

УДК 539.3

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

© 2021 г. А. О. Ватульян^{a,b,*}, В. О. Юров^{a,b,**}

^a Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

^b Южный математический институт – филиал ВЦ РАН, Владикавказ, Россия

*e-mail: vatulyan@aaanet.ru

**e-mail: vitja.jurov@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.11.2020 г.

После доработки 08.12.2020 г.

Принята к публикации 27.12.2020 г.

Рассмотрена задача об определении переменных характеристик упругого стержня, изготовленного из функционально-градиентного материала по данным акустического зондирования. В качестве дополнительной информации используются амплитудно-частотные характеристики стержня при продольных и изгибных колебаниях. Сформулирована система нелинейных интегральных уравнений, решение которой строится на основе итерационной схемы. Представлены условия, при которых реконструкция осуществляется единственным образом, приведены результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: обратная задача, балка, неоднородность, единственность, итерационный процесс, вычислительный эксперимент, слабая постановка, интегральные уравнения первого рода

DOI: 10.31857/S0572329921040139

Введение. В последнее время объектами исследования в механике стали объекты и материалы, переменностью свойств которых для адекватного прогноза на воздействие различного типа пренебрегать нельзя. Здесь в первую очередь отметим задачи геофизики и горной механики, биомеханики тканей, задачи о деформировании элементов конструкций из композиционных и функционально-градиентных материалов [1]. Для таких объектов развиты и совершенствуются способы осреднения [2], согласно которым вычисляются параметры однородного тела, однако иногда расчет на основе осредненных моделей может дать весьма отдаленные от наблюдаемых в эксперименте результаты [3].

Функционально-градиентные структуры в последние годы становятся распространенными элементами конструкций и часто вытесняют слоистые композиты и покрытия. Технологические аспекты изготовления таких элементов с заданным градиентом свойств по одной координате достаточно сложны и на практике не всегда удается достичь заданных функциональных зависимостей (степенных, экспоненциальных), задаваемых в теоретической модели. В связи с этим важным этапом является идентификация градиентных свойств готовых изделий на основе одного из неразрушающих методов, прежде всего акустических и тепловых, что требует решения ряда обратных задач. Заметим, что существует достаточное число работ и монографий, в которых обратные задачи (ОЗ) для операторов второго порядка базируются на спектральных по-

становках типа обратной задачи Штурма–Лиувилля, в которых основная информация, по которой осуществляется реконструкция, базируется на знании двух спектров (упомянем лишь [4, 5]). К сожалению, для реальных конструкций возможно измерить лишь несколько первых резонансных частот, что в значительной степени снижает эффективность спектральных подходов. Для реальных стержневых систем значительно более простым является измерение амплитудно-частотной характеристики при различных видах силового воздействия в некотором частотном диапазоне.

В настоящей работе изложены основные аспекты исследования ОЗ для стержневых структур, в которых определяются две функции, характеризующие законы изменения модуля Юнга и плотности из анализа амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) консольно заземленного стержня [1, 6, 7]. Отметим также довольно подробную статью [8], в которой изучается обширный класс обратных задач для балочных структур, в первую очередь связанный с идентификацией дефектов. Особенностью задач такого типа является их сильная нелинейность и некорректность [9], невозможность построения решения прямых задач в аналитическом виде, что затрудняет построение операторных уравнений в ОЗ. При определении же нескольких функций, характеризующих неоднородность, трудности значительно возрастают. При формировании итерационных процессов необходимо задавать различные режимы нагружения и реализовывать решение классических некорректных задач для систем интегральных уравнений Фредгольма первого рода с гладкими ядрами.

В настоящей работе обсуждены новые аспекты исследования таких задач, которые возникли в последнее время, обсуждены некоторые вспомогательные вопросы колебаний неоднородных структур, вопросы единственности, сформированы итерационные схемы, представлены результаты вычислительных экспериментов.

1. Постановка задач. Рассмотрим закрепленный на конце $x = 0$ упругий стержень длины l постоянного поперечного сечения с переменными свойствами (упругий модуль $E = E(x)$ и плотность $\rho = \rho(x)$ – есть произвольные положительные функции координаты x). Будем считать, что в нем приложенной к торцу стержня $x = l$ нагрузкой можно возбудить два типа колебаний – продольные и изгибные.

Сформулируем соответствующие краевые задачи.

Задача 1. Рассмотрим задачу об установившихся продольных колебаниях под действием силы амплитуды P ; в этом случае краевая задача принимает вид

$$(E(x)u'(x, \omega))' + \rho(x)\omega^2 u(x, \omega) = 0 \tag{1.1}$$

$$u(0, \omega) = 0 \quad E(l)Fu'(l, \omega) = P \tag{1.2}$$

где $u(x, \omega)$ – амплитуда продольных смещений стержня.

