

УДК 539.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЯЗКОУПРУГО-ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ГИБКИХ АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИН

© 2021 г. А. П. Янковский

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,
Новосибирск, Россия*

e-mail: lab4nemir@rambler.ru

Поступила в редакцию 28.02.2020 г.

После доработки 05.08.2020 г.

Принята к публикации 17.09.2020 г.

Разработана модель вязкоупруго-вязкопластического деформирования армированных пластин. Вязкопластическое поведение компонентов композиции описывается уравнениями теории течения с изотропным упрочнением при учете зависимости функции нагружения от интенсивности скоростей деформаций. Вязкоупругое деформирование этих материалов определяется уравнениями модели тела Максвелла–Больцмана. Геометрическая нелинейность задачи учитывается в приближении Кармана. Возможное слабое сопротивление армированных пластин поперечным сдвигам учитывается в рамках теории Амбарцумяна. Численное решение сформулированной начально-краевой задачи получается с использованием явной схемы типа «крест». Исследовано неупругое динамическое поведение гибких стеклопластиковых пластин с плоско-перекрестными и пространственными структурами армирования. Конструкции нагружаются в поперечном направлении избыточным давлением, соответствующим воздушной взрывной волне. Показано, что даже для относительно тонких композитных пластин неучет чувствительности компонентов композиции к скорости их деформирования приводит к существенному завышению величины остаточного прогиба и интенсивности остаточных деформаций этих материалов. Продемонстрировано, что даже для относительно тонких стеклопластиковых конструкций замена традиционной плоско-перекрестной структуры армирования на пространственную структуру позволяет существенно уменьшить величину интенсивности остаточных деформаций компонентов композиции (особенно связующей матрицы). С увеличением относительной толщины пластин положительный эффект от такой замены структур армирования резко возрастает. Обнаружено, что тонкая прямоугольная удлиненная стеклопластиковая пластина после неупругого динамического деформирования может приобретать гофрированную остаточную форму со складками, ориентированными в продольном направлении.

Ключевые слова: вязкоупруго-вязкопластическое деформирование, гибкая пластина, армирование, теория Амбарцумяна, динамическое нагружение, явная численная схема

DOI: 10.31857/S0572329921040140

1. Введение. Конструкции из композиционных материалов (КМ) широко внедряются в инженерную практику [1–6]. Современные КМ-изделия часто подвергаются высокоинтенсивному нагружению [5, 7], при котором компоненты композиции деформируются неупруго. Следовательно, моделирование неупругого поведения арми-

рованных конструкций является актуальной проблемой, которая на сегодняшний день находится на стадии становления [8, 9].

Упругопластическое поведение тонкостенных конструкций слоистой структуры (с изотропными слоями) исследовалось в [10]; вязкоупругопластическое деформирование армированных пластин моделировалось в [11], где впервые удалось рассчитать остаточные перемещения КМ-конструкции и остаточное напряженно-деформированное состояние (НДС) компонентов композиции после ее пластического динамического деформирования. Неупругое поведение многих материалов зависит от скорости их деформирования [12, 13], поэтому в [14] моделировалось упруговязкопластическое поведение КМ-пластин. Структурная же теория неупругого деформирования армированных сред, использующая определяющие соотношения теории пластического течения с учетом чувствительности материалов компонентов композиции к скорости их деформирования, а также с учетом их вязкоупругих свойств до настоящего времени не разработана. Используя терминологию, принятую в [15], такую модель неупругого поведения материалов компонентов композиции будем называть теорией вязкоупруго-вязкопластического деформирования.

Для описания слабого сопротивления тонкостенных армированных конструкций поперечному сдвигу (которое может проявляться даже при некоторых пространственных структурах армирования [16–18]) традиционно используют неклассические теории Тимошенко–Рейсснера [4, 5, 10, 19, 20], Амбарцумяна [11, 14, 21] или Редди [3, 22]; реже используется теория, базирующаяся на кинематической гипотезе ломаной линии [4].

Для численного интегрирования физически и геометрически нелинейных динамических задач механики тонкостенных конструкций, как правило, применяют явные методы [10, 11, 14, 23], чаще всего схему “крест”.

В связи со всем вышеизложенным данное исследование посвящено моделированию вязкоупруго-вязкопластического поведения гибких армированных пластин с учетом их возможного слабого сопротивления поперечным сдвигам. Численное решение соответствующих начально-краевых задач, возникающих при этом, предполагается строить по явной схеме типа “крест”.

2. Численно-аналитическое моделирование вязкоупруго-вязкопластического поведения КМ. Как и в [11, 14], считаем, что малые деформации ϵ_{ij} можно разложить на сумму сжимаемых вязкоупругих e_{ij} и несжимаемых пластических p_{ij} составляющих

$$\epsilon_{ij} = e_{ij} + p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (p_{ii} = 0) \quad (2.1)$$

При этом вязкопластическое течение материала ассоциировано с мгновенной поверхностью нагружения $f = 0$, которая для конкретности задается в форме, соответствующей обобщению условия текучести Мизеса [14]:

$$f(T, \chi, H) \equiv T^2 - \tau_s^2(\chi, H) = 0 \quad (2.2)$$

где

$$T = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}}, \quad H = \sqrt{2 \xi_{ij} \xi_{ij}}, \quad \chi = \int_0^t \sqrt{2 \dot{p}_{ij} \dot{p}_{ij}} dt, \quad \xi_{ij} \equiv \dot{e}_{ij} + \dot{p}_{ij} \quad (2.3)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0, \quad \sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{ll}, \quad \bar{e}_{ij} = e_{ij} - \delta_{ij} \epsilon_0, \quad \epsilon_0 = \frac{1}{3} \epsilon_{ll}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

\bar{e}_{ij} – компоненты девиатора вязкоупругих деформаций; ξ_{ij} – компоненты девиатора скорости деформаций; σ_{ij} , s_{ij} – компоненты тензора и девиатора напряжений; σ_0 , ϵ_0 – средние напряжение и деформация; T – интенсивность касательных напряжений; χ – параметр Одквиста; H – интенсивность скоростей деформаций сдвига; τ_s – мгновен-

ный предел текучести при чистом сдвиге, который равен T при определенных значениях H и χ в данный момент времени t ; δ_{ij} – символ Кронекера; точка – производная по времени. Начальная поверхность нагружения $T = \tau_s(H) \equiv \tau_s(0, H)$ – обычный предел текучести, зависящий от скорости деформирования H [12, 13]. (В настоящем разделе, если не оговорено, по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3.)

В работе [24] вязкоупругое поведение материала описывалось интегральными определяющими соотношениями. Однако в [25] показано, что для адекватного моделирования затухающих колебаний образцов целесообразно использовать не интегральную, а дифференциальную форму определяющих уравнений вязкоупругости [26]. В связи с этим, как и в [11, 27], считаем, что вязкоупругое деформирование материала описывается соотношениями модели Максвелла–Больцмана

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\dot{s}_{ij}}{2G} + \frac{s_{ij}}{2\eta}, \quad \dot{\varepsilon}_0 = \dot{\varepsilon}_0 = \frac{\dot{\sigma}_0}{3K} + \frac{\sigma_0}{3\mu}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

где G – модуль сдвига; K – объемный модуль упругости; η – коэффициент линейной вязкости при сдвиге; μ – коэффициент объемной вязкости.

Используя ассоциированный закон пластического течения [15, 24, 26, 27] при учете (2.2) и (2.3), получаем (см. равенство (1.12) в [14])

$$\dot{p}_{ij} = \frac{s_{ij}}{2\tau_s^2(\chi, H)} s_{ml} \dot{p}_{ml}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.5)$$

В случае пластического деформирования материала при чистом сдвиге ($\tau = \tau_s(\chi, H)$) выполняется соотношение (см. равенства (1.15)–(1.18) в [14])

$$\dot{\tau} = \tau_\chi \dot{\chi} + \tau_H \dot{H} = \tau_\chi \dot{\gamma}_p + \tau_H \dot{\xi} \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_\chi &\equiv \frac{\partial \tau_s}{\partial \chi} = \frac{\partial \tau_s}{\partial \gamma_p} \equiv \bar{G}, & \tau_H &\equiv \frac{\partial \tau_s}{\partial H} = \frac{\partial \tau_s}{\partial \xi}, \\ \chi &= \int_0^t \dot{\gamma}_p dt = \int_0^{\gamma_p} d\gamma_p = \gamma_p, & \dot{\chi} &= \dot{\gamma}_p, & \xi &\equiv H = \dot{\gamma} \end{aligned} \quad (2.7)$$

τ – касательное напряжение при чистом сдвиге; γ_p – пластическая составляющая полной угловой деформации γ ; ξ – скорость деформации γ ; $\tau_\chi \equiv \bar{G} = \tau_\chi(\chi, H) = \tau_\chi(\gamma_p, \xi)$ и $\tau_H = \tau_H(\chi, H) = \tau_H(\gamma_p, \xi)$ – известные из эксперимента функции, причем $\tau_\chi \equiv \bar{G}$ – касательный модуль при постоянстве скорости деформирования ($\xi = \text{const}$) на диаграмме $\tau \sim \gamma_p$ (для простоты предполагаем, что угловые деформации γ_p , γ и напряжение τ положительны).

