ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 5, с. 92–98

УДК 517.583,517.927,624.072.21

К РАСЧЕТУ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОДОЛЬНОГО ИЗГИБА СТЕРЖНЯ

© 2021 г. К. Н. Анахаев

Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук, Нальчик, Россия

e-mail: anaha13@mail.ru

Поступила в редакцию 09.05.2020 г.
После доработки 11.08.2020 г.
Принята к публикации 07.09.2020 г.

Рассматривается классическая задача нелинейного продольного изгиба стержня от действия сжимающей продольной силы. Получены расчетные зависимости в элементарных функциях для прямого аналитического определения основных параметров изогнутого стержня, таких как координаты очертания стержня, изгибаемые углы по длине стержня, эпюры моментов силы и внутренней энергии изгиба. Сравнение полученных расчетных значений с результатами известных (базовых) решений (Сикорского Ю.С., Попова Е.П., Захарова Ю.В. – Охоткина К.Г.) дало, в целом, достаточно близкую сходимость результатов (~1–2%), приведены примеры расчета, в том числе со сравнением с данными линейного расчета. Полученные результаты могут быть использованы как для теоретических исследований, так и для инженерных расчетов на практике, в частности при определении (обратным методом) жесткости стержней произвольного поперечного сечения, либо модуля упругости различных материалов (композитных) при известных сечениях стержня, в том числе при конструировании защитных сооружений от опасных склоновых геофизических процессов и др.

Ключевые слова: продольный изгиб, нелинейная задача, эллиптические функции, эллиптические интегралы 1 и 2 рода, изгибающий момент сил, внутренняя энергия изгиба

DOI: 10.31857/S0572329921040024

Введение. В статье рассматривается классическая задача нелинейного продольного изгиба тонкого упругого стержня от действия сжимающей продольной силы. Результаты имеющихся аналитических решений указанной задачи представлены в сложных эллиптических функциях Якоби (не выражающихся через элементарные функции) и определение по ним основных параметров изогнутого стержня, таких как координаты очертания стержня, изгибаемые углы по длине стержня, эпюры моментов силы и внутренней энергии изгиба, предполагает использование при проведении прикладных исследований численных методов.

Материалы и методы исследований. Строгое решение классической задачи нелинейного продольного изгиба тонкого упругого стержня длиной L с жестко защемленным одним концом в центре координат xOy, на другой свободный конец которого действует продольная сжимающая сила P (рис. 1), рассматривалась в работах [1–4]. В частности, для данного случая на основе уравнения равновесия стержня, приведенного к виду уравнения нелинейного маятника [3–6]

$$\frac{d^2\theta}{dl^2} + \frac{P}{EJ}\sin\theta = \frac{d^2\theta}{dt^2} + \beta^2\sin\theta = 0 \tag{1}$$

получено решение для определения значения угла θ между касательной к текущей точке изогнутого стержня и осью $0x$ в виде

$$\theta = 2\arcsin\left[\lambda \cdot \mathrm{sn}(u,\lambda)\right] \tag{2}$$

В формулах (1) и (2) даны следующие обозначения: E – модуль упругости материала стержня J; – момент инерции сечения стержня; EJ – изгибная жесткость стержня; l – текущее значение длины дуги стержня; $t = l/L$ – приведенная длина стержня; $\beta = \sqrt{\frac{PL^2}{EJ}}$ – силовой коэффициент подобия [3]; $\mathrm{sn}(u,\lambda)$ – эллиптический синус Якоби при модуле $\lambda = \sin\alpha$ (α – модулярный угол) и аргументе $u = K(\lambda)\cdot t$, где $K(\lambda)$ – полный эллиптический интеграл 1 рода при модуле λ.

При этом собственное (относительное) значение силы $\bar{P}$ [2, 4, 5] для рассматриваемой схемы будет равно

$$\bar{P} = \frac{P}{P_E} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 K^2 \tag{3}$$

где $P_E = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{EJ}{L^2}$ – эйлерова критическая сила.