Задача 2. Сформулируем задачу об изгибных колебаниях в рамках модели Эйлера–Бернулли, уравнение имеет вид [5]:

$$(E(x)Iw''(x, \omega))'' - \rho(x)\omega^2 Fw(x, \omega) = 0 \tag{1.3}$$

где $F = \int_F dF$ – площадь поперечного сечения, $I = \int_F x_3^2 dF$ – момент инерции, $w(x, \omega)$ – амплитуда поперечных смещений нейтральной оси стержня.

Будем считать, что на конце $x = l$ действует сосредоточенный момент амплитуды M и граничные условия в задаче имеют вид:

$$w(0, \omega) = w'(0, \omega) = 0, \quad E(l)Iw''(l, \omega) = M, \quad (E(x)Iw''(x))(l, \omega) = 0 \tag{1.4}$$

Далее будем рассматривать задачу о воздействии сосредоточенным моментом, которая описывается граничными условиями (1.4).

Ранее в [1] достаточно подробно исследованы задачи о раздельном восстановлении одной из функций – модуля упругости $E = E(x)$ или плотности $\rho = \rho(x)$ из анализа

АЧХ при продольных или изгибных колебаниях стержня при условии, что другая известна. Также имеется работа [6], где исследована задача о нахождении двух функций, характеризующих неоднородность свойств, при действии поперечной силы на конце. В настоящей работе исследуется иной способ возбуждения снятия АЧХ.

Приведем краевые задачи (1.1)–(1.2) и (1.3)–(1.4) к безразмерному виду, введя безразмерную координату $\xi = xl^{-1}$, безразмерные параметры и функции

$$g(\xi) = E(\xi l)E_0^{-1}, \quad r(\xi) = \rho(\xi l)\rho_0^{-1}, \quad \kappa^2 = \rho_0\omega^2 l^2 E_0^{-1} \quad (1.5)$$

(здесь E_0, ρ_0 – соответственно характерное значение модуля Юнга и плотности; далее всюду вместо ξ будем употреблять x . В постановке ОЗ будем считать дополнительно, что известны границы изменения искомых функций $g_- \leq g(x) \leq g_+$, $r_- \leq r(x) \leq r_+$. Краевая задача для продольных колебаний имеет вид

$$(g(x)u'(x, \lambda))' + \lambda r(x)u(x, \lambda) = 0 \quad (1.6)$$

$$u(0, \lambda) = 0, \quad g(1)u'(1, \lambda) = 1, \quad \lambda = \kappa^2 \quad (1.7)$$

Здесь в силу линейности задачи о нахождении смещения амплитуда приложенной безразмерной силы положена равной 1.

Безразмерная форма краевой задачи об изгибных колебаниях имеет вид

$$(g(x)w''(x, \lambda))'' - \gamma \lambda r(x)w(x, \lambda) = 0 \quad (1.8)$$

$$w(0, \lambda) = w'(0, \lambda) = 0, \quad g(1)w''(1, \lambda) = 1, \quad (g(x)w''(x, \lambda))'(1) = 0 \quad (1.9)$$

Здесь также в силу линейности задачи о нахождении деформационных характеристик амплитуда приложенного безразмерного момента положена равной 1 и введено обозначение безразмерного параметра $\gamma = Fl^2 I^{-1}$. Отметим, что для кругового цилиндра радиуса a находим, что $\gamma = 4l^2/a^2$ и при обычно принимаемых в теории стержней соотношениях $a/l \leq 1/5$ получим, что $\gamma \geq 100$.

Далее сформулируем обратную задачу об определении двух функций $g(x)$ и $r(x)$.

Формулировка ОЗ. Будем считать, что известна дополнительная информация об амплитудно-частотных характеристиках вида

$$u(1, \lambda) = f(\lambda), \quad \lambda \in [0, \lambda_1] \quad (1.10)$$

$$w'(1, \lambda) = \varphi(\lambda), \quad \lambda \in [0, \lambda_2] \quad (1.11)$$

Итак, обратная задача состоит в определении 4 функций $u(x, \lambda)$, $w(x, \lambda)$, $g(x)$, $r(x)$, удовлетворяющих двум дифференциальным уравнениям (1.6) и (1.8) и дополнительным граничным условиям.

Опишем классы функций $g, r \in M$, для которых будут отыскиваться искомые решения. Наибольший интерес с точки зрения приложений вызывает два случая, где M представляет собой конус положительных а) бесконечно дифференцируемых M_1 или б) кусочно-постоянных функций M_2 .

