаний Земли:

$$\mathbf{u} = \sum_{k,i=0}^{\infty} (q_{ki}\mathbf{V}_{ki} + p_{ki}\mathbf{W}_{ki}) \tag{2.1}$$

где векторы $\mathbf{V}_{ki}, \mathbf{W}_{ki}$ – собственные формы, а величины q_{ki}, p_{ki} – нормальные координаты. Собственные формы представляют собой ортономированный базис, то есть подчиняются условиям

$$\begin{gathered}(\mathbf{V}_{ki}, \mathbf{V}_{lm}) = \int_{\Omega} \mathbf{V}_{ki}\mathbf{V}_{lm}dx = \delta_{(ki)(lm)} \\ (\mathbf{W}_{ki}, \mathbf{W}_{lm}) = \int_{\Omega} \mathbf{W}_{ki}\mathbf{W}_{lm}dx = \delta_{(ki)(lm)} \\ (\mathbf{V}_{ki}, \mathbf{W}_{lm}) = 0\end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь символ Кронекера имеет индексы $(ki)(lm)$. В цилиндрических координатах формы запишутся в виде [11]:

$$\begin{gathered}\mathbf{V}_{km}(\rho,\varphi,z) = (U_{km}(\rho,z)\sin k\varphi, V_{km}(\rho,z)\cos k\varphi, W_{km}(\rho,z)\sin k\varphi) \\ \mathbf{W}_{km}(\rho,\varphi,z) = (U_{km}(\rho,z)\cos k\varphi, -V_{km}(\rho,z)\sin k\varphi, W_{km}(\rho,z)\cos k\varphi)\end{gathered}$$

Здесь через $U_{km}(\rho,z)$, $V_{km}(\rho,z)$, $W_{km}(\rho,z)$ обозначены коэффициенты в выражениях координат собственных форм, при этом очевидно, что вообще говоря $V_{km}(\rho,z) \neq |\mathbf{V}_{km}|$, $W_{km}(\rho,z) \neq |\mathbf{W}_{km}|$.

Вариации тензора инерции определим из уравнений деформаций, которые согласно [9, 10], можно представить в виде:

$$\begin{gathered}\mathbf{D}(\mathbf{Q}+\chi b\dot{\mathbf{Q}})=\mathbf{P},\quad \mathbf{Q}=(p_{0m},q_{1m},p_{1m},q_{2m},p_{2m})^T\\ \mathbf{D}=\mathrm{diag}(\nu_{0m}^2,\nu_{1m}^2,\nu_{1m}^2,\nu_{2m}^2,\nu_{2m}^2)\\ \mathbf{P}=((\omega_1^2+\omega_2^2+2\omega_3^2)c_{0m11}+(\omega_1^2+\omega_2^2)c_{0m33},-2\omega_2\omega_3b_{1m32},\\ -2\omega_1\omega_3c_{1m13},-2\omega_1\omega_2b_{1m12},(\omega_1^2+\omega_2^2)c_{2m11})^T\end{gathered}\tag{2.3}$$

Здесь ω_1, ω_2, ω_3 – компоненты вектора мгновенной угловой скорости вращения Земли; ν_{im}^2 – квадрат частоты собственных колебаний, которая соответствует формам $\mathbf{V}_{im},\mathbf{W}_{im}$; постоянные коэффициенты c_{0m11}, c_{0m33}, c_{1m13}, c_{2m11}, b_{1m12}, b_{1m32} определяются геометрией области Ω, то есть фигурой Земли; χ – безразмерный диссипативный коэффициент $\chi \ll 1$; b – положительная константа, такая что χb – время релаксации.

Уравнения (2.3) описывают квазистатические деформации Земли. Предполагается, что свободные колебания уже затухли вследствие вязкого трения. Поэтому в уравнениях опущены инерционные члены со вторыми производными по времени.

Модальные переменные p_{km},q_{km} при $k>2$ определяются однородными уравнениями вида (2.3), поэтому в квазистатическом приближении имеем

$$q_{km}=p_{km}=0,\quad k>2$$

Решение системы уравнений (2.3) можно представить в виде ряда по степеням χ [11]:

$$\mathbf{Q}=\sum_{n=0}^{\infty}(-\chi b)^n\frac{\partial^n\mathbf{Q}_0}{\partial t^n}$$

В данной работе ограничимся первым приближением и решение системы (2.3) будем искать в виде:

$$\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_0-\chi b\frac{\partial\mathbf{Q}_0}{\partial t}$$

ограничившись двумя первыми членами.