В формуле (3) и далее обозначение модуля λ в эллиптических интегралах и функциях опущено для упрощения записей, то есть $K(\lambda) \equiv K$, $K'(\lambda) \equiv K'$, $E(\lambda) \equiv E$, $E(\varphi,\lambda) \equiv E(\varphi)$, $\mathrm{sn}(u,\lambda) \equiv \mathrm{sn}(u)$, $\mathrm{cn}(u,\lambda) \equiv \mathrm{cn}(u)$, $\mathrm{dn}(u,\lambda) \equiv \mathrm{dn}(u)$.

В результате интегрирования соотношений $dx/dl = \cos\theta = 1 - 2\lambda^2\mathrm{sn}^2(u)$ и $dy/dl = \sin\theta = 2\lambda\cdot\mathrm{sn}(u)\mathrm{dn}(u)$, где $\mathrm{dn}(u)$ – эллиптическая дельта-функция Якоби, вдоль длины стержня и преобразований в [4] получены расчетные зависимости для определения координат x и y изогнутой оси стержня в зависимости от значений эллиптических интегралов и функций Якоби в виде (при $L = 1$):

$$x = -t + \frac{2}{K}E\left[\mathrm{am}(u)\right], \quad y = \frac{2\lambda}{K}\left[1 - \mathrm{cn}(u)\right] \tag{4}$$

в которых $\mathrm{cn}(u)$ – эллиптический косинус Якоби; $E\left[\mathrm{am}(u)\right]$ – неполный эллиптический интеграл 2 рода при эллиптической амплитуде Якоби [7–9] $\mathrm{am}(u) = \arcsin[\mathrm{sn}(u)]$, аргументе u и модуле λ.

Следует отметить, что выполнение прикладных аналитических расчетов для инженерных задач по полученным зависимостям (4) с эллиптическими функциями и интегралами (не выражающимися через элементарные функции) представляет собой значительные математические трудности, связанные с использованием специальных графиков и таблиц, необходимостью нелинейно-перекрестного (и обратного) интерполирования их данных и т.д. Результаты же численных решений, определяя дискретные значения специальных функций (интегралов) в отдельных точках, ограничены в возможностях выявления обобщенных причинно-следственных связей исходных факторов и оценке их влияния на итоговые результаты [11–14].

В связи с этим, ниже приводятся расчетные зависимости, позволяющие выразить вышеизложенные результаты в элементарных функциях, полученных на основе гидромеханических решений (с погрешностью $\ll 1-2\%$), с расширением области определяемых характеристик стержня.

При этом для прямого расчета эллиптического синуса Якоби sn(u) получена новая формула, основанная на работах [11, 12, 15], в виде:

$$\operatorname{sn}(u) = \frac{(1+R^{-2})\sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{1+R^{-2}\cdot\sin^2\left(\frac{\pi u}{2K}\right)} \quad \left(\text{при}\,\frac{K'}{2K} \geq 1 \text{ или } \lambda \leq 0.171259\right) \tag{5}$$

$$\operatorname{sn}(u) = \frac{(\xi^* - n)(1-m)}{\xi^*(1+m-2n)+n(1+m)-2m} \quad \left(\text{при } \frac{K'}{2K} < 1 \text{ или } \lambda > 0.171259\right) \tag{6}$$

в которых

$$R = \operatorname{ch}\left(\frac{\pi K'}{2K}\right), \quad \xi^* = \frac{2}{r}\frac{\operatorname{ch}\left[\frac{\pi}{K'}(u+K)\right]}{1+r^{-2}\operatorname{ch}^2\left[\frac{\pi}{K'}(u+K)\right]}$$
$$m = \frac{2r}{1+r^2}, \quad n = \frac{2}{r}\cdot\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi K}{K'}\right)}{1+r^{-2}\cdot\operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi K}{K'}\right)}, \quad r = \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi K}{K'}\right), \quad u = K\cdot t \tag{7}$$

При этом эллиптический косинус Якоби cn(u) равен [1, 7, 8] $\operatorname{cn}(u) = \sqrt{1-\operatorname{sn}^2(u)}$.