Изменение касательного напряжения τ сопровождается приращением вязкоупругой части угловой деформации γ_e ($\gamma_e = \gamma - \gamma_p$). Согласно этому в случае чистого сдвига из первого равенства (2.4) с учетом (2.3) получаем

$$\frac{\dot{\gamma}_e}{2} = \frac{\dot{\tau}}{2G} + \frac{\tau}{2\eta}$$

Выразим отсюда $\dot{\tau}$ и подставим в левую часть равенства (2.6), после чего при учете $\gamma_e = \gamma - \gamma_p$ получим соотношение

$$\dot{\gamma}_p = \frac{1}{1+g} \left(\dot{\gamma} - \frac{\tau_H}{G} \dot{\xi} - \frac{\tau}{\eta} \right) \quad (2.8)$$

где (см. (2.7))

$$g = g(\chi, H) = \frac{\bar{G}(\chi, H)}{G} = \frac{\tau_\chi(\chi, H)}{G} \quad (2.9)$$

Умножим (2.8) на τ , тогда получим энергетическое соотношение

$$\tau \dot{\gamma}_p = \frac{1}{1+g} \left(\tau \dot{\gamma} - \frac{\tau_H}{G} \tau \dot{\xi} - \frac{\tau^2}{\eta} \right) \quad (2.10)$$

Как и в рамках теории Прандтля–Рейсса–Хилла ($\tau_H = 0$, $\eta \rightarrow \infty$) [23], теории вязкоупругопластического ($\tau_H = 0$) [11] и теории упруговязкопластического ($\eta \rightarrow \infty$) [14] деформирования материала, предполагаем, что энергетическое равенство, аналогичное (2.10), справедливо при любых видах НДС. На основании этого, учитывая (2.3), будем иметь равенство

$$s_{ml} \dot{p}_{ml} = \frac{1}{1+g} \left(s_{ml} \dot{\epsilon}_{ml} - \frac{\tau_H}{G} s_{ml} \dot{\xi}_{ml} - \frac{s_{ml} s_{ml}}{2\eta} \right) = \frac{1}{1+g} \left(s_{ml} \dot{\epsilon}_{ml} - \frac{\tau_H}{G} s_{ml} \ddot{\epsilon}_{ml} - \frac{T^2}{\eta} \right) \quad (2.11)$$

которое обобщает энергетические уравнения (20) в [11] и (1.24) в [14].

Подставим выражение (2.11) в правую часть равенства (2.5) и учтем разложение, аналогичное (2.1), для дивергента деформаций, тогда получим

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{s_{ij}}{2T^2(1+g)} \left(s_{ml} \dot{\epsilon}_{ml} - \frac{\tau_H}{G} s_{ml} \ddot{\epsilon}_{ml} - \frac{T^2}{\eta} \right), \quad i, j = 1, 2, 3$$

В правой части этого равенства учтем первое соотношение (2.4), после чего будем иметь

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\dot{s}_{ij}}{2G} + \frac{s_{ij}}{2\eta} + \frac{s_{ij}}{2T^2(1+g)} \left(s_{ml} \dot{\epsilon}_{ml} - \frac{\tau_H}{G} s_{ml} \ddot{\epsilon}_{ml} - \frac{T^2}{\eta} \right), \quad i, j = 1, 2, 3$$

откуда следует

$$\dot{s}_{ij} = 2G\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{G}{\eta} \left(1 - \frac{c}{1+g} \right) s_{ij} - \frac{c s_{ml}}{T^2(1+g)} (G\dot{\epsilon}_{ml} - \tau_H \ddot{\epsilon}_{ml}) s_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.12)$$

где c – параметр переключения: $c = 0$ при чисто вязкоупругом деформировании, разгрузке и нейтральном нагружении, $c = 1$ при активном вязкоупруго-вязкопластическом деформировании. Повторяя рассуждения из работы [14] (см. там соотношения (1.28)–(1.36)), получим

$$c = \begin{cases} 0 & \text{при } T < \tau_s(\chi, H) \quad \text{или} \quad T = \tau_s(\chi, H) \\ \text{и} & s_{ij} \dot{s}_{ij} - 4\tau_s \tau_H H^{-1} \xi_{ij} \ddot{\epsilon}_{ij} \leq 0 \\ 1 & \text{при } T = \tau_s(\chi, H) \\ \text{и} & s_{ij} \dot{s}_{ij} - 4\tau_s \tau_H H^{-1} \xi_{ij} \ddot{\epsilon}_{ij} > 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Подставим в (2.13) соотношение (2.12) и учтем постулат Друккера [15], тогда будем иметь выражение

$$c = \begin{cases} 0 & \text{при } T < \tau_s(\chi, H) \quad \text{или} \quad T = \tau_s(\chi, H) \\ \text{и} & s_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - 2\tau_s \tau_H (GH)^{-1} \xi_{ij} \ddot{\epsilon}_{ij} \leq \eta^{-1} \tau_s^2(\chi, H) \\ 1 & \text{при } T = \tau_s(\chi, H) \\ \text{и} & s_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - 2\tau_s \tau_H (GH)^{-1} \xi_{ij} \ddot{\epsilon}_{ij} > \eta^{-1} \tau_s^2(\chi, H) \end{cases} \quad (2.14)$$

Используя второе равенство (2.4) и учитывая соотношения (2.1) и (2.3), равенства (2.12) можно преобразовать к окончательному виду

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} = & 2G\dot{\varepsilon}_{ij} + \delta_{ij}\lambda\dot{\varepsilon}_{ll} - B\sigma_{ij} + \frac{\delta_{ij}}{3}\left(B - \frac{K}{\mu}\right)\sigma_{ll} - \\ & - As_{ij}s_{ml}\dot{\varepsilon}_{ml} + \frac{A\tau_H}{G}s_{ij}s_{mn}\dot{\varepsilon}_{mn}, \quad i, j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.15)$$

где

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad A \equiv \frac{cG}{(1+g)T^2} = \frac{cG}{(1+g)\tau_s^2(\chi, H)}, \quad B \equiv \frac{G}{\eta}\left(1 - \frac{c}{1+g}\right) \quad (2.16)$$

E , ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона при мгновенном деформировании материала; λ – параметр Ламе; параметр переключения c определяется по формуле (2.14) или (2.13).

Если вязкость при упругом деформировании не учитывается ($\eta \rightarrow \infty$) и пластическое поведение материала не зависит от скорости его деформирования ($\tau_H \equiv 0$), то из (2.15) при учете (2.14) и (2.16) получаются определяющие соотношения теории Прандтля–Рейсса–Хилла [23]. Если материал не чувствителен к скорости деформирования ($\tau_H \equiv 0$), то из (2.14)–(2.16) вытекают определяющие уравнения вязкоупруго-пластической теории [11, 27]. Если же пренебречь вязкостью при упругом деформировании материала ($\eta \rightarrow \infty$), то равенства (2.15) с учетом (2.14), (2.16) редуцируются в определяющие соотношения упруговязкопластической теории [14].