Используя приближенные выражения для нормальных координат

$$\begin{aligned}p_{0m}&=\nu_{0m}^{-2}[(\omega_1^2+\omega_2^2+2\omega_3^2)c_{0m11}+(\omega_1^2+\omega_2^2)c_{0m33}]-\\ &-\chi b\nu_{0m}^{-2}2(\omega_1\dot\omega_1+\omega_2\dot\omega_2+2\omega_3\dot\omega_3)c_{0m11}+2(\omega_1\dot\omega_1+\omega_2\dot\omega_2)c_{0m33}\\ q_{1m}&=-\nu_{1m}^{-2}2\omega_2\omega_3b_{1m32}+\chi b\nu_{1m}^{-2}2b_{1m32}(\dot\omega_2\omega_3+\omega_2\dot\omega_3)\\ p_{1m}&=-\nu_{1m}^{-2}2\omega_1\omega_3c_{1m13}+\chi b\nu_{1m}^{-2}2c_{1m13}(\dot\omega_1\omega_3-\omega_1\dot\omega_3)\\ q_{2m}&=-\nu_{2m}^{-2}2\omega_1\omega_3b_{1m12}+\chi b\nu_{1m}^{-2}2b_{1m12}(\dot\omega_1\omega_2+\omega_1\dot\omega_2)\\ p_{2m}&=-\nu_{2m}^{-2}(\omega_1^2-\omega_2^2)c_{2m11}+\chi b\nu_{2m}^{-2}2c_{2m11}(\dot\omega_1\omega_1-\omega_1\dot\omega_1)\end{aligned}\tag{2.4}$$

из (2.1) получим вектор перемещений $\mathbf{u}$ в виде разложения по собственным формам.

Тензор инерции Земли $J=J[\mathbf{u}]$ будет зависеть от вектора перемещений $\mathbf{u}$. Без учета квадратичных членов по $\mathbf{u}$, представим J в виде суммы постоянной и варьируемой частей:

$$J[\mathbf{u}]=J_0^{-1}-J_0^{-1}J_1[\mathbf{u}]J_0^{-1},\quad J_0=\mathrm{diag}\{A,A,C\}$$

где $J_1[\mathbf{u}]$ – линейная по $\mathbf{u}$ компонента тензора инерции деформированной Земли:

$$J_1[\mathbf{u}] = \begin{pmatrix} J_{11} & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{21} & J_{22} & -J_{23} \\ -J_{31} & -J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}$$

$$J_{11} = 2\int_{\Omega} (x_2u_2 + x_3u_3)\rho_0 dx, \quad J_{22} = 2\int_{\Omega} (x_1u_1 + x_3u_3)\rho_0 dx \tag{2.5}$$

$$J_{33} = 2\int_{\Omega} (x_1u_1 + x_2u_2)\rho_0 dx, \quad J_{12} = J_{21} = 2\int_{\Omega} x_1u_2\rho_0 dx$$

$$J_{13} = J_{31} = 2\int_{\Omega} x_1u_3\rho_0 dx, \; J_{23} = J_{32} = 2\int_{\Omega} x_2u_3\rho_0 dx$$

С учетом (2.4) запишем выражения для центробежных моментов инерции Земли:

$$J_{12} = J_{21} = \pi\int_{\Omega^*} \rho_0 r^2 (U_{2m} + V_{2m}) dx^* \; q_{2m}$$

$$J_{13} = J_{31} = 2\pi\int_{\Omega^*} \rho_0 r^2 W_{1m} dx^* \; p_{1m} \tag{2.6}$$

$$J_{23} = J_{32} = 2\pi\int_{\Omega^*} \rho_0 r^2 W_{1m} dx^* \; q_{1m}$$

Здесь через dx^* обозначено интегрирование по области Ω^*, представляющей собой область Ω, взятую после интегрирования по цилиндрической координате φ. Интегралы в выражениях (2.6) являются константами поскольку берутся по неизменной области. Обозначив (аналогично [5]):

$$\pi\int_{\Omega^*} \rho_0 r^2 W_{1m} dx^* = b_{1m32} = c_{1m31}$$

$$\frac{\pi}{2}\int_{\Omega^*} \rho_0 r^2 (U_{2m} + V_{2m}) dx^* = b_{2m12} = b_{2m21} = c_{2m11} = c_{2m22}$$