Прежде, чем приступить к исследованию ОЗ, отметим возможные пути решения прямой задачи. При заданных произвольных законах изменения $g(x)$, $r(x)$ краевая задача (1.6)–(1.7) может быть исследована лишь численно различными способами. Наиболее часто ранее это осуществлялось на основе сведения к интегральному уравнению Фредгольма второго рода (например, такая схема реализована в [6]) и анализе дис-

кретной задачи; на основе анализа разностной схемы [1]. Приведем вид соответствующих интегральных уравнений второго рода

$$u(x, \lambda) = \int_0^x g^{-1}(\xi) d\xi + \lambda \int_0^x g^{-1}(\xi) d\xi \int_{\xi}^1 r(\eta) u(\eta, \lambda) d\eta \quad (1.12)$$

$$w(x, \lambda) = \int_0^x (x - \xi) g^{-1}(\xi) d\xi + \gamma \lambda \int_0^x (x - \eta) g^{-1}(\eta) \int_{\eta}^1 (\xi - \eta) r(\xi) w(\xi, \lambda) d\xi d\eta \quad (1.13)$$

В последнее время гораздо чаще используется метод пристрелки, не требующий сведения к интегральному уравнению.

Приведем далее некоторые результаты о свойствах решения исследуемых краевых задач при переменных характеристиках.

2. Некоторые свойства решений. 2.1. *Исследование свойств решения* краевой задачи (1.6)–(1.7). Решение краевой задачи (1.6)–(1.7) в общей ситуации, когда модуль и плотность переменны, представимо в виде ряда

$$u(x, \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) \lambda^j \quad (2.1)$$

С помощью решения простых краевых задач (или интегральных уравнений вида (1.12), (1.13)) для коэффициентов разложения можно найти следующие рекуррентные соотношения для произвольных положительных суммируемых $g(x)$ и $r(x)$

$$a_0(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{g(\xi)} \quad (2.2)$$

$$a_j(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{g(\xi)} \int_{\xi}^1 r(\eta) a_{j-1}(\eta) d\eta, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Перечислим некоторые свойства коэффициентов разложений: 1) $a_j(x) > 0$; 2) $a_j(x) \in C[0, 1]$ независимо от гладкости $g(x)$ и монотонно возрастают

$$\begin{aligned} \|a_0\|_{C[0,1]} &= \max_{x \in [0,1]} \left| \int_0^x \frac{d\xi}{g(\xi)} \right| = \int_0^1 \frac{d\xi}{g(\xi)} = d_0 \\ \|a_j\|_{C[0,1]} &= \max_{x \in [0,1]} \left| \int_0^x \frac{d\xi}{g(\xi)} \int_{\xi}^1 r(\eta) a_{j-1}(\eta) d\eta \right| \leq d_1 \|a_{j-1}\|_{C[0,1]} \\ d_1 &= \int_0^1 \frac{d\xi}{g(\xi)} \int_{\xi}^1 r(\eta) d\eta \leq d_0 r_0, \quad r_0 = \int_0^1 r(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.4)$$

3) ряд (2.3) сходится для $d_1 \lambda < 1$, что позволяет оценить снизу первое собственное значение задачи; 4) $u(x, \lambda) > 0$ монотонно возрастает по каждому аргументу; 5) для $\lambda < d_1^{-1}$ $t(x, \lambda) = g(x)u'(x, \lambda) > 0$ монотонно убывает по x и монотонно возрастает по λ ; 6) $f(\lambda)$ монотонно возрастающая бесконечно дифференцируемая функция.

Отметим, что гладкость функции $r(x)$ не влияет на свойства 1–6, а в случае, когда известна дополнительная информация об ограниченности искомым функций $g_- \leq g(x) \leq g_+$, $r_- \leq r(x) \leq r_+$, величина d_1 оценивается следующим образом $d_1 \leq c$, $c = r_+ g_-^{-1} / 2$.

Перечисленные выше свойства важны при изучении решений прямой задачи при малых значениях спектрального параметра λ (в диапазоне до первого резонанса).