Как и в работах [11, 14], для удобства последующего изложения определяющие уравнения для k -го компонента композиции целесообразно записать в матричной форме (см. (2.14)–(2.16))

$$\dot{\sigma}_k = \mathbf{V}_k \sigma_k + \mathbf{Z}_k \dot{\varepsilon}_k + \mathbf{Y}_k \ddot{\varepsilon}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (2.17)$$

Здесь и далее:

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \{\sigma_1^{(k)}, \sigma_2^{(k)}, \sigma_3^{(k)}, \sigma_4^{(k)}, \sigma_5^{(k)}, \sigma_6^{(k)}\}^T \equiv \{\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{33}^{(k)}, \sigma_{23}^{(k)}, \sigma_{31}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}\}^T \\ \varepsilon_k &= \{\varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}, \varepsilon_3^{(k)}, \varepsilon_4^{(k)}, \varepsilon_5^{(k)}, \varepsilon_6^{(k)}\}^T \equiv \{\varepsilon_{11}^{(k)}, \varepsilon_{22}^{(k)}, \varepsilon_{33}^{(k)}, 2\varepsilon_{23}^{(k)}, 2\varepsilon_{31}^{(k)}, 2\varepsilon_{12}^{(k)}\}^T \\ \mathbf{s}_k &= \{s_1^{(k)}, s_2^{(k)}, s_3^{(k)}, s_4^{(k)}, s_5^{(k)}, s_6^{(k)}\}^T \equiv \{s_{11}^{(k)}, s_{22}^{(k)}, s_{33}^{(k)}, s_{23}^{(k)}, s_{31}^{(k)}, s_{12}^{(k)}\}^T \\ \xi_k &= \{\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \xi_3^{(k)}, \xi_4^{(k)}, \xi_5^{(k)}, \xi_6^{(k)}\}^T \equiv \{\xi_{11}^{(k)}, \xi_{22}^{(k)}, \xi_{33}^{(k)}, \xi_{23}^{(k)}, \xi_{31}^{(k)}, \xi_{12}^{(k)}\}^T \end{aligned} \quad (2.18)$$

$\mathbf{V}_k = (v_{ij}^{(k)})$, $\mathbf{Z}_k = (z_{ij}^{(k)})$, $\mathbf{Y}_k = (y_{ij}^{(k)})$ – симметричные 6×6 -матрицы, характеризующие механическое состояние материала (\mathbf{Z}_k условно можно трактовать как матрицу “жесткости”, а \mathbf{V}_k – как матрицу “вязкости” материала), причем \mathbf{Z}_k и \mathbf{Y}_k можно представить в виде

$$\mathbf{Z}_k = \bar{\mathbf{Z}}_k - \bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k, \quad \mathbf{Y}_k = \frac{\tau_H^{(k)}}{G^{(k)}} \bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (2.19)$$

$\bar{\mathbf{Z}}_k = (\bar{z}_{ij}^{(k)})$, $\bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k = (\bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)})$ – симметричные 6×6 -матрицы. Ненулевые элементы матриц \mathbf{V}_k , $\bar{\mathbf{Z}}_k$ и $\bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k$ определяются так:

$$\begin{aligned}
 v_{ij}^{(k)} &= -\frac{K^{(k)}}{3\mu^{(k)}} + \left(\frac{1}{3} - \delta_{ij}\right) B^{(k)}, \quad \bar{z}_{ij}^{(k)} = 2\delta_{ij} G^{(k)} + \lambda^{(k)} = \text{const}, \quad v_{mm}^{(k)} = -B^{(k)} \\
 \bar{z}_{mm}^{(k)} &= G^{(k)} = \text{const} \quad (i, j = \overline{1,3}, \quad m = \overline{4,6}), \quad \bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)} = A^{(k)} s_i^{(k)} s_j^{(k)} \quad (i, j = \overline{1,6}) \\
 A^{(k)} &= \frac{c^{(k)} G^{(k)}}{(1 + g^{(k)}) \tau_s^{(k)2} (\chi^{(k)}, H^{(k)})}, \quad B^{(k)} = \frac{G^{(k)}}{\eta^{(k)}} \left(1 - \frac{c^{(k)}}{1 + g^{(k)}}\right) \\
 g^{(k)} &= \frac{\bar{G}^{(k)}}{G^{(k)}} = \frac{\tau_\chi^{(k)}}{G^{(k)}}, \quad G^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{2(1 + v^{(k)})}, \quad \lambda^{(k)} = \frac{v^{(k)} E^{(k)}}{(1 + v^{(k)})(1 - 2v^{(k)})} \\
 c^{(k)} &= \begin{cases} 0 & \text{при } T^{(k)} < \tau_s^{(k)} \text{ или } T^{(k)} = \tau_s^{(k)}, \quad W^{(k)} \leq 0 \\ 1 & \text{при } T^{(k)} = \tau_s^{(k)}, \quad W^{(k)} > 0 \end{cases} \\
 W^{(k)} &= \mathbf{s}_k^T \dot{\mathbf{e}}_k - \frac{2\tau_s^{(k)} \tau_H^{(k)}}{G^{(k)} H^{(k)}} \xi_k^T \ddot{\mathbf{e}}_k - \frac{\tau_s^{(k)2}}{\eta^{(k)}}, \quad T^{(k)2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 s_i^{(k)2} + \sum_{i=4}^6 s_i^{(k)2} \\
 H^{(k)2} &= 2 \sum_{i=1}^3 \xi_i^{(k)2} + 4 \sum_{i=4}^6 \xi_i^{(k)2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

τ – операция транспонирования.

В соотношениях (2.18)–(2.20) все величины имеют прежний смысл, индекс k – номер компонента композиции: $k = 0$ – связующий материал, $k = 1, 2, \dots, N$ – арматура k -го семейства; N – количество семейств армирующих волокон. (В выражениях (2.20) по повторяющемуся индексу m суммирования нет.) Равенства (2.18) задают соответствия между шестью элементами $f_i^{(k)}$ ($i = \overline{1,6}$) некоторого вектора-столбца \mathbf{f}_k и компонентами симметричного тензора второго ранга $f_{jl}^{(k)}$, $j, l = \overline{1,3}$. (Согласно введенным обозначениям (2.18), $\xi_k \neq \dot{\mathbf{e}}_k$, $0 \leq k \leq N$.)

Как уже отмечалось во Введении, численное решение рассматриваемой задачи будем строить с использованием метода шагов по времени [10, 11, 14, 23], т.е. будем определять значения искоемых функций в дискретные моменты времени $t_{n+1} = t_n + \Delta$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), где $\Delta = \text{const} > 0$ – шаг по времени. При этом предполагаем, что в предыдущий момент времени t_m уже известны значения следующих векторных функций:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{\sigma}_k^m(\mathbf{r}) &\equiv \mathbf{\sigma}_k(t_m, \mathbf{r}), \quad \mathbf{\sigma}_k^m(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{\sigma}_k(t_m, \mathbf{r}), \quad \dot{\mathbf{e}}_k^m(\mathbf{r}) \equiv \dot{\mathbf{e}}_k(t_m, \mathbf{r}) \\
 \ddot{\mathbf{e}}_k^m(\mathbf{r}) &\equiv \ddot{\mathbf{e}}_k(t_m, \mathbf{r}), \quad m = n-1, \quad 0 \leq k \leq N, \quad \mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

где x_i – координаты точек тела.

Так как в дальнейшем предполагается разработка явной схемы типа «крест» на трехточечном шаблоне по времени (t_{n-1} , t_n , t_{n+1}), имеющей второй порядок точности по Δ [10], согласно результатам работ [11, 14], преобразуем первое и последнее слагаемые в правой части соотношения (2.17), используя формулу трапеций, также имею-

шую второй порядок точности по Δ [28]. В текущий момент времени t_n на основании формулы трапеций имеем выражения

$$\overset{n}{\sigma}_k - \overset{n-1}{\sigma}_k = \frac{\Delta}{2} \left(\overset{n}{\dot{\sigma}}_k + \overset{n-1}{\dot{\sigma}}_k \right), \quad \overset{n}{\dot{\epsilon}}_k - \overset{n-1}{\dot{\epsilon}}_k = \frac{\Delta}{2} \left(\overset{n}{\ddot{\epsilon}}_k + \overset{n-1}{\ddot{\epsilon}}_k \right), \quad 0 \leq k \leq N$$

откуда

$$\overset{n}{\sigma}_k = \frac{\Delta}{2} \overset{n}{\dot{\sigma}}_k + \overset{n-1/2}{\sigma}_k, \quad \overset{n}{\dot{\epsilon}}_k = \frac{2}{\Delta} \overset{n}{\dot{\epsilon}}_k - \frac{2}{\Delta} \overset{n-1/2}{\dot{\epsilon}}_k, \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.22)$$

где

$$\overset{n-1/2}{\sigma}_k \equiv \overset{n-1}{\sigma}_k + \frac{\Delta}{2} \overset{n-1}{\dot{\sigma}}_k, \quad \overset{n-1/2}{\dot{\epsilon}}_k \equiv \overset{n-1}{\dot{\epsilon}}_k + \frac{\Delta}{2} \overset{n-1}{\ddot{\epsilon}}_k, \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.23)$$

Из равенств (2.23) с учетом предположений (2.21) вытекает, что шестикомпонентные векторы-столбцы $\overset{n-1/2}{\sigma}_k$ и $\overset{n-1/2}{\dot{\epsilon}}_k$ в выражении (2.22) при $t = t_n$ уже известны.