центробежные моменты инерции (2.6) запишем в виде:

$$\begin{aligned} J_{12} &= J_{21} = \rho_0 2b_{2m12} q_{2m} \\ J_{13} &= J_{31} = \rho_0 2b_{1m32} p_{1m} \\ J_{23} &= J_{32} = \rho_0 2b_{1m32} q_{1m} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Наибольшими по величине будут J_{13}, J_{23}, которые, подставив формулы (2.4) в (2.7), можно представить в виде:

$$J_{13} = a\omega_1 + b\dot{\omega}_1, \quad J_{23} = a\omega_2 + b\dot{\omega}_2, \quad a < 0, \quad b > 0 \tag{2.8}$$

Коэффициенты в (2.8) определяются реологией мантии Земли. Вариации центробежных моментов инерции (2.8) идентичны выражениям, полученным в работе [8]. Учет центробежных моментов инерции (2.8) приводит к наличию малых диссипативных слагаемых в уравнениях движения земного полюса.

3. Оценка параметров модели полюсного прилива. Наибольшим по величине слагаемым из разложения геопотенциала W в ряд по сферическим гармоникам является слагаемое W_2 [2]:

$$W_2 = \frac{Gm_E R_E^2}{R^3} \sum_{m=0}^{2} [c_{2m} \cos m\lambda + s_{2m} \sin m\lambda] P_2^m(\cos\theta) \tag{3.1}$$

где $P_n^m(\cos\theta)$ – присоединённые функции Лежандра; G – гравитационная постоянная; m_E, R_E – масса и радиус Земли соответственно; R, θ, λ – сферические координаты некоторой точки пространства.

Коэффициенты зональной (при $m = 0$), тессеральной (при $m = 1$) и секториальной (при $m = 2$) гармоник в W_2 известным образом выражаются через осевые и центробежные моменты инерции Земли следующим образом [2]:

$$\begin{gathered} c_{20} = \frac{J_{11} + J_{22} - 2J_{33}}{2m_E R_E^2}, \quad c_{21} = \frac{J_{13}}{m_E R_E^2}, \quad s_{21} = \frac{J_{23}}{m_E R_E^2} \\ c_{22} = \frac{J_{22} - J_{11}}{4m_E R_E^2}, \quad s_{22} = \frac{J_{12}}{2m_E R_E^2} \end{gathered} \tag{3.2}$$

Зависимость коэффициентов тессеральной гармоники геопотенциала от координат земного полюса x_p, y_p определяется общепринятой моделью полюсного прилива [1]:

$$\begin{bmatrix} \delta c_{21} \\ \delta s_{21} \end{bmatrix} = 1.333\times 10^{-9}\left(\begin{bmatrix} -x_p \\ y_p \end{bmatrix} + 0.0115\begin{bmatrix} y_p \\ x_p \end{bmatrix}\right) \tag{3.3}$$

Изменение центробежных моментов инерции $\tilde{J}_{13}$, $\tilde{J}_{23}$, соответствующие этой модели, согласно (3.3) и (3.2), можно представить в виде:

$$\tilde{J}_{13} = a\omega_1 - c\omega_2, \quad \tilde{J}_{23} = a\omega_2 + c\omega_1, \quad a < 0, \quad c > 0 \tag{3.4}$$

где a, c – коэффициенты, характеризующие величину полюсного прилива и сдвиг его фазы, возникающий вследствие вязкости подвижной среды. Коэффициент c в (3.4) определяется диссипацией и значительно меньше коэффициента a. Из (3.3) следует, что $c/a = 0.0115$.

Выражения (3.4) отличаются от (2.8) диссипативными слагаемыми с коэффициентами b и c. Диссипативные слагаемые в (2.8) приводят к переменному сдвигу фазы полюсного прилива относительно положения полюса, в то время как соответствующие слагаемые из (3.4) приводят к постоянному сдвигу фазы, то есть к “запаздыванию” полюсного прилива на постоянный угол.

Рассмотрим различия выражений (2.8) и (3.4) более подробно. Компоненты ω_1, ω_2 вектора мгновенной угловой скорости согласно [12, 13] содержат две основные компоненты – чандлеровское колебание и годичное колебание:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a_{ch}\cos\alpha_{ch} + a_h\cos\alpha_h \\ \omega_2 &= a_{ch}\sin\alpha_{ch} + a_h\sin\alpha_h \end{aligned} \tag{3.5}$$

Здесь a_{ch}, a_h – амплитуды чандлеровского и годичного колебаний соответственно, а $\alpha_{ch} = 2\pi Nt + \alpha_{ch}^0$, $\alpha_h = 2\pi t + \alpha_h^0$ – их фазы, которым соответствуют чандлеровская ($N = 0.843$ цикл/год) и годичная (1 цикл/год) частоты.