2.2. *Исследование свойств решения* краевой задачи (1.8)–(1.9). Аналогично изложенному в предыдущем пункте построению приведем решение краевой задачи (1.8)–(1.9) для переменных $g(x)$ и $r(x)$ в виде ряда по степеням $\lambda = \kappa^2$

$$w(x, \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j(x) \lambda^j \quad (2.5)$$

Последовательное решение простых краевых задач, формируемых при одинаковых степенях λ , дает следующие рекуррентные соотношения для коэффициентов

$$b_0(x) = \int_0^x \frac{(x - \xi)}{g(\xi)} d\xi \quad (2.6)$$

$$b_j(x) = \gamma \int_0^x (x - \eta) g^{-1}(\eta) \int_{\eta}^1 (\xi - \eta) r(\xi) b_{j-1}(\xi) d\xi d\eta, \quad j = 1, 2 \dots \quad (2.7)$$

Легко устанавливаются следующие свойства: 1) $b_j(x) > 0$; 2) $b_j(x) \in C^1[0, 1]$ независимо от гладкости $g(x)$ и монотонно возрастают, причем оценка в пространстве непрерывных функций дает

$$\|b_0\|_{C[0,1]} = \max_{x \in [0,1]} \left| \int_0^x \frac{(x - \xi)}{g(\xi)} d\xi \right| = \frac{1}{g} \int_0^1 (1 - \xi) d\xi = c_0 = d_0 - m_0, \quad m_0 = \int_0^1 \frac{\xi d\xi}{g(\xi)}$$

$$\|b_j\|_{C[0,1]} \leq \gamma c_1 \|b_{j-1}\|_{C[0,1]}, \quad \text{причем} \quad c_1 = \int_0^1 (1 - \eta) g^{-1}(\eta) \int_{\eta}^1 (\xi - \eta) r(\xi) d\xi d\eta \quad (2.8)$$

3) ряд (2.5) сходится при $\gamma c_1 \lambda < 1$; 4) $w(x, \lambda) > 0$ монотонно возрастает по каждому аргументу; 5) $\varphi(\lambda)$ монотонно возрастающая бесконечно дифференцируемая функция.

Из анализа решений двух краевых задач вытекает важное необходимое свойство согласованности дополнительной информации (1.10), (1.11) в ОЗ

$$u(1, 0) = f(0) = \int_0^1 \frac{d\xi}{g(\xi)} = \varphi(0) = w'(1, 0) \quad (2.9)$$

Из этого равенства вытекает ограничение на все возможные решения $g(x)$ в виде интегрального равенства $f(0) = \int_0^1 \frac{d\xi}{g(\xi)}$. Кроме того, в силу граничных условий $u(0, \lambda) = w(0, \lambda) = 0$ следует, что определить $r(0)$ не удастся с достаточной точностью, поэтому будем далее считать дополнительно, что известна величина $r(0) = r_0$.

Получим некоторые оценки решений на основе оценок ядер интегральных операторов в (1.12), (1.13) в $C[0, 1]$, учитывая описанные выше свойства положительности

$$\|u\|_{C[0,1]} = \max_{x \in [0,1]} \left| \int_0^x g^{-1}(\xi) d\xi + \lambda \int_0^x g^{-1}(\xi) d\xi \int_{\xi}^1 r(\eta) u(\eta, \lambda) d\eta \right| \leq d_0 + \lambda d_1 \|u\|_{C[0,1]}$$

откуда получим оценку $\|u\|_{C[0,1]} \leq d_0(1 - \lambda d_1)^{-1}$ для малых λ . Она может быть конкретизирована при наличии информации об ограничениях сверху и снизу для искомых функций следующим образом $\|u\|_{C[0,1]} \leq g^{-1}(1 - \lambda c)^{-1}$.

Аналогично имеем $\|w\|_{C[0,1]} \leq c_0 + \gamma\lambda c_1 \|w\|_{C[0,1]}$, откуда $\|w\|_{C[0,1]} \leq c_0(1 - \lambda\gamma c_1)^{-1}$, причем уточненная оценка дает $\|w\|_{C[0,1]} \leq \frac{1}{2}g^{-1}(1 - \lambda c/\alpha)^{-1}$.

2.3. *Формулировка канонических систем.* Сведем рассматриваемые краевые задачи к каноническим системам дифференциальных уравнений 1-го порядка. Введем компоненты вектора $X_1 = u$, $X_2 = gu'$. Тогда для продольных колебаний каноническая система имеет вид

$$X' = AX \quad A = \{a_{ij}\}, \quad a_{12} = g^{-1}(x), \quad a_{21} = -\lambda r(x) \quad (2.10)$$

с граничными условиями

$$X_1(0, \lambda) = 0, \quad X_2(1, \lambda) = 1 \quad (2.11)$$

Соответственно дополнительное условие в ОЗ имеет вид

$$X_1(1, \lambda) = f(\lambda) \quad (2.12)$$

Для задачи об изгибных колебаниях введем компоненты вектора

$$Y_1 = w, \quad Y_2 = w', \quad Y_3 = gw'', \quad Y_4 = (gw''')' \quad (2.13)$$

Тогда для изгибных колебаний каноническая система имеет вид

$$Y' = BY, \quad B = \{b_{ij}\}, \quad b_{12} = 1, \quad b_{23} = g^{-1}(x), \quad b_{34} = 1, \quad b_{41} = \gamma\lambda r(x) \quad (2.14)$$

с граничными условиями

$$Y_1(0, \lambda) = 0, \quad Y_2(0, \lambda) = 0, \quad Y_3(1, \lambda) = 1, \quad Y_4(1, \lambda) = 0 \quad (2.15)$$

Соответственно дополнительное условие для этой задачи имеет вид

$$Y_2(1, \lambda) = \varphi(\lambda) \quad (2.16)$$

Отметим, что все остальные элементы матриц A, B — нулевые.