Подстановка соотношений (2.22) в уравнение (2.17) приводит к матричному равенству

$$\overset{n}{\dot{\sigma}}_k = \overset{n}{\mathbf{B}}_k \overset{n}{\dot{\epsilon}}_k + \overset{n}{\mathbf{p}}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (2.24)$$

где

$$\overset{n}{\mathbf{B}}_k \equiv \overset{n}{\bar{\mathbf{V}}}_k^{-1} \left(\overset{n}{\mathbf{Z}}_k + \frac{2}{\Delta} \overset{n}{\mathbf{Y}}_k \right), \quad \overset{n}{\mathbf{p}}_k \equiv \overset{n}{\bar{\mathbf{V}}}_k^{-1} \left(\overset{n}{\mathbf{V}}_k \overset{n-1/2}{\sigma}_k - \frac{2}{\Delta} \overset{n}{\mathbf{Y}}_k \overset{n-1/2}{\dot{\epsilon}}_k \right) \quad (2.25)$$

$$\overset{n}{\bar{\mathbf{V}}}_k \equiv \mathbf{I} - \frac{\Delta}{2} \overset{n}{\mathbf{V}}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N$$

\mathbf{I} – единичная 6×6 -матрица; $\overset{n}{\bar{\mathbf{V}}}_k^{-1}$ – матрица, обратная 6×6 -матрице $\overset{n}{\bar{\mathbf{V}}}_k$. В данный момент времени t_n соотношение (2.24) – определяющее уравнение для вязкоупруго-вязкопластического материала k -го компонента композиции.

Так как элементы матриц $\overset{n}{\mathbf{V}}_k$ и $\overset{n}{\mathbf{Z}}_k$ зависят от решения задачи (см. выражения (2.19) и (2.20)), равенство (2.24) при учете (2.23) и (2.25) является нелинейным. Для линеаризации этого соотношения, как и в [11, 14], целесообразно использовать метод, аналогичный методу переменных параметров упругости [29]. Тогда в текущий момент времени t_n на каждой итерации этого метода 6×6 -матрица $\overset{n}{\mathbf{B}}_k = (\overset{n}{b}_{ij}^{(k)})$ и шестикомпонентный вектор-столбец $\overset{n}{\mathbf{p}}_k = \{p_i^{(k)}\}$ ($i, j = \overline{1, 6}$) в соотношении (2.24) будут известны.

Линеаризованное матричное уравнение (2.24) формально совпадает с аналогичными равенствами (51) в [11] и (2.10) в [14]. Следовательно, используя результаты работ [11, 14], на базе определяющего соотношения (2.24) можем построить структурную модель вязкоупруго-вязкопластического деформирования армированной среды. При этом в момент времени t_n на данной итерации для КМ получаем следующее линейное определяющее соотношение, записанное в матричной форме:

$$\overset{n}{\dot{\sigma}} = \overset{n}{\mathbf{B}} \overset{n}{\dot{\epsilon}} + \overset{n}{\mathbf{p}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.26)$$

где $\overset{n}{\dot{\sigma}}$, $\overset{n}{\dot{\epsilon}}$ – шестикомпонентные векторы-столбцы скоростей осредненных напряжений $\overset{n}{\dot{\sigma}}_{ij}$ и деформаций $\overset{n}{\dot{\epsilon}}_{ij}$ в композиции, по структуре аналогичные (2.18); $\overset{n}{\mathbf{B}} = (\overset{n}{b}_{ij})$ – из-

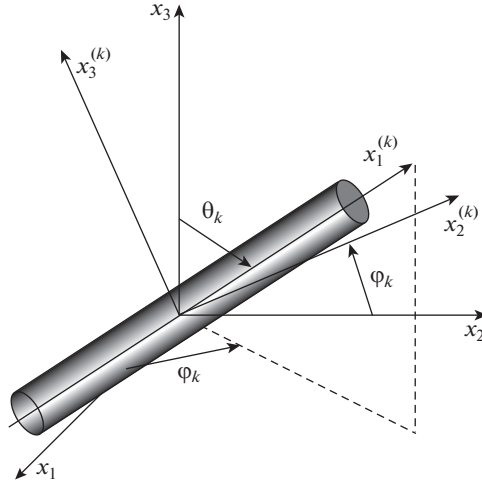


Рис. 1. Локальная система координат, связанная с траекторией волокна k -го семейства

вестная 6×6 -матрица, $\mathbf{p} = \{p_i\}$ – известный шестикомпонентный вектор-столбец, которые вычисляются по формулам (2.17) из [14] и зависят от текущего механического состояния (определенного на предыдущей итерации) компонентов композиции (от \mathbf{V}_k и \mathbf{p}_k ; см. (2.24)) и структуры армирования, т.е. от плотностей ω_k и направлений армирования. Направление траектории волокна k -го семейства однозначно задается двумя углами сферической системы координат θ_k и φ_k , $0 \leq k \leq N$ (рис. 1).

Связь между скоростями деформаций k -го компонента $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$ (см. (2.24)) и скоростями осредненных деформаций композиции $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ (см. (2.26)) определяется соотношениями (2.19) из [14].

3. Моделирование динамического поведения гибкой КМ-пластины. Рассматриваем армированную пластину толщиной $2h$, с которой свяжем декартову прямоугольную систему координат x_i так, что плоскость x_1x_2 ($x_3 = 0$) – срединная плоскость конструкции ($|x_3| \leq h$). Пластина усилена N семействами волокон с плотностями армирования ω_k ($0 \leq k \leq N$); структура армирования в поперечном направлении x_3 однородна (рис. 2).

Предполагаем, что на лицевых поверхностях конструкции ($|x_3| = h$) можно пренебречь действием касательных распределенных внешних нагрузок. Для учета слабого сопротивления КМ-пластины поперечным сдвигам используем кинематические соотношения теорий Амбарцумяна или Редди [3, 21], согласно которым осредненные деформации композиции ε_{ij} и перемещения точек U_i гибкой КМ-пластины аппроксимируем так:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) - x_3 \partial_i \partial_j w + \frac{x_3}{3h^2}(3h^2 - x_3^2)(\partial_i \varepsilon_{j3}^0 + \partial_j \varepsilon_{i3}^0) + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w \\ \varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) &= \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \varepsilon_{i3}^0(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\}, \quad i, j = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

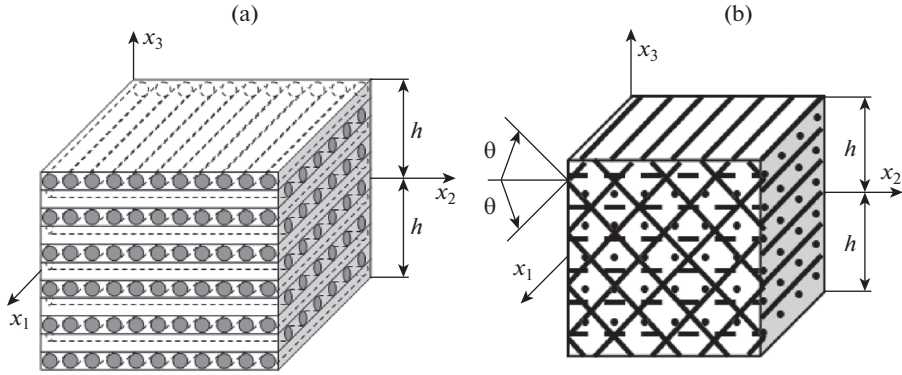


Рис. 2. Элемент пластины с плоской структурой 2D-армирования (a) и пространственной структурой 4D-армирования (b)

$$U_i(t, \mathbf{r}) = u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + \frac{2x_3}{3h^2} (3h^2 - x_3^2) \epsilon_{i3}^0 \quad (3.2)$$

$$U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2$$

где u_i – перемещения точек отсчетной плоскости ($x_3 = 0$) в тангенциальных направлениях x_i ; w – прогиб; ϵ_{i3}^0 – деформации поперечных сдвигов в точках отсчетной плоскости; t_0 – начальный момент времени; ∂_i – оператор частного дифференцирования по переменной x_i ; Ω – область, занимаемая конструкцией в плане. В равенствах (3.1), (3.2) неизвестными являются функции u_i , w и ϵ_{i3}^0 , которые зависят от времени t и двух пространственных координат x_i ($i = 1, 2$).

Моделируется механическое поведение КМ-конструкции как гибкой тонкостенной системы, поэтому напряжение $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$ с приемлемой для практических приложений точностью можно линейно аппроксимировать по поперечной координате x_3 [20]:

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) \equiv \sigma_3(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0 \quad (3.3)$$

где $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$ – нормальные напряжения на верхней (+) и нижней (–) лицевых плоскостях, известные из соответствующих силовых граничных условий.