В уравнениях (3.5) движения полюса перейдем к полярным координатам (амплитуде движения полюса A и полярному углу ψ), используя замену $\omega_1 = A\cos\psi$, $\omega_2 = A\sin\psi$. Амплитуда результирующего движения полюса дается выражением [14]:

$$A = \sqrt{a_{ch}^2 + a_h^2 + 2a_{ch}a_h\cos(\alpha_{ch} - \alpha_h)} \tag{3.6}$$

Как следует из (3.6) амплитуда полюсного прилива пропорциональна амплитуде колебаний полюса $\sqrt{(\tilde{J}_{13})^2 + (\tilde{J}_{23})^2} = \sqrt{a^2 + c^2}A$. Таким образом, фазы амплитуды полюсного прилива согласно (3.4) и амплитуды колебаний полюса A не зависят от времени, совпадают и равны $\alpha_{ch}^0 - \alpha_h^0$. Из (3.3) следует, что сдвиг фазы полюсного прилива по отношению к положению полюса – около 0.65°. От сдвига фазы полюсного прилива зависят параметры возмущения с чандлеровской частотой, необходимого для поддержания наблюдаемого колебания. Кроме того, постоянный сдвиг фазы приводит к линейной системе дифференциальных уравнений движения земного полюса. Для вариаций центробежных моментов инерции, определяемых выражениями (2.8) сдвиг фазы окажется переменной величиной.

Теперь вычислим амплитуду полюсного прилива, описываемого выражениями (2.8):

$$\sqrt{(J_{13})^2 + (J_{23})^2} \approx [(a^2 + (b\pi(N+1))^2)A^2 - 4ab\pi(N-1)a_{ch}a_h \sin(\alpha_{ch} - \alpha_h)]^{1/2} \tag{3.7}$$

Как следует из (3.7), фаза амплитуды полюсного прилива будет сдвинута по отношению к фазе амплитуды колебаний полюса.

Предположим, что наблюдаемый полюсный прилив описывается выражениями (2.8), а (3.4) является оптимальной в среднеквадратическом смысле аппроксимацией наблюдаемого полюсного прилива с известными параметрами a и c. Для сравнения установившихся режимов колебания полюса при различных моделях полюсного прилива (2.8) и (3.2) необходимо оценить коэффициент b. Для этого найдем наименьшее отклонение модели (2.8) от модели (3.4):

$$\sigma = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_t^{t+T} (J_{13} - \tilde{J}_{13})^2 dt \to \min_b \tag{3.8}$$

Используя (3.5) выражения (2.8) перепишем в следующем виде:

$$\begin{gathered} J_{13} = a\omega_1 - b\pi\left((1+\xi)N + 1 - \xi\right)\omega_2 - \\ - b\pi(N-1)\left[(\xi+1)a_{ch}\sin\alpha_{ch} - (\xi-1)a_h\sin\alpha_h\right] \\ J_{23} = a\omega_2 + b\pi\left((1+\xi)N + 1 - \xi\right)\omega_1 + \\ + b\pi(N-1)\left[(\xi+1)a_{ch}\cos\alpha_{ch} - (\xi-1)a_h\cos\alpha_h\right] \end{gathered} \tag{3.9}$$

Введенный в (3.9) параметр ξ позволяет в условии (3.9) минимизацию по параметру b заменить минимизацией по параметру ξ.

Теперь неизвестный коэффициент b можно найти из соответствия коэффициентов при ω_2 в выражениях (3.8) и (3.4), которое приводит к равенству $c = b\pi\left((1+\xi)N + 1 - \xi\right)$. Величина σ после предельного перехода в (3.8) оказывается независимой от параметров t, T, а оптимальное значение ξ^* будет найдено из (3.8). Тогда неизвестный коэффициент b найдем из уравнения $c = b\pi\left((1+\xi^*)N + 1 - \xi^*\right)$.

Подставляя в условие (3.8) выражения J_{13}, J_{23} из (3.9) и $\tilde{J}_{13}$, $\tilde{J}_{23}$ из (3.4) с учетом $c = b\pi\left((1+\xi)N + 1 - \xi\right)$ функция σ окажется квадратичной по параметру ξ, минимум которой достигается при ξ^*. Как следует из расчетов $\xi^* = 0.18$. Теперь, приближенно можно определить отношение $b/a \cong 0.002$, которое в пределах принятой точности определения коэффициентов из (3.3), выполняется и для $\xi = 0$. Используя это значение найдем из (3.7) сдвиг фазы амплитудной модуляции, который составляет примерно 18 часов.