2.4. *Слабая постановка задач.* В дальнейших рассуждениях важную роль играет слабая постановка. Введем для задачи 1 пробную функцию $v \in C^1[0,1]$, $v(0) = 0$. Умножая уравнение (1.6) на v , интегрируя по частям и используя соответствующие граничные условия, получим равенство

$$v(1, \lambda) = \int_0^1 g(\xi)u'(\xi, \lambda)v'(\xi, \lambda)d\xi - \lambda \int_0^1 r(\xi)u(\xi, \lambda)v(\xi, \lambda)d\xi \quad (2.17)$$

Если в (2.17) положить $v = u$, то получим нелинейное интегральное уравнение вида

$$f(\lambda) = \int_0^1 g(\xi)u'^2(\xi, \lambda)d\xi - \lambda \int_0^1 r(\xi)u^2(\xi, \lambda)d\xi, \quad \lambda \in [0, \lambda_1] \quad (2.18)$$

Аналогично для задачи 2 введем пробную функцию $z \in C^2[0,1]$, $z(0) = 0$, $z'(0) = 0$. Умножая уравнение (1.8) на z , интегрируя дважды по частям и используя соответствующие граничные условия, получим равенство

$$z'(1, \lambda) = \int_0^1 g(\xi)w''(\xi, \lambda)z''(\xi, \lambda)d\xi - \gamma\lambda \int_0^1 r(\xi)u(\xi, \lambda)z(\xi, \lambda)d\xi, \quad \lambda \in [0, \lambda_2]. \quad (2.19)$$

Полагая в этом равенстве $z = w$, получим следующее нелинейное интегральное уравнение

$$\varphi(\lambda) = \int_0^1 g(\xi)w''^2(\xi, \lambda)d\xi - \gamma\lambda \int_0^1 r(\xi)w^2(\xi, \lambda)d\xi, \quad \lambda \in [0, \lambda_2] \quad (2.20)$$

Равенства (2.18), (2.20) можно трактовать как систему нелинейных интегральных уравнений типа Урысона для нахождения функций g , r (при этом, конечно, считается, что можно по заданным g , r определить u , w , решая краевые задачи для канонических систем, либо систему интегральных уравнений).

3. Исследование единственности ОЗ. Важным вопросом для рассматриваемой проблемы является проблема единственности. Отметим, что вопрос о единственности восстановления двух функций для оператора теплопроводности обсуждался в литературе [11–13]; некоторые идеи могут быть использованы при анализе исследуемой ОЗ в совершенно иной ситуации. Изучим вопрос о единственности задачи об определении законов неоднородности при малых значениях λ , когда справедливы разложения (2.1) и (2.5). Пусть решение сформулированной ОЗ существует и задача (1.6)–(1.11) имеет два решения $g_1(x)$, $r_1(x)$, $u_1(x, \lambda)$, $w_1(x, \lambda)$ и $g_2(x)$, $r_2(x)$, $u_2(x, \lambda)$, $w_2(x, \lambda)$. Введем следующие обозначения $Z_1(x, \lambda) = u_1(x, \lambda) - u_2(x, \lambda)$, $Z_2(x, \lambda) = g_1(x)u_1'(x, \lambda) - g_2(x)u_2'(x, \lambda)$, $G(x) = g_1(x) - g_2(x)$, $R(x) = r_1(x) - r_2(x)$. Сформируем краевые задачи для каждого набора функций, вводя дополнительно вспомогательные функции и вектор $\mathbf{Z}(x, \lambda) = (Z_1(x, \lambda), Z_2(x, \lambda))$.