Матричное соотношение (2.26) – система шести линейных алгебраических уравнений. Из третьего равенства этой системы, согласно соотношениям соответствия (2.18), можно определить скорость линейной поперечной деформации:

$$\dot{\epsilon}_{33} \equiv \dot{\epsilon}_3 = (b_{33})^{-1} \left(\dot{\sigma}_3 - p_3 - \sum_{i=1}^6 (1 - \delta_{3i}) b_{3i} \dot{\epsilon}_i \right) \quad (3.4)$$

где скорость нормального напряжения $\dot{\sigma}_3$ в момент времени t_n известна из (3.3) после его дифференцирования по времени t . Скорости деформаций $\dot{\epsilon}_i$ в правой части (3.4) вычисляются путем дифференцирования по времени соотношений (3.1), т.е. зависят от функций w , \dot{w} , \dot{u}_l и $\dot{\epsilon}_{l3}^0$ ($l = 1, 2$).

Уравнения движения гибкой КМ-пластины при учете равенств (3.2) и (3.3) имеют вид (массовые нагрузки не учитываются) [21]:

$$\begin{aligned} 2h\rho\ddot{w} &= \sum_{i=1}^2 \partial_i \left(F_{i3} + \sum_{j=1}^2 F_{ij} \partial_j w \right) + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}, \quad \frac{2}{3} h^3 \rho \ddot{\gamma}_i = \sum_{j=1}^2 \partial_j M_{ij} - F_{i3} \\ 2h\rho \dot{u}_i &= \sum_{j=1}^2 \partial_j (F_{ij} - F_{j3} \partial_i w) - (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) \partial_i w, \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} \rho &= \omega_0 \rho_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k \rho_k, \quad \omega_0 \equiv 1 - \sum_{k=1}^N \omega_k, \\ F_{ij} &= \int_{-h}^h \sigma_{ij} dx_3, \quad F_{i3} = \int_{-h}^h \sigma_{i3} dx_3, \quad M_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} x_3 dx_3 \\ \gamma_i(t, \mathbf{x}) &\equiv \frac{8}{5} \varepsilon_{i3}^0 - \partial_i w, \quad \varepsilon_{i3}^0(t, \mathbf{x}) = \frac{5}{8} (\gamma_i + \partial_i w), \quad i, j = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

ρ_0 , ρ_k — объемная плотность материалов связующего и волокон k -го семейства; γ_i — введенные для удобства функции; F_{ij} , F_{i3} , M_{ij} — внутренние силовые факторы.

Для однозначного интегрирования исследуемой задачи необходимо использовать начальные и граничные условия. Силовые граничные условия, заданные на кромке Γ_p , определяются равенствами [21]:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 n_j (F_{ij} - F_{j3} \partial_i w) &= P_i \quad (i = 1, 2), \quad \sum_{i=1}^2 n_i \left(F_{i3} + \sum_{j=1}^2 F_{ij} \partial_j w \right) = P_{n3} \\ M_{11} n_1^2 + M_{22} n_2^2 + 2M_{12} n_1 n_2 &= M_{nn}, \\ (M_{22} - M_{11}) n_1 n_2 + M_{12} (n_1^2 - n_2^2) &= M_{nt}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_p, \quad t \geq t_0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Кинематические граничные условия, заданные на кромке Γ_u , имеют вид (см. (3.2) и (3.7)):

$$\begin{aligned} w(t, \mathbf{x}) &= w_*(t, \mathbf{x}), \quad 2hu_i(t, \mathbf{x}) = \bar{u}_i(t, \mathbf{x}), \\ \frac{2}{3} h^3 \gamma_i(t, \mathbf{x}) &= \bar{\bar{u}}_i(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Начальные условия при $t = t_0$ определяются так [21]:

$$\begin{aligned} w(t_0, \mathbf{x}) &= w_0(\mathbf{x}), \quad \dot{w}(t_0, \mathbf{x}) = \dot{w}_0(\mathbf{x}), \\ 2hu_i(t_0, \mathbf{x}) &= \bar{u}_{0i}(\mathbf{x}), \quad \frac{2}{3} h^3 \gamma_i(t_0, \mathbf{x}) = \bar{\bar{u}}_{0i}(\mathbf{x}) \\ 2h\dot{u}_i(t_0, \mathbf{x}) &= \bar{v}_{0i}(\mathbf{x}), \quad \frac{2}{3} h^3 \dot{\gamma}_i(t_0, \mathbf{x}) = \bar{\bar{v}}_{0i}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} \bar{u}_i(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h U_{i*}(t, \mathbf{r}) dx_3, \quad \bar{\bar{u}}_i(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_{i*}(t, \mathbf{r}) x_3 dx_3, \quad \bar{u}_{0i}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_{0i}(\mathbf{r}) dx_3 \\ \bar{\bar{u}}_{0i}(\mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h U_{0i}(\mathbf{r}) x_3 dx_3, \quad \bar{v}_{0i}(\mathbf{x}) \equiv \\ &\equiv \int_{-h}^h V_{0i}(\mathbf{r}) dx_3, \quad \bar{\bar{v}}_{0i}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h V_{0i}(\mathbf{r}) x_3 dx_3 \quad (i = 1, 2) \\ n_1 &= \cos \beta, \quad n_2 = \sin \beta \end{aligned} \quad (3.11)$$

P_i – заданные на кромке Γ_p мембранные силы по направлениям x_i ($i = 1, 2$); P_{n3} – заданная на Γ_p поперечная сила; $M_{nn}, M_{n\tau}$ – заданные на кромке Γ_p изгибающий и крутящий моменты; w_* – заданный на кромке Γ_u прогиб; U_{i*} – заданные на торцевой поверхности пластины перемещения в тангенциальных направлениях x_i ; $w_0, \dot{w}_0, U_{0i}, V_{0i}$ ($i = 1, 2$) – заданные в начальный момент времени t_0 перемещения и скорости точек конструкции; $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_u$ – контур, ограничивающий область Ω , занимаемую пластиной в плане; β – угол, задающий направление внешней нормали к Γ . Возможно задание и пяти смешанных из (3.8) и (3.9) граничных условий, например при моделировании шарнирного опирания кромки [21].

4. Численный метод расчета. Как отмечалось в разделе 2, численное интегрирование рассматриваемой задачи будем строить на основе алгоритма шагов по времени [7, 10, 11, 14, 23, 30]. Поэтому считаем, что в дискретные моменты времени t_m помимо величин, указанных в (2.21), известны значения следующих функций:

$$\begin{aligned}
 u_l^m(\mathbf{x}) &\equiv u_l(t_m, \mathbf{x}), & w^m(\mathbf{x}) &\equiv w(t_m, \mathbf{x}) \\
 \gamma_l^m(\mathbf{x}) &\equiv \gamma_l(t_m, \mathbf{x}), & \sigma_{ij}^m(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}), & \sigma_{33}^{(\pm)m}(\mathbf{x}) &\equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}) \\
 \sigma_{ij}^{(k)m}(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), & \varepsilon_{ij}^{(k)m}(\mathbf{r}) &\equiv \varepsilon_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), & \chi^{(k)n-1}(\mathbf{r}) &\equiv \chi^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}) \\
 \dot{p}_{ij}^{(k)n-1}(\mathbf{r}) &\equiv \dot{p}_{ij}^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}), & l = 1, 2, & i, j = \overline{1, 3} \\
 m = n-1, n, & 0 \leq k \leq N, & \mathbf{x} \in \Omega, & |x_3| \leq h
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

следовательно, используя (3.6), при $t = t_n$ можем определить все силовые факторы и внешние нагрузки, входящие в (3.3) и (3.5).