Значения K и K' (полного эллиптического интеграла 1 рода при дополнительном модуле $\lambda' = \sqrt{1-\lambda^2}$) могут быть определены по зависимостям [10–14]:

$$K = \frac{\pi}{2} + \frac{\ln\sqrt{1-\lambda^2}}{\ln[0.35(1-0.2\sqrt{1-\lambda^2})]} \tag{8}$$

$$K' = \frac{2K}{\pi}\operatorname{Arch}\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda} \quad (\text{при } \lambda \leq 0.45)$$
$$K' = \frac{\pi}{2} + \frac{\ln\lambda}{\ln[0.35(1-0.2\lambda)]} \quad (\text{при } \lambda > 0.45) \tag{9}$$

В зависимости (4) величина неполного эллиптического интеграла 2 рода $E[\operatorname{am}(u)]$ находится по нижеследующим усовершенствованным формулам (10) [14], подставляя в них вместо φ величину эллиптической амплитуды Якоби $\operatorname{am}(u) = \arcsin[\operatorname{sn}(u)]$, в котором значение эллиптического синуса Якоби sn(u) рассчитывается по (5)–(9):

$$E(\varphi) = \begin{cases} \varphi - (\varphi - \sin\varphi)\dfrac{\alpha_0}{90^\circ}, & 0 \leq \varphi \leq 1 \\ \left[2E + \left(1 - 0.1\pi\dfrac{\alpha_0}{180^\circ}\right)\dfrac{\pi-2\varphi}{\varphi-1}\right]\dfrac{\varphi-1}{\pi-2}, & 1 < \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \tag{10}$$

где $\alpha_0 = \dfrac{\alpha}{\pi}\cdot 180^\circ$ — модулярный угол (в градусах); E — полный эллиптический интеграл 2 рода, определяемый по [10, 12, 13]:

$$E = \ln\sqrt{e^{\pi} - (e^{\pi} - e^{2})\cdot\lambda^{2}} \qquad (11)$$

Результаты исследования и их обсуждение. Значения $E(\varphi)$, полученные по зависимостям (10), достаточно близко (~1%) согласуются с графиками точного решения [7, 9], а для граничных участков полностью совпадают с точными формулами. В частности, при $\alpha_0 = 0$; $\pi/2$ и $\varphi = 0$; $\pi/2$, соответственно, $E(\varphi, 0) = \varphi$; $E(\varphi, 1) = \sin\varphi$ и $E(0, \lambda) = 0$; $E(\pi/2, \lambda) = E$.

Таким образом, подставляя значения рекомендуемых расчетных зависимостей в элементарных функциях (5)—(11) в формулы (4), полностью рассчитываются координаты изогнутой оси стержня для заданных значений модуля λ. При этом, для свободного конца стержня (точки A: $t = 1$, $u = K$) формулы (4) получат вид:

$$x_A = 2\frac{E}{K} - 1, \quad y_A = 2\frac{\lambda}{K} \qquad (12)$$

Значения изгибающих моментов в любой точке стержня определяются по формуле [1] $M = \bar{P}(y_A - y)$, подставляя в которую величины y_A, y из (12), (4) и преобразовывая, окончательно получим

$$M = 2\bar{P}\frac{\lambda}{K}\,\mathrm{cn}(K\cdot t) \qquad (13)$$

Изгибающий момент M для концевой свободной точки стержня ($t = 1$) и точки заделки ($t = 0$) имеет, соответственно, минимальное (нулевое) и максимальное значения, $M_{\min} = 0$ и $M_{\max} = 2\bar{P}\lambda/K$.

Аналогично, угол θ между касательной к текущей точке изогнутого стержня и осью $0x$ (см. рис. 1), определяемый по формуле (2), для точек $t = 1$ и $t = 0$ принимает значения, соответственно, $\theta_{\max} = 2\arcsin(\lambda)$ и $\theta_{\min} = 0$.

Приращение угла изгиба θ вдоль длины стержня определится производной

$$\theta' = \frac{d\theta}{dt} = -2\lambda K\cdot\mathrm{cn}(K\cdot t) \qquad (14)$$

с максимальным значением $\theta'_{\max}$ в точке заделки ($t = 0$), равным $\theta'_{\max} = -2\lambda K$.