Тогда имеем для первой задачи

$$\mathbf{Z}' = A^{(1)}\mathbf{X}^{(1)} - A^{(2)}\mathbf{X}^{(2)} = A^{(1)}\mathbf{Z} + \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = (A^{(1)} - A^{(2)})\mathbf{X}^{(2)} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{Z}(1, \lambda) = 0, \quad Z_1(0, \lambda) = 0 \quad (3.2)$$

Для второй задачи введем

$$W_1(x, \lambda) = w_1(x, \lambda) - w_2(x, \lambda), \quad W_2(x, \lambda) = w_1'(x, \lambda) - w_2'(x, \lambda),$$

$$W_3(x, \lambda) = g_1(x)w_1''(x, \lambda) - g_1(x)w_2''(x, \lambda),$$

$$W_4(x, \lambda) = (g_1(x)w_1''(x, \lambda) - g_1(x)w_2''(x, \lambda))$$

Операторное уравнение имеет вид (3.3) для вектора

$$\mathbf{W}(x, \lambda) = (W_1(x, \lambda), W_2(x, \lambda), W_3(x, \lambda), W_4(x, \lambda))$$

$$\mathbf{W}'(x, \lambda) = B^{(1)}\mathbf{W}(x, \lambda) + \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = (B^{(1)} - B^{(2)})\mathbf{W}^{(2)} \quad (3.3)$$

$$W_1(0, \lambda) = W_2(0, \lambda) = 0, \quad W_2(1, \lambda) = W_3(1, \lambda) = W_4(1, \lambda) = 0 \quad (3.4)$$

Введем в рассмотрение подмножество функций $M^* \subset M$, состоящих из ограниченных функций $y(\xi)$, определенных на отрезке $[0, 1]$, разность любых двух из них $s(\xi) = y_1(\xi) - y_2(\xi)$ обладает следующим свойством. Отрезок $[0, 1]$ может быть разбит на конечное число отрезков первого или второго типа, причем отрезком первого типа называется такой, на котором $s(\xi) = 0$, а отрезком второго типа назовем такой, на котором $s(\xi)$ знакопостоянна. Отметим, что наиболее простыми представителями классов таких функций являются полиномы, кусочно-постоянные функции и тригонометрические полиномы. Для определенности и простоты рассуждений будем считать, что число отрезков разбиения не более m . Соответственно, предположим далее при исследовании единственности, что искомые функции $g, r \in M^*$. Для каждой из функций g, r осуществим соответствующее разбиение; отрезки разбиения могут не совпадать. Построим объединение таких отрезков, их будет не более $2m$, обозначим их Δ_j , соответственно $\cup \Delta_j = [0, 1]$. В этом случае правые части операторных уравнений (3.1) и (3.3) представимы в виде конечных сумм

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}^{(j)}, \quad \mathbf{H} = \sum \mathbf{H}^{(j)}$$

где носитель соответствующей функции локализован на отрезке Δ_j . В силу линейности этих уравнений можно отыскивать решение краевых в виде сумм

$$\mathbf{Z} = \sum \mathbf{Z}^{(j)}, \quad \mathbf{W} = \sum \mathbf{W}^{(j)}$$

и для каждого из векторов $\mathbf{Z}^{(j)}$, $\mathbf{W}^{(j)}$ получим аналогичную краевую задачу. Осуществим следующее построение. Используя условие ортогональности [10], интегрируя по частям и используя граничные условия, получим систему интегральных уравнений Фредгольма первого рода

$$\begin{aligned} \int_0^1 G_j(\xi) K_{11}(\xi, \lambda) d\xi - \lambda \int_0^1 R_j(\xi) K_{12}(\xi, \lambda) d\xi &= 0 \\ \int_0^1 G_j(\xi) K_{21}(\xi, \lambda) d\xi - \gamma \lambda \int_0^1 R_j(\xi) K_{22}(\xi, \lambda) d\xi &= 0, \quad \lambda \in [0, \lambda_*] \end{aligned} \quad (3.5)$$

где λ_* таково, что выполняется неравенство $1 - \lambda_* c / \alpha > 0$, $\alpha = 4/\gamma < 1$, $c = r_+ g_-^{-1}/2$. Отметим, что ядра интегральных операторов неотрицательны в этом диапазоне, представимы в форме

$$\begin{aligned} K_{11}(\xi, \lambda) &= u_1'(\xi, \lambda) u_2'(\xi, \lambda), & K_{12}(\xi, \lambda) &= u_1(\xi, \lambda) u_2(\xi, \lambda) \\ K_{21}(\xi, \lambda) &= w_1''(\xi, \lambda) w_2''(\xi, \lambda), & K_{22}(\xi, \lambda) &= w_1(\xi, \lambda) w_2(\xi, \lambda) \end{aligned} \quad (3.6)$$

и обладают следующими свойствами $K_{12}(0, \lambda) = K_{22}(0, \lambda) = K_{22}'(0, \lambda) = 0$.

Рассмотрим последовательно различные ситуации. Каждый из отрезков разбиения для искомых функций является либо отрезком первого типа, либо второго.