Для иллюстрации сдвига фазы амплитудной модуляции полюсного прилива приведем на рис. 1 сравнение графиков амплитуды A полюса, амплитуд A_{pt}, $\tilde{A}_{pt}$ полюсного прилива согласно моделям (2.8) и (3.4) соответственно (сплошные линии) и приближенной амплитуды (3.7) (пунктирная линия). По оси ординат на графике отложена обезразмеренная амплитуда, достигающая максимума при значении 2.2 и минимума при значении 0.2. По оси абсцисс отложено время в годах. На графике показано расхождение в фазе амплитудных модуляций в окрестности минимума амплитуды. Для улучшения наглядности на графиках рис. 1 отношение b/a было увеличено в 10 раз. Так как фазовый сдвиг приближенно пропорционален отношению b/a, что следует из выражения (3.7), то запаздывание амплитудной модуляции окажется увеличенным в 10 раз.

Сравнение амплитуд A_{pt} полюсного прилива модели (2.8) при различных параметрах ξ ($\xi = 1$, $\xi = 0$, $\xi = -1$) показано на рис. 2. Из рисунка видно, что среднее значение сдвига фазы амплитуды A_{pt} относительно амплитуды A колебаний полюса существенно больше отклонения фазы при изменении параметра $-1 \le \xi \le 1$. Если $|\xi| > 1$, то среднеквадратическое отклонение в (3.9) становится больше минимального более, чем в два раза и увеличивается по квадратичному закону при увеличении ξ.

Таким образом, отличие реального полюсного прилива от рекомендуемой модели (3.3) приведет к сдвигу амплитуды полюсного прилива.

4. Установившиеся чандлеровские колебания земного полюса. Рассмотрим как влияет выбор модели полюсного прилива на стационарный режим чандлеровских колебаний. Согласно [12, 13] модель движения полюса может быть получена из динамических уравнений Эйлера–Лиувилля с переменным тензором инерции

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M} - \dot{J}\boldsymbol{\omega} \tag{4.1}$$

Здесь J — матрица переменного тензора инерции.

В первом приближении уравнения движения полюса представляются в виде [12]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p - N_x y_p &= -j_{qr}^0 + \mu_x, \quad x_p(t_0) = x_0 \\ \dot{y}_p + N_y x_p &= -j_{pr}^0 + \mu_y, \quad y_p(t_0) = y_0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

где j_{pr}^0, j_{qr}^0 определяются центробежными моментами инерции J_{13}, J_{23} и им пропорциональны (j_{pr}^0, j_{qr}^0 являются диссипативными слагаемыми модели движения земного полюса), μ_x, μ_y — внешнее возмущение, приводящее к наблюдаемому движению полюса с годичной и чандлеровской частотами, а $N_x \approx N_y$ — чандлеровская частота колебаний.

Рассмотрим вначале установившийся режим чандлеровских колебаний с учетом диссипативных слагаемых в j_{pr}^0, j_{qr}^0 вида (3.4) и при возмущении только с чандлеровской или близкой к ней частотами:

$$\begin{aligned} \mu_x &= \mu_{ch}\sin(N_1 t + \delta_{ch}), \quad \mu_y = \mu_{ch}\cos(N_1 t + \delta_{ch}) \\ j_{pr}^0 &= s_1 x_p - s_2 y_p, \quad j_{pr}^0 = -s_1 y_p - s_2 x_p \end{aligned} \tag{4.3}$$

Положительные коэффициенты s_1, s_2 пропорциональны коэффициентам из (3.3), т.е. $s_2/s_1 = c/a$. В такой постановке задачи $N_1 = 2\pi N$ — наблюдаемая чандлеровская частота.

Перейдя к новым переменным

$$x_p = A\cos\psi, \quad y_p = A\sin\psi, \quad \psi = N_1 t + \Delta\psi$$

запишем амплитуду A и поправку в частоту $\Delta\psi$ в стационарном режиме при $N_1 = N$:

$$A = \mu_{ch}(s_1^2 + s_2^2)^{-1/2}, \quad \mathrm{tg}\Delta\psi = s_2 s_1^{-1} \tag{4.4}$$

Так как определяемой из наблюдений является частота N_1, введем $\tilde{N} \cong N_x \approx N_y$. В предельном случае при устремлении N_1 к $\tilde{N} - s_1$ чувствительность амплитуды стационарного режима к коэффициенту s_2 будет возрастать и достигнет максимума.