Производные по времени (за исключением второго равенства (2.22)) будем аппроксимировать центральными конечными разностями [11, 14], что позволяет построить явную численную схему интегрирования исходной задачи. После замены вторых производных по t в левых частях равенств (3.5) их конечно-разностными аналогами, учитывая обозначения, аналогичные (4.1), получим

$$\begin{aligned}
 \frac{2h\rho}{\Delta^2} \left(w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1} \right) &= \sum_{l=1}^2 \partial_l \left(F_{l3} + \sum_{j=1}^2 F_{lj} \partial_j w^n \right) + \sigma_{33}^{(+n)} - \sigma_{33}^{(-n)} \\
 \frac{2h\rho}{\Delta^2} \left(u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(F_{ij} - F_{j3} \partial_j w^n \right) - \left(\sigma_{33}^{(+n)} - \sigma_{33}^{(-n)} \right) \partial_i w^n \\
 \frac{2h^3\rho}{3\Delta^2} \left(\gamma_i^{n+1} - 2\gamma_i^n + \gamma_i^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j M_{ij} - F_{i3}, \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad n = 1, 2, 3 \dots
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Правые части здесь известны, поэтому при учете (4.1) и необходимых граничных условий (3.8) и (3.9) из уравнений (4.2) можем вычислить по явной схеме значения неизвестных функций w^{n+1}, u_i^{n+1} и γ_i^{n+1} в следующий момент времени t_{n+1} . При известных $w^{n+1}, u_i^{n+1}, \gamma_i^{n+1}$ по формулам (3.1) с учетом (3.7) определяем осредненные деформации композиции ε_{ij}^{n+1} . Согласно (3.1) и (3.7) при учете предположений (4.1), деформации ε_{ij}^{n-1} уже известны, поэтому на основании формул численного дифференцирования по t с ис-

Таблица 1. Физико-механические характеристики материалов компонентов композиции [31, 32]

Материал	$\dot{\epsilon}$, с ⁻¹	ρ , кг/м ³	E , ГПа	ν	σ_s , МПа	E_s , ГПа	η , МПа · с	a , м/с
Эпоксидная смола	5×10^{-4}	1210	2.8	0.33	20	1.114	250	1521
Стекланные волокна	100.0	1210	2.8	0.33	22	1.238	250	1521
	5×10^{-4}	2520	86.8	0.25	4500	6.230	1000	5869
	100.0	2520	86.8	0.25	4600	6.314	1000	5869

пользованием (3.4) можно вычислить и скорости осредненных деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}^n$ при $t = t_n$. Затем по формулам (2.19) из [14] вычисляем скорости деформаций материалов композиции $\dot{\epsilon}_k^n$ (см. (2.18)), а из соотношений (2.24) и (2.22) – скорости напряжений $\dot{\sigma}_k^n$ и ускорения деформаций $\ddot{\epsilon}_k^n$ ($0 \leq k \leq N$) в тех же компонентах. Используя третье соотношение (2.3) и формулу трапеций, параметр Одквиста $\chi^{(k)}$ в момент времени t_n с точностью порядка Δ^2 можно вычислить так:

$$\begin{aligned} \chi^{(k)}(\mathbf{r}) &= \int_0^{t_n} \sqrt{2\dot{p}_{ij}^{(k)} \dot{p}_{ij}^{(k)}} dt = \chi^{(k)}(\mathbf{r}) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \sqrt{2\dot{p}_{ij}^{(k)} \dot{p}_{ij}^{(k)}} dt \approx \\ &\approx \chi^{(k)}(\mathbf{r}) + \frac{\Delta}{2} \left(\sqrt{2\dot{p}_{ij}^{(k)} \dot{p}_{ij}^{(k)}} + \sqrt{2\dot{p}_{ij}^{(k)} \dot{p}_{ij}^{(k)}} \right), \quad 0 \leq k \leq N \end{aligned} \quad (4.3)$$

где согласно (4.1) функции $\chi^{(k)}$ и $\dot{p}_{ij}^{(k)}$ уже известны. Скорости пластических деформаций компонентов композиции $\dot{p}_{ij}^{(k)}$ в (4.3) при $t = t_n$ можно определить по формуле (2.5) при учете (2.11). Так как при этом $\dot{p}_{ij}^{(k)}$ уточняются в процессе реализации метода переменных параметров упругости, то по формуле (4.3) итерационно уточняется значение $\chi^{(k)}(\mathbf{r})$. В качестве начального приближения можно принять $\chi^{(k)} = \chi^{(k)}$. Дальнейшее решение рассматриваемой задачи строится так же, как и в [11, 14].

Согласно структуре левых частей уравнений (4.2), для начала расчетов по разработанной численной схеме необходимо знать значения функций w , u_i и γ_i ($m = 0, 1$). Функции w , u_i и γ_i известны из начальных условий, а значения функций w , u_i и γ_i определяются по формуле Тейлора при использовании начальных условий (3.10) и уравнений движения (3.5) в начальный момент времени $t = t_0$ (см. выражения (69) в [11]).

Если область Ω , занимаемая конструкцией в плане, прямоугольна, то после замены в уравнениях (4.2) и граничных условиях (3.8) производных $\partial_i(\bullet)$ их конечно-разностными аналогами получим окончательно явную численную схему типа “крест”. Если область Ω имеет неканоническую форму, то дискретизацию соотношений (4.2) и (3.8) можно провести на основе вариационно-разностного подхода, использованного в [10]. Необходимые условия устойчивости схемы типа “крест” вытекают из критерия

устойчивости Куранта и для тонкостенных однородных конструкций приведены в [10]. Если эти условия выполняются для каждого компонента композиции, то они с запасом выполняются и для КМ-пластины.

5. Обсуждение результатов расчетов. Исследуем неупругое динамическое деформирование относительно тонкой прямоугольной пластины ($\Omega: |x_1| \leq a, |x_2| \leq b; a = 3b, b = 50$ см, $2h = 2$ см; $2h/2b = 1/50$). По всем кромкам ($\Gamma = \Gamma_u$) конструкция жестко закреплена (см. (3.9) и (3.11) при $w_* = U_{i*} = 0$) и при $t = t_0 = 0$ покоится (см. (3.10) и (3.11) при $w_0 = U_{0i} = 0$ и $\dot{w}_0 = V_{0i} = 0, i = 1, 2$). Пластина нагружена избыточным давлением со стороны нижней лицевой плоскости, вызванным приходом воздушной взрывной волны [30]:

$$\sigma_{33}^{(+)} \equiv 0, \quad -\sigma_{33}^{(-)} \equiv p(t) = \begin{cases} p_{\max} t / t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max} \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max} \end{cases} \quad (5.1)$$

где

$$\alpha = -\ln(0.01) / (t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max} \quad (5.2)$$

t_{\max} – время, при котором давление $p(t)$ достигает наибольшего значения $p_{\max} > 0$; t_{\min} – время, при превышении которого можно пренебречь $p(t)$ по сравнению с p_{\max} (соотношение (5.2) получено при условии $p(t_{\min}) = 0.01 p_{\max}$). Согласно экспериментальным данным [30], в расчетах примем $t_{\max} = 0.1$ мс, $t_{\min} = 2$ мс и $p_{\max} = 3$ МПа.

Конструкция изготовлена из эпоксидной смолы [31] и армирована стеклянными волокнами [32]. Диаграмма неупругого деформирования материала композиции при активном нагружении и постоянстве скорости деформации определяется следующей зависимостью при растяжении–сжатии:

$$\sigma = \text{sign}(\epsilon_p) \sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)} \epsilon_p, \quad 0 \leq k \leq N \quad (5.3)$$

где σ, ϵ_p – осевое напряжение и соответствующая пластическая составляющая линейной деформации ϵ ; $E_s^{(k)} = E_s^{(k)}(\dot{\epsilon})$ – модуль линейного упрочнения k -го материала композиции; $\sigma_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)}(\dot{\epsilon})$ – условный предел текучести при значении скорости деформирования $\dot{\epsilon} = \text{const}$. Физико-механические характеристики компонентов композиции представлены в таблице 1, где $a = \sqrt{E/\rho}$ – скорость звука в соответствующем материале. Объемная вязкость материалов в расчетах не учитывается: $\mu^{(k)} \rightarrow \infty, 0 \leq k \leq N$ (см. (2.4) и (2.20)). Диаграмму неупругого деформирования при чистом сдвиге $\tau \sim \gamma_p$ можно рассчитать, используя зависимость (5.3), по формулам, приведенным в [23].

Рассматриваются две однородных ($\theta_k = \text{const}, \varphi_k = \text{const}$ и $\omega_k = \text{const}, 1 \leq k \leq N$) структуры армирования: 1) плоско-ортогональное 2D-армирование (рис. 2,a), когда волокна двух ($N = 2$) семейств уложены в направлениях Ox_1 и Ox_2 с плотностями армирования $\omega_1 = 0.1$ и $\omega_2 = 0.3$ соответственно; 2) пространственное 4D-армирование (рис. 2,b), когда два первых семейства волокон по-прежнему уложены по направлениям Ox_1 и Ox_2 , а третье и четвертое семейства – по направлениям, которые задаются углами (см. рис. 1): $\theta_3 = \pi/4, \theta_4 = 3\pi/4, \varphi_3 = \varphi_4 = \pi/2$ (т.е. на рис. 2,b угол $\theta = \pi/4$). Плотности армирования во второй структуре имеют значения: $\omega_1 = 0.05, \omega_2 = 0.3$ и $\omega_3 = \omega_4 = 0.025$. В обеих структурах общий расход волокон одинаков.