Внутренняя энергия изгиба стержня V определится (при $\varphi = 0$) по зависимости [3]

$$V = \bar{P}L\left\{\frac{2}{\beta}[E - E(\varphi)] - 2(1-\lambda^{2})\right\} = 2\bar{P}L\left(\frac{E}{\beta} + \lambda^{2} - 1\right) \qquad (15)$$

Вышеприведенные расчетные зависимости в элементарных функциях при заданных значениях модуля λ позволяют напрямую рассчитать все необходимые характеристики продольно изогнутого стержня. Для исходной же заданной величины силовой нагрузки $\bar{P}$ значение модуля λ находится методом подбора из зависимости (3), подставляя в нее вместо K его значение из формулы (8).

В нижеследующих таблицах 1 и 2 дается сравнение значений координат изогнутого стержня, подсчитанных по рекомендуемым зависимостям (4)—(12) с результатами базового решения Сикорского Ю.С. [1, с. 74, таблицы *a* , *b*], основанного на нелинейно-перекрестном (и обратном) интерполировании табличных данных, соответственно, при силовой нагрузке $\bar{P} = 1.293$ для заданных значений амплитуды $\varphi = \mathrm{am}(u) = \arcsin[\mathrm{sn}(K\cdot t)]$, равных 0; 30°; 60°; 90°, и для концевой точки ($t = 1$) стержня при раз-

Таблица 1. Координаты изогнутого стержня при $\overline{P} = 1.293$ и заданных амплитудах φ

Амплитуда φ (в град.)	Приведенная длина стержня t	Координата x			Координата y		
		базовое решение [1]	по автору (4)–(12)	%	базовое решение [1]	по автору (4)–(12)	%
0	0	0	0	0	0	0	0
30	0.299	0.277	0.275	–0.6	0.096	0.096	0
60	0.629	0.469	0.457	–2.5	0.360	0.358	–0.7
90	1	0.560	0.577	+3.0	0.720	0.715	–0.7

Таблица 2. Координаты концевой точки изогнутого стержня при силовых нагрузках $\overline{P}$

Номера	Силовая нагрузка $\overline{P}$	Координата x			Координата y		
		базовое решение [1]	по автору (4)–(12)	%	базовое решение [1]	по автору (4)–(12)	%
I	1.015	0.970	0.972	+0.2	0.220	0.219	–0.3
II	1.064	0.881	0.887	+0.8	0.422	0.422	0
III	1.152	0.741	0.752	+1.5	0.593	0.593	0
IV	11.293	0.560	0.577	+3.0	0.720	0.718	–0.2
V	1.518	0.349	0.363	+4.2	0.792	0.787	–0.6
VI	1.884	0.123	0.131	+6.5	0.803	0.799	–0.5
VII	2.541	–0.107	–0.108	+1.2	0.750	0.748	–0.3
VIII	4.029	–0.340	–0.345	+1.4	0.625	0.624	–0.1
IX	9.116	–0.577	–0.578	+0.1	0.421	0.421	0

личных (девяти) значениях силовой нагрузки $\overline{P}$. При этом значения t получены обратным расчетом из заданных величин амплитуды φ.

Как следует из таблиц 1 и 2, результаты подсчетов координат изогнутого стержня, в том числе и концевой точки стержня, при различных значениях силовой нагрузки $\overline{P}$ и амплитуд φ, подсчитанные по предлагаемым зависимостям на основе элементарных функций (4)–(12), достаточно близко (в целом ~ до 2–3%) согласуются с результатами базового решения Сикорского Ю.С. [1], основанным на нелинейно-перекрестном (и обратном) интерполировании табличных данных (Примечание: Отдельные отклонения в таблицах по координате x могут быть обусловлены, в частности, погрешностями интерполяции в базовом решении [1]).

Кроме этого, расчет по формулам (4)–(12) абсциссы концевой точки изогнутого стержня для заданной силовой нагрузки $\overline{P} = 2.160$ показал близкое совпадение ($x = 0.011$) с нулевым значением точного решения Попова Ю.С. [3, рис. 5.4, с. 114].