1. Пусть Δ_j отрезок первого типа для обеих функций. Тогда правые части соответствующих краевых задач для $\mathbf{Z}^{(j)}$, $\mathbf{W}^{(j)}$ равны нулю, в силу единственности решения прямых задач для нерезонансных диапазонов имеется только нулевое решение для однородных задач и единственность доказана.

2. Пусть Δ_j отрезок первого типа для одной функции и второго для другой (для определенности положим, что внутри отрезка Δ_j $G_j > 0$, $R_j = 0$). Тогда получим из (3.5) $\int_0^1 G_j(\xi) K_{11}(\xi, \lambda) d\xi = 0$, что противоречит положительности интеграла, и утверждение доказано.

3. Пусть Δ_j отрезок второго типа для обеих функций. Здесь надо рассмотреть два случая, когда внутри отрезка Δ_j а) $G_j R_j < 0$ и б) $G_j R_j > 0$

В случае варианта а) подынтегральные функции в ИУ (3.5) положительны, а сумма интегралов равна нулю; приходим к противоречию, которое и доказывает единственность.

Рассмотрим теперь детально вариант б). Из (3.5) имеем равенства

$$\begin{aligned} \int_0^1 G_j(\xi) u_1'(\xi, \lambda) u_2'(\xi, \lambda) d\xi &= \lambda \int_0^1 R_j(\xi) u_1(\xi, \lambda) u_2(\xi, \lambda) d\xi \\ \int_0^1 G_j(\xi) K_{21}(\xi, \lambda) d\xi &= \gamma \lambda \int_0^1 R_j(\xi) K_{22}(\xi, \lambda) d\xi \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для определенности будем считать, что внутри отрезка Δ_j $G_j > 0$, $R_j > 0$. Используя (3.7), построим следующие оценки левых и правых частей. Для оценки снизу используем свойства решений прямой задачи и неравенства

$$\begin{aligned} u(x, \lambda) &\geq u(x, 0) = \int_0^x \frac{d\xi}{g(\xi)} \geq \frac{x}{g_+} \\ w(x, \lambda) &\geq w(x, 0) = \int_0^x \frac{(x - \xi)}{g(\xi)} d\xi \geq \frac{x^2}{2g_+} \end{aligned} \quad (3.8)$$

откуда имеем следующую оценку левых частей в (3.7)

$$\int_0^1 G_j(\xi) u_1'(\xi, \lambda) u_2'(\xi, \lambda) d\xi \geq g_+^{-2} p_j \quad \text{и} \quad \int_0^1 G_j(\xi) w_1''(\xi, \lambda) w_2''(\xi, \lambda) d\xi \geq g_+^{-2} p_j, \quad p_j = \int_0^1 G_j(\xi) d\xi$$

Правые части оцениваются сверху с учетом оценок в 2.2

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^1 R_j(\xi) u_1(\xi, \lambda) u_2(\xi, \lambda) d\xi &\leq \lambda \max R_j |u_1(\xi, \lambda) u_2(\xi, \lambda)| \leq \\ &\leq \lambda \max R_j g_-^{-2} (1 - \lambda c)^{-2} \\ \gamma \lambda \int_0^1 R_j(\xi) w_1(\xi, \lambda) w_2(\xi, \lambda) d\xi &\leq \gamma \lambda \max R_j |w_1(\xi, \lambda) w_2(\xi, \lambda)| \leq \\ &\leq \gamma \lambda \max R_j g_-^{-2} (1 - \lambda c/\alpha)^{-2} / 4 \end{aligned}$$

Исходя из полученных оценок, получим систему неравенств

$$\begin{aligned} p_j^* (1 - \lambda c)^2 &\leq \lambda R_{j0} \\ \alpha p_j^* (1 - \lambda c/\alpha)^2 &\leq \lambda R_{j0}, \quad p_j^* = p_j g_+^{-2} g_-^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Исходя из постановки задачи, эти неравенства должны выполняться при всех $\lambda \in [0, \lambda_*]$. Отметим, что $p_j^* > 0$ и (3.9) приводит к неравенству $((1 - \lambda c)^2 - \lambda t)(\alpha(1 - \lambda c/\alpha)^2 - \lambda t) \geq 0$, $t = p_j^{*-1} R_{j0} > 0$. Вместе с тем легко доказать противоположное неравенство $((1 - \lambda c)^2 - \lambda t)(\alpha(1 - \lambda c/\alpha)^2 - \lambda t) \leq 0$, которое вытекает из неравенства $\alpha(1 - \lambda c/\alpha)^2 \leq (1 - \lambda c)^2$, справедливого для $0 < \lambda < \alpha/c$. Отсюда следует, что выполнение (3.9) возможно лишь при $p_j = R_{j0} = 0$, что и доказывает единственность решения задачи в этом случае. Таким образом, единственность установлена.