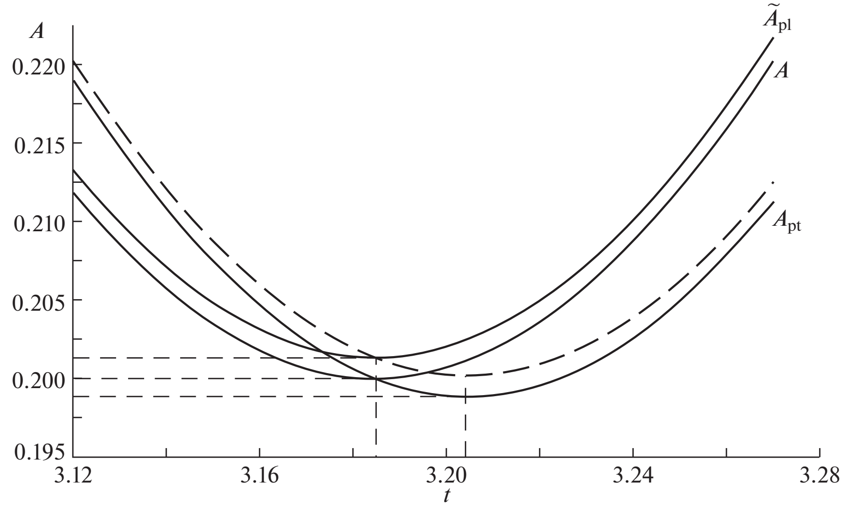

Рис. 1.

Для приливных выступов вида (2.8)

$$j_{pr}^0 = s_1 x_p - s_3 \dot{x}_p, \quad j_{pr}^0 = -s_1 y_p + s_3 \dot{y}_p \tag{4.5}$$

стационарный режим чандлеровских колебаний не изменится при $s_2 = \tilde{N} s_3$.

Теперь рассмотрим установившиеся чандлеровские колебания в более общем случае – при учете возмущений с близкой к чандлеровской N_1 и годичной ν_h частотами:

$$\mu_x = \mu_{ch} \sin(N_1 t + \delta_{ch}) + \mu_h \sin(\nu_h t + \delta_h)$$
$$\mu_y = \mu_{ch} \cos(N_1 t + \delta_{ch}) + \mu_h \cos(\nu_h t + \delta_h)$$

Приливные выступы вида $j_{pr}^0 = s_1 x_p - s_3 \dot{x}_p$, $j_{pr}^0 = -s_1 y_p + s_3 \dot{y}_p$ в уравнениях движения полюса (4.2) можно приближенно заменить выражениями

$$\tilde{j}_{pr}^0 = s_1 x_p - \tilde{s}_3 y_p, \quad \tilde{j}_{pr}^0 = -s_1 y_p - \tilde{s}_3 x_p \tag{4.6}$$

на интервале модуляции чандлеровской и годичной гармоник при соотношении на коэффициенты $\tilde{s}_3$ и s_3:

$$\tilde{s}_3 = \frac{s_3(\tilde{N} - s_1)}{1 + s_3^2} \tag{4.7}$$

Из соотношений $c = b\pi\big((1 + \xi)N + 1 - \xi\big)$ и $s_3/s_1 = b/a$ при $\xi = 0$ коэффициент s_2 выражается через s_3:

$$s_2 = \frac{s_3(\tilde{N} + \nu_h)}{2} \tag{4.8}$$

Из (4.7) можно оценить коэффициент $\tilde{s}_3$:

$$\tilde{s}_3 \approx 0.914 s_2 \tag{4.9}$$

Соотношение (4.9) показывает что, применение модели движения полюса в рамках общепринятой модели полюсного прилива может приводить к искажению парамет-

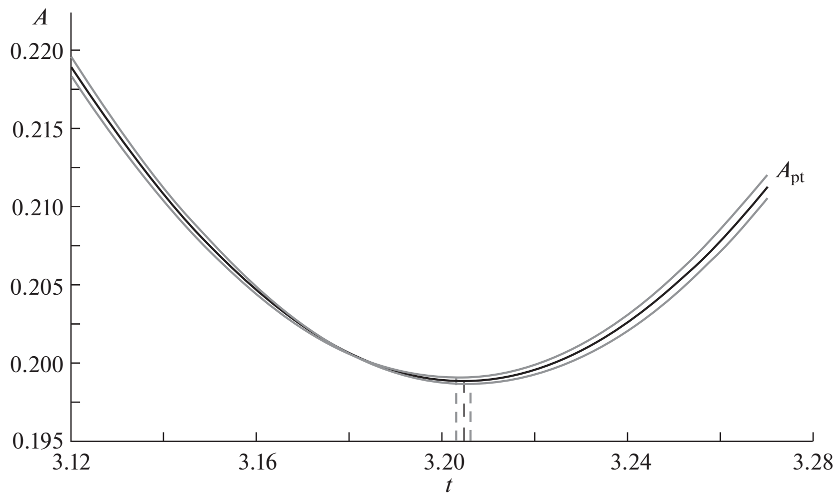

Рис. 2.