Так как пластина в плане имеет каноническую прямоугольную форму, то по направлениям x_1, x_2 вводится равномерная сетка $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 2b/100 = 1$ см, шаг по вре-

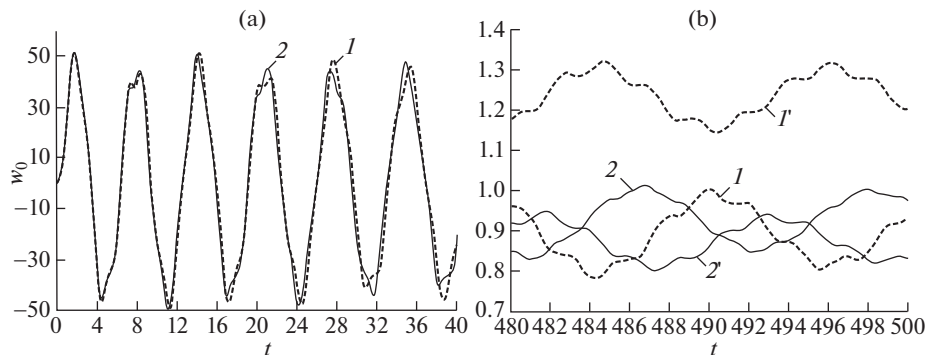


Рис. 3. Осцилляции прогиба центральных точек КМ-пластин, рассчитанные по разным теориям неупругого деформирования в окрестности начального момента времени (а) и в окрестности $t = 500$ мс (б)

мени $\Delta = 1$ мкс, а правые части в уравнениях (4.2) аппроксимируются их конечно-разностными аналогами. При указанной дискретизации области интегрирования отношения $\Delta x_i/\Delta = 10$ км/с и $2h/\Delta = 20$ км/с существенно превышают значения a , указанные в таблице. Следовательно, необходимые условия устойчивости схемы «крест» выполняются для каждого материала композиции [10], а значит, и для рассматриваемой композиции в целом, причем со значительным запасом.

На рис. 3 изображены зависимости прогиба (в мм) центральных точек ($w_0(t) \equiv w(t, 0, 0)$) рассматриваемых КМ-пластин от времени (в мс) в окрестности начального момента (рис. 3,а) и в окрестности $t = 500$ мс (рис. 3,б). Номера кривых соответствуют номерам структур армирования. Кривые, номера которых помечены штрихом, получены без учета чувствительности материалов композиции к изменению скорости деформирования. (Для этих кривых расчеты проводились по табличным данным, соответствующим скорости деформации $\dot{\epsilon} = 5 \times 10^{-4}$ с $^{-1}$.) Кривые $1'$ и $2'$ на рис. 3,а не изображены, так как они визуально почти не отличаются от кривых 1 и 2 соответственно.

Из сравнения ординат точек кривых 1 и 2 на рис. 3,а и 3,б видно, что к моменту времени $t = 500$ мс стеклопластиковые пластины с обеими структурами армирования почти полностью перестают колебаться. Сопоставление кривых на рис. 3,а свидетельствует о том, что для относительно тонкой КМ-пластины замена традиционной 2D-структуры армирования (см. рис. 2,а) на пространственную 4D-структуру (см. рис. 2,б) не приводит к уменьшению максимального значения прогиба. Аналогично, согласно поведению этих же кривых на рис. 3,б, такая замена структуры армирования в тонкой пластине не приводит к значительному уменьшению величины остаточного прогиба в центральной точке конструкции. Сравнение же кривых $1'$ и $2'$ на рис. 3,б показывает, что при расчете тонких КМ-пластин по вязкоупругопластической модели деформирования замена 2D-структуры армирования на 4D-структуру приводит к существенному уменьшению величины остаточного прогиба в центральной точке.

На рис. 4 изображены зависимости прогибов (в мм) исследуемых пластин от координаты x_2 (в м), определенные в центральных поперечных сечениях ($x_1 = 0$) при $t = 500$ мс, когда конструкции практически уже перестали осциллировать. Обозначение кривых на рис. 4 такое же, как и на рис. 3. Поведение кривых 2 и $2'$ на рис. 4 свидетельствует о том, что остаточный прогиб КМ-пластины с пространственным армированием имеет традиционный \cap -образный вид, а поведение кривых 1 и $1'$ показывает, что остаточный прогиб пластин с 2D-армированием имеет необычный М-образный вид.

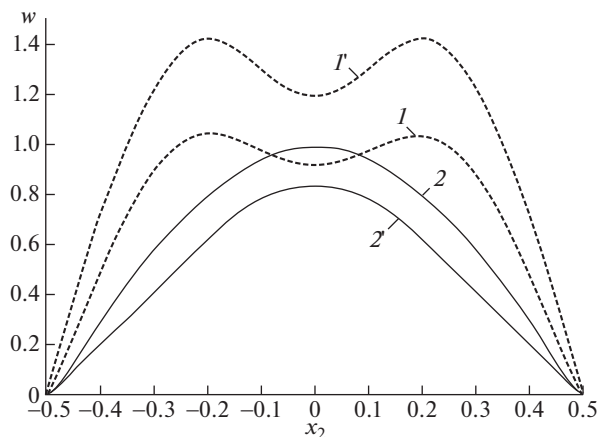


Рис. 4. Эпюры прогибов КМ-пластин, рассчитанные по разным теориям в момент времени $t = 500$ мс

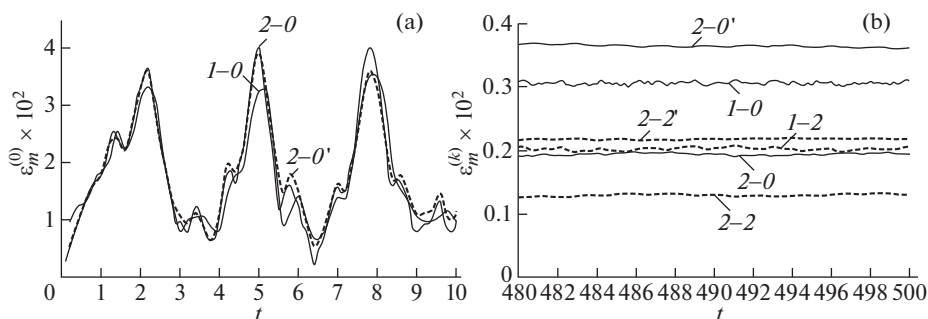


Рис. 5. Осцилляции максимальных значений интенсивности деформаций компонентов композиций пластин, рассчитанные по разным теориям в окрестности начального момента времени (а) и в окрестности $t = 500$ мс (б)

А значит, конструкции с 2D-структурой армирования после динамического неупругого деформирования приобретают остаточную форму гофрированного вида со складками, ориентированными в продольном направлении Ox_1 .

На рис. 5 изображены зависимости наибольших значений интенсивности деформаций $\epsilon_*^{(k)}$ ($\epsilon_m^{(k)}(t) = \max_{\mathbf{r}} \epsilon_*^{(k)}(t, \mathbf{r}), |x_1| \leq a, |x_2| \leq b$ и $|x_3| \leq h$) компонентов композиции рассматриваемых пластин от времени (в мс) в окрестности начального момента (рис. 5,а) и в окрестности $t = 500$ мс (рис. 5,б). Кривые на рис. 5 имеют двойное обозначение: первая цифра обозначает номер структуры армирования, вторая цифра (после дефиса) – номер k -го компонента композиции ($k = 0$ – связующее, $k = 2$ – арматура второго семейства, уложенная в направлении Ox_2 и испытывающая наиболее интенсивное деформирование). Штрих у номера кривой имеет прежний смысл. На рис. 5,а (чтобы его не загромождать) приведены зависимости $\epsilon_m^{(0)}(t)$ только для связующего материала.

Сравнение кривых $1-0$ и $2-0$ на рис. 5,а демонстрирует, что замена в относительно тонкой пластине 2D-структуры армирования на 4D-структуру приводит к увеличению наибольшего значения $\epsilon_{\max}^{(0)} = \max_{t \geq 0} \epsilon_m^{(0)}(t)$ в связующей матрице примерно на 14%. Поведение же кривых $2-0$ и $2-0'$ на рис. 5,а свидетельствует о том, что учет и неучет чувствительности материалов композиции к скорости их деформирования для тонкой стеклопластиковой пластины с 4D-структурой армирования практически не влияет на величину $\epsilon_{\max}^{(0)}$ в связующем. Напротив, сопоставление кривых $1-0$, $1-2$ и $2-0$, $2-2$ на рис. 5,б показывает, что такая замена структуры армирования позволяет существенно уменьшить интенсивность остаточных деформаций рассматриваемых компонентов композиции. Сравнение же кривых $2-0$, $2-2$ и $2-0'$, $2-2'$ указывает на то, что расчет, выполненный для тонкой пластины с 4D-структурой армирования без учета чувствительности материалов композиции к изменению скорости их деформирования (кривые $2-0'$ и $2-2'$), существенно (почти вдвое для связующего) завышает величину интенсивности остаточных деформаций компонентов композиции по сравнению с расчетом, учитывающим эту чувствительность (кривые $2-0$ и $2-2$).