На рисунке приведена схема изогнутого стержня от действия продольной силовой нагрузки $\overline{P}$ с рассчитанными по рекомендуемым формулам (4)–(12) значениями:

– для заданных величин λ^2, равных $\sqrt{0.2}$ ($\alpha = 0.1476\pi$), $\sqrt{0.5}$ ($\alpha = 0.25\pi$), $\sqrt{0.85}$ ($\alpha = 0.3734\pi$), $\sqrt{0.99999}$ ($\alpha = 0.4990\pi$) (кривые *1–4*), близко совпадающих с очертаниями указанных кривых по численному расчету [4, рис. 3, с. 129];

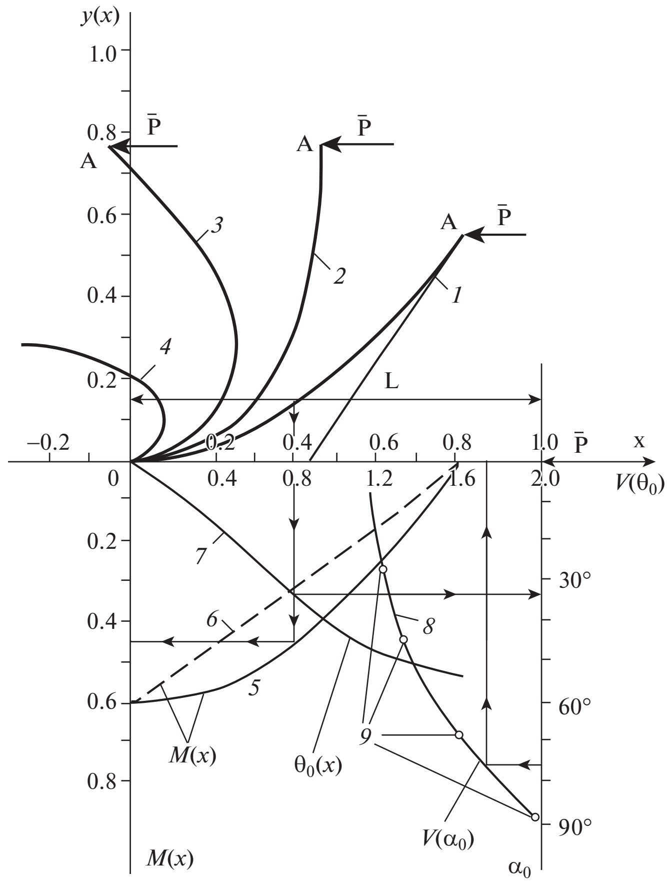

Рис. 1. Расчетная схема продольного изгиба стержня: *1–4* – очертания изогнутых стержней для заданных значений λ^2, равных $\sqrt{0.2}$, $\sqrt{0.5}$, $\sqrt{0.85}$, $\sqrt{0.99999}$; *5*, *6* – эпюры моментов силы $M(x)$ по длине стержня при $\lambda^2 = \sqrt{0.2}$ для нелинейной и линейной задач; *7*, *8* – графики углов изгиба $\theta_0(x)$ по длине стержня при $\lambda^2 = \sqrt{0.2}$ и внутренней энергии изгиба стержня $V(\alpha_0)$ в зависимости от модулярного угла α_0; *9* – точки энергии изгиба $V(\alpha_0)$, соответствующие стержням с значениями λ^2, равными $\sqrt{0.2}$, $\sqrt{0.5}$, $\sqrt{0.85}$, $\sqrt{0.99999}$.

– для эпюр изгибающих моментов силы $M(x)$ по длине стержня при значении $\lambda^2 = \sqrt{0.2}$ с учетом нелинейности (кривая *5*) и линейной задачи (прямая *6*);

– для графиков углов изгиба $\theta_0(x) = \dfrac{\theta}{\pi} \cdot 180°$ (между касательной к текущей точке и осью $0x$ – в градусах) при $\lambda^2 = \sqrt{0.2}$ (кривая *7*) и внутренней энергии изгиба стержня $V(\alpha_0)$ в зависимости от значений модулярного угла α_0 (кривая *8*);

– для точек на кривой внутренней энергии изгиба $V(\alpha_0)$, соответствующих стержням с значениями λ^2, равными $\sqrt{0.2}$; $\sqrt{0.5}$; $\sqrt{0.85}$; $\sqrt{0.99999}$ (точки *9*).