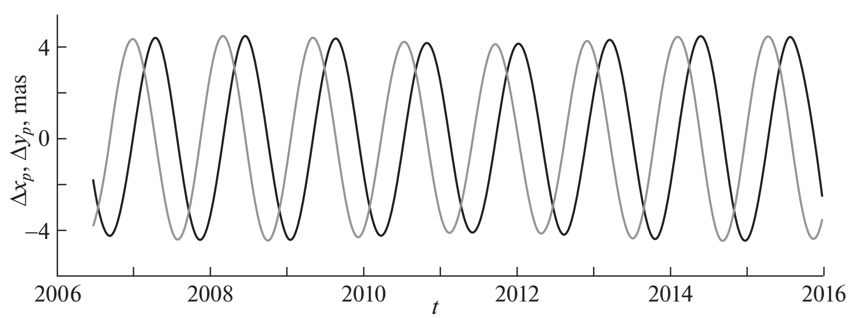

Рис. 3.

ров установившегося чандлеровского колебания. Например, если движение полюса находится интегрированием дифференциальных уравнений (4.2) по известной правой части. Причем амплитуда колебаний зависит не только от выбора модели полюсного прилива, но и от длительности интервала оценки коэффициента диссипативного слагаемого.

На рис. 3 приводится разность Δx_p, Δy_p установившихся движений полюса, полученных в результате интегрирования уравнений (4.2) при учете выражений полюсного прилива (2.8) и (3.4). Величины μ_x, μ_y были найдены из уравнений (4.2), используя аппроксимацию данных наблюдений МСВЗ движения полюса с помощью выражений вида (3.5) на временном интервале с 2010 по 2017 гг. Из графика следует, что разности Δx_p, Δy_p обусловлены в основном различием в амплитудах чандлеровской компоненты решений. Если сделать замену $j_{pr}^0 = s_1 x_p - \tilde{s}_3 y_p$, $j_{qr}^0 = -s_1 y_p - \tilde{s}_3 x_p$ с учетом (4.9) вместо $j_{pr}^0 = s_1 x_p - s_3 \dot{x}_p$, $j_{qr}^0 = -s_1 y_p + s_3 \dot{y}_p$, то в разностях Δx_p, Δy_p останется только годичное колебание (рис. 4). Из-за того, что разность между чандлеровской и годичной частота-

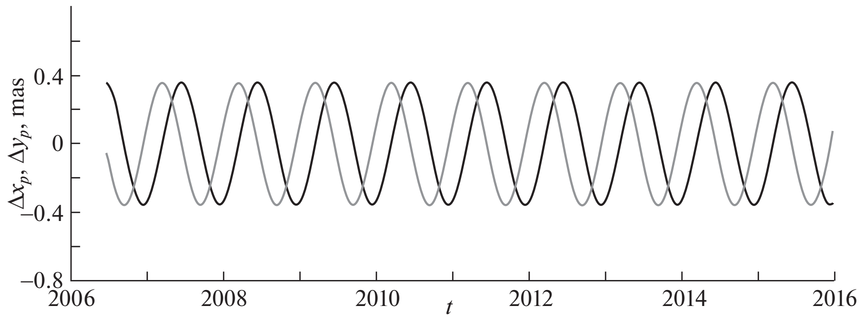

Рис. 4.

ми не мала, амплитуда годичного колебания в Δx_p, Δy_p оказывается малой. При этом, как показано на рис. 3, амплитуда разности чандлеровского колебания двух моделей с учетом выражений полюсного прилива (2.8) и (3.4) достигает 10% по отношению к амплитуде наблюдаемого чандлеровского колебания, что является весьма существенным. В то время как невязка колебаний, вычисленных по моделям с учетом (4.5) и (4.6) содержит только годичную компоненту амплитуда которой не превышает 0.5% по отношению к амплитуде годичного колебания полюса. Таким образом, поправка в коэффициенте модели полюсного прилива (4.9) приводит к оптимальной аппроксимации чандлеровского колебания. Однако, как следует из рис. 1 и рис. 2 сдвиг амплитудной модуляции в этом случае учтен не будет и разность Δx_p, Δy_p, показанная на рис. 4 является следствием неучета сдвига амплитудной модуляции полюсного прилива.