Результаты, которые обсуждались выше, касаются относительно тонких КМ-пластин (относительная толщина равна $1/50$). Проведенные дополнительные расчеты показывают, что при увеличении относительной толщины пластин положительный эффект от замены плоско-перекрестных структур армирования (см. рис. 2,а) на пространственные структуры (см. рис. 2,б) существенно возрастает как при учете, так и неучете чувствительности компонентов композиции к скорости их деформирования. Так, в работе [14] показано, что для стеклопластиковой пластины с относительной толщиной $1/10$ замена 2D-структурой армирования на 4D-структуру приводит к уменьшению максимального значения прогиба почти на 20%, а величины $\epsilon_{\max}^{(0)}$ — на 30% (при учете указанной чувствительности).

6. Заключение. Разработанная модель вязкоупруго-вязкопластического деформирования армированных пластин позволяет определять остаточные перемещения и остаточное деформированное состояние компонентов композиции при учете их чувствительности к изменению скорости деформирования.

Анализ динамического вязкоупругопластического и вязкоупруго-вязкопластического поведения стеклопластиковых пластин, материалы композиции которых слабо чувствительны к скорости деформирования, показал, что даже для относительно тонких КМ-конструкций неучет этой чувствительности может существенно (даже в разы) завышать величину интенсивности остаточных деформаций компонентов композиции. Это различие возрастает с увеличением относительной толщины пластин и с увеличением чувствительности материалов композиции к изменению скорости их деформирования.

Даже в случае относительно тонких стеклопластиковых пластин (с относительной толщиной $1/50$) замена традиционной ортогональной 2D-структуры армирования (рис. 2,а) на пространственную 4D-структуру (рис. 2,б) позволяет существенно уменьшить интенсивность остаточных деформаций компонентов композиции (особенно связующей матрицы). Положительный эффект от такой замены структур армирования резко возрастает с увеличением относительной толщины конструкции. Так, для стеклопластиковых пластин с относительной толщиной порядка $1/10$ указанная замена структур армирования позволяет значительно уменьшить не только остаточные прогибы конструкции и остаточные деформации компонентов композиции, но и максимальный (достигаемый в процессе осцилляций) прогиб и максимальные значения интенсивности деформаций компонентов композиции.

Обнаружено, что после неупругого динамического деформирования стеклопластиковой удлиненной пластины она может приобретать гофрированную остаточную форму с ориентацией складок в продольном направлении.

Высокопрочные стеклянные волокна при их интенсивном деформировании западают упругую энергию в большом количестве, поэтому после прекращения действия внешней динамической нагрузки арматура стремится вернуть КМ-пластину в исходное положение даже несмотря на то, что низкопрочное эпоксисвязующее подвергается при этом значительному циклическому пластическому деформированию. Вследствие чего амплитуда поперечных колебаний тонкостенной КМ-конструкции при нагрузке взрывного типа в окрестности начального момента времени на порядок и более превышает величину остаточного прогиба. Подобное поведение не характерно для неупруго деформируемых однородных пластин при интенсивном динамическом нагружении.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации 121030900260-6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Soutis C.* Fibre reinforced composites in aircraft construction // *Prog. Aerosp. Sci.* 2005. V. 41. № 2. P. 143–151.
2. *Gill S.K., Gupta M., Satsangi P.* Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites // *Front. Mech. Eng.* 2013. V. 8. № 2. P. 187–200.
3. *Reddy J.N.* Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis, 2nd Ed. N.Y.: CRC Press, 2004. 831 p.
4. *Vasiliev V.V., Morozov E.* Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements. Amsterdam: Elsevier, 2013. 412 p.
5. *Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андриюшин В.А.* Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек. М.: Физматлит, 2014. 408 с.
6. *Gibson R.F.* Principles of Composite Material Mechanics. 4th ed. Taylor & Francis Group, LLC, 2015. 815 p.
7. *Kazanci Z.* Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // *Int. J. Non-Lin. Mech.* 2011. V. 46. P. 807–817.
8. *Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W.* Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // *Compos. Struct.* 2010. V. 93. P. 14–31.
9. *Alderliesten R.C., Benedictus R.* Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates – A review // *Int. J. Impact Eng.* 2014. V. 67. P. 27–38.
10. *Абросимов Н.А., Баженов В.Г.* Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.
11. *Янковский А.П.* Моделирование вязкоупругопластического деформирования гибких армированных пластин с учетом слабого сопротивления поперечному сдвигу // *Вычислительная механика сплошных сред.* 2019. Т. 12. № 1. С. 80–97.
12. *Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М.* Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Под ред. *И.И. Гольденблата.* М.: Машиностроение, 1965. 567 с.
13. *Encyclopedia of Physics / Chief ed. S. Flügge.* Vol. VIa/1, Mechanics of Solids I / Ed. *C. Truesdell.* Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag, 1973. = *Белл Дж.* Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Часть II. Конечные деформации. М.: Мир, 1984. 431 с.
14. *Янковский А.П.* Моделирование упругопластического изгиба пространственно-армированных пластин при учете чувствительности компонентов композиции к изменению скорости деформирования // *Прикладная математика и механика.* 2019. Т. 83. № 4. С. 660–686.
15. *Коларов Д., Балтов А., Бончева Н.* Механика пластических сред. М.: Мир, 1979. 302 с.
16. *Жигун И.Г., Душин М.И., Поляков В.А., Якушин В.А.* Композиционные материалы, армированные системой прямых взаимно ортогональных волокон. 2. Экспериментальное изучение // *Механика полимеров.* 1973. № 6. С. 1011–1018.

17. Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник / Ю.М. Тарнопольский, И.Г. Жигун, В.А., Поляков. М.: Машиностроение, 1987. 224 с.
18. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites // Mech. Compos. Mat. 2009. V. 45. № 2. P. 241–254.
19. Reissner E. The effect of transverse-shear deformation on the bending of elastic plates // J. Appl. Mech. 1945. V. 12. № 2. P. 69–77.
20. Богданович А.Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. Рига: Зинатне, 1987. 295 с.
21. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. М.: Наука, 1987. 360 с.
22. Андреев А. Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа. Saarbrucken (Deutschland): Palmarium Academic Publishing, 2013. 93 с.
23. Иванов Г.В., Волчков Ю.М., Богульский И.О., Анисимов С.А., Кургузов В.Д. Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2002. 352 с.
24. Naghdi P.M., Murch S.A. On the Mechanical Behavior of Viscoelastic/Plastic Solids // J. Appl. Mech. Ser. E. 1963. Vol. 30. № 3. P. 321–328. = Нагди П.М., Мерч С.А. О механическом поведении вязкоупруго-пластических тел // Прикладная механика. Труды Америк. об-ва инж.-механиков. Сер. E. 1963. Т. 30. № 3. С. 3–12.
25. Паймушин В.Н., Фирсов В.А., Гонал И., Егоров А.Г., Каюмов Р.А. Теоретико-экспериментальный метод определения параметров демпфирования на основе исследования затухающих изгибных колебаний тест-образцов. 3. Идентификация характеристик внутреннего демпфирования // Механика композитных материалов. 2014. Т. 50. № 5. С. 883–902.
26. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. Изд. 3-е. М.: ЛЕНАНД, 2019. 752 с.
27. Freudental A.M., Geiringer H. The mathematical theories of the inelastic continuum. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1958. = Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.
28. Dekker K., Verwer J.G. Stability of Runge – Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equation. Amsterdam: North-Holland, 1984. 308 p. = Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988. 334 с.
29. Хажинский Г.М. Модели деформирования и разрушения металлов. М.: Научный мир, 2011. 231 с.
30. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // Comp. Struct. 1987. V. 26. № 1/2. P. 1–15.
31. Handbook of composites / Ed. by G. Lubin. N.Y.: Springer, 1982. 786 p. = Справочник по композитным материалам: В 2-х кн. Кн. 1 / Под ред. Дж. Любин. М.: Машиностроение, 1988. 448 с.
32. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. Д.М. Карпиноса. Киев: Наук. думка, 1985. 592 с.