Как следует из рисунка, максимальные значения изгибающих моментов $M(x)$ и внутренней энергии изгиба $V(\alpha_0)$ сосредоточены в начальной точке задела стержня O, в которой угол $\theta_0(x)$ сопряжения с осью $0x$ имеет нулевое значение. При этом сравнительная оценка эпюр изгибающих моментов по длине стержня для нелинейной (кривая *5*) и линейной (прямая *6*) задач показывает значительное занижение значений последней. В частности, занижение значений для рассмотренного случая изгибаемого стержня при $\lambda^2 = \sqrt{0.2}$ достигает до 30% и более, что указывает на неприемлемость применения “чисто линейного” метода при решении прикладных задач на практике.

Заключение. В работе рассматривается классическая задача нелинейного продольного изгиба стержня от действия сжимающей продольной силы. При этом получены расчетные зависимости в элементарных функциях для прямого аналитического определения основных параметров изогнутого стержня, таких как координаты очертания стержня, изгибаемые углы по длине стержня, эпюры моментов силы и внутренней энергии изгиба. Сравнение полученных расчетных значений с результатами известных (базовых) решений (Сикорского Ю.С., Попова Е.П., Захарова Ю.В. – Охоткина К.Г.) дало в целом достаточно близкую сходимость результатов (~1–2%), приведены примеры расчета, в том числе сj сравнением с данными линейного расчета. Полученные результаты могут быть использованы как для теоретических исследований, так и для инженерных расчетов на практике, в том числе и при определении (обратным методом) жесткости стержней произвольного поперечного сечения, либо модуля упругости различных материалов (композитных) при известных сечениях стержня, в том числе при конструировании защитных сооружений от опасных склоновых геофизических процессов и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сикорский Ю.С.* Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. М.–Л.: НКТП СССР, 1936. 365 с.
2. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения с техническими приложениями. М.: Наука, 1968. 503 с.
3. *Попов Е.П.* Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986. 294 с.
4. *Захаров Ю.В., Охоткин К.Г.* Нелинейный изгиб тонких упругих стержней // Прикладная механика и техническая физика. 2002. Т. 43. № 5. С. 124–131.
5. *Захаров Ю.В., Захаренко А.А.* Динамическая потеря устойчивости в нелинейной задаче о консоли // Вычислительные технологии. 1999. Т. 4. № 1. С. 48–54.
6. *Анахаев К.Н.* К расчету математического маятника // Доклады Академии наук. 2014. Т. 459. № 3. С. 288–293.
7. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342 с.
8. *Милн-Томсон Л.* Эллиптические функции Якоби и тэта-функции / Справочник по специальным функциям. Под ред. *Абрамовица М., Стиган И.* М.: Наука, 1979. С. 380–400.
9. *Милн-Томсон Л.* Эллиптические интегралы / Справочник по специальным функциям. Под ред. *Абрамовица М., Стиган И.* М.: Наука, 1979. С. 401–441.
10. *Анахаев К.Н.* О методах расчёта потенциальных (фильтрационных) потоков на основе эллиптических интегралов Якоби // Гидротехническое строительство. 2008. № 8. С. 7–9.
11. *Анахаев К.Н.* О совершенствовании гидромеханических методов расчета потенциальных (фильтрационных) потоков // “Инженерные системы – 2009”. Труды междунар. науч.-практ. конф. Т. 2. М.: РУДН, 2009. С. 588–595.
12. *Анахаев К.Н.* Об определении эллиптических функций Якоби // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. 2009. № 2. С. 90–95.
13. *Анахаев К.Н.* О полных эллиптических интегралах 3-го рода в задачах механики // Доклады Академии наук. 2017. Т. 473. № 2. С. 151–153.
14. *Анахаев К.Н.* Эллиптические интегралы в нелинейных задачах механики // Доклады Российской Академии наук. Физика. Технические науки. 2020. Т. 491. № 2. С. 24–29.
15. *Анахаев К.Н.* О расчете потенциальных потоков // Доклады Академии наук. 2005. Т. 401. № 3. С. 337–341.