Таким образом, если диссипативные слагаемые полюсного прилива определяются не положением полюса, а его скоростью, то оптимальная аппроксимация параметров полюсного прилива, описываемого общепринятой моделью, не приводит к оптимальной аппроксимации параметров установившегося колебания полюса.

5. Выводы. Показано, что для модели вязкоупругой Земли полюсный прилив зависит от координат полюса и от его скорости. Это приводит к сдвигу фазы (запаздыванию) амплитуды полюсного прилива относительно амплитуды колебаний полюса. Изменение структуры модели полюсного прилива в свою очередь влияет на оценку параметров установившегося чандлероского колебания, а ошибка определения амплитуды установившегося чандлеровского колебания может достигать 10%. То есть, аппроксимация параметров полюсного прилива, описываемого общепринятой моделью, не приводит к оптимальной аппроксимации параметров установившегося колебания полюса.

Корректировка установившегося чандлеровского колебания может быть выполнена изменением диссипативных слагаемых общепринятой модели полюсного прилива в уравнениях движения полюса. Однако, сдвиг амплитудной модуляции полюсного прилива в этом случае учтен не будет, что приведет к некоторому изменению амплитуды годичного колебания (на 0.5%).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. International Earth Rotation and Reference Systems Service – IERS Annual Reports (http://www.iers.org).
2. *Munk W.H., MacDonald G.J.F.* The Rotation of the Earth. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1960. = *Манк У., Макдональд Г.* Вращение Земли. М.: Мир, 1964. 384 с.

3. *Филиппова А.С.* Динамический анализ колебательного процесса полюса Земли // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 6. С. 26–38.
4. *Акуленко Л.Д., Климов Д.М., Кумакшев С.А.* Основные свойства и особенности движения Земли относительно центра масс // Доклады РАН. 2014. Т. 458. № 5. С. 547–550.
5. *Марков Ю.Г., Перепелкин В.В., Крылов С.С.* Колебания полюса Земли с учетом флуктуационно-диссипативных возмущений // Доклады РАН. 2016. Т. 471. № 6. С. 665–670.
6. *Марков Ю.Г., Михайлов М.В., Перепёлкин В.В., Почукаев В.Н., Рожков С.Н., Семенов А.С.* Анализ влияния различных возмущающих факторов на высокоточный прогноз орбит космических аппаратов // Космические исследования. 2016. Т. 54. № 2. С. 164–172.
7. *Егармин Н.Е.* Влияние упругих деформаций на тензор инерции твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 1980. № 6. С. 43–48.
8. *Акуленко Л.Д., Перепелкин В.В.* Движение земного полюса при нестационарных возмущениях // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 5. С. 142–149.
9. *Марков Ю.Г., Миняев И.С.* О влиянии внутренних степеней свободы на движение осесимметричного упругого тела вокруг центра масс // Изв. РАН. МТТ. 1991. № 1. С. 12–18.
10. *Марков Ю.Г., Скоробогатых И.В., До Чунг Бо* О влиянии упругих деформаций на поступательно-вращательное движение тела в центральном гравитационном поле сил // Космонавтика и ракетостроение. 2015. № 1 (80). С. 106–113.
11. *Вильке В.Г.* Аналитические и качественные методы механики систем с бесконечным числом степеней свободы. М.: Изд-во МГУ, 1986. 192 с.
12. *Климов Д.М., Акуленко Л.Д., Шматков А.М.* Разделение и спектральный анализ колебаний земного полюса // Доклады РАН. 2015. Т. 464. № 3. С. 288–292.
13. *Кумакшев С.А.* Гравитационно-приливная модель колебаний земного полюса // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 2. С. 48–53.
14. *Акуленко Л.Д., Климов Д.М., Марков Ю.Г., Перепёлкин В.В.* Колебательно-вращательные процессы в движении Земли относительно центра масс: интерполяция и прогноз // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 6. С. 6–29.
15. Global Geodynamic Project (http:// isdc.gfz-potsdam.de)
16. *Hu X.-G., Liu L.-T., Ducarme B., Xu H.J. and Sun H.P.* Estimation of the pole tide gravimetric factor at the chandler period through wavelet filtering // Geophys. J. Intern. 2007. V. 169. P. 821–829. https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2007.03330.x