4. Нахождение начального приближения и формулировка итерационного процесса. Отметим, что сформулированная ОЗ нелинейна и одним из методов построения решения является формирование итерационного процесса. Способы его построения на основе метода линеаризации достаточно хорошо разработаны на примере ОЗ для одной функции [1]; в настоящем исследовании приведем вид операторных уравнений, которые вытекают из построенных ранее схем для общих коэффициентных ОЗ в теории упругости. Кратко схема выглядит следующим образом. Формируется некоторое начальное приближение (в качестве такового можно, например, выбрать те постоянные значения, которые фигурируют в ограничениях, можно выбирать средневзвешенные таким образом, чтобы удовлетворялось интегральное условие на податливость). Обычно такие начальные приближения выбираются среди функций простой структуры — постоянных или линейных из условия минимума функционала невязки на компактном множестве. Далее решается прямая задача для выбранного начального приближения, находится соответствующая АЧХ. На основе сравнения найденной и за-

данной функции формируется система операторных уравнений для поправок, которая легко получается из слабой постановки.

Введем последовательность функций

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} + \Delta u_n, & w_n &= w_{n-1} + \Delta w_n, \\ g_n &= g_{n-1} + \Delta g_n, & r_n &= r_{n-1} + \Delta r_n, \quad n = 1, 2 \dots \end{aligned}$$

Если известны приближения порядка $n - 1$, то стандартным образом согласно [10] из условий разрешимости или из слабой постановки получается следующая система интегральных уравнений Фредгольма первого рода с непрерывными ядрами для поправок на n -той итерации

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Delta g_n(\xi) u_{n-1}'^2(\xi, \lambda) d\xi - \lambda \int_0^1 \Delta r_n(\xi) u_{n-1}^2(\xi, \lambda) d\xi &= -(f(\lambda) - f_{n-1}(\lambda)), \quad \lambda \in [0, \lambda_1] \quad (4.1) \\ \int_0^1 \Delta g_n(\xi) w_{n-1}''(\xi, \lambda) d\xi - \gamma \lambda \int_0^1 \Delta r_n(\xi) w_{n-1}^2(\xi, \lambda) d\xi &= (\varphi(\lambda) - \varphi_{n-1}(\lambda)), \quad \lambda \in [0, \lambda_2] \end{aligned}$$

Система (4.1) решается на основе метода регуляризации А.Н. Тихонова, итерационный процесс останавливается при достижении определенного значения функционала невязки или по достижении некоторого числа итераций.

5. Вычислительные эксперименты. Проведена серия вычислительных экспериментов по оценке степени эффективности предложенных численных схем. Во-первых, проведено сравнение эффективности точности квадратурных формул. Отмечено, что применение квадратурных формул более высокого порядка значительно повышают точность решения ОЗ в условиях, когда информация об амплитудно-частотных характеристиках задана в нескольких точках. Результаты апробированы на монотонных (убывающих, возрастающих) и немонотонных функциях, причем результаты восстановления при задании АЧХ в 3 и 11 точках различаются мало (частотный диапазон выбран до первого резонанса).

Результаты построения АЧХ для функций $g(x) = 1 + 0.4x^2$, $r(x) = 1 - 0.4x^2$ представлены ниже.

Проведен ряд вычислительных экспериментов по реконструкции двух функций.

1. Возрастающие функции $g(x) = 0.9 + 0.4x^2$, $r(x) = 0.9 + 0.4x^3$ с начальным приближением $g_0(x) = 1.033$, $r_0(x) = 1$ при следующих значениях параметров

$$\begin{aligned} N_x &= 20, & M_{1к} &= 10, & c_1 &= 1.1, & d_1 &= 1.3 \\ M_{2к} &= 10, & c_2 &= 0.05, & d_2 &= 0.25 \end{aligned}$$

На рис. 2 изображены точные функции (сплошная линия), результат восстановления после 28 итераций (тире) и после 53 итераций (точки). Рисунок справа демонстрирует изменение функционала невязки с ростом итераций.

2. Убывающие функции $g(x) = 1 - 0.4x^2$, $r(x) = 1 - 0.4x^3$ при выборе начального приближения $g_0(x) = 0.866$, $r_0(x) = 0.9$.

На рис. 3. изображены точные функции (сплошная линия), результат после 29 итераций (тире), после 59 итераций (точки); график справа демонстрирует изменение функционала невязки в зависимости от числа итераций.

3. Немонотонные функции $g(x) = r(x) = 1 + 0.2 \cos(2\pi x)$ с выбором начального приближения вида $g_0(x) = r_0(x) = 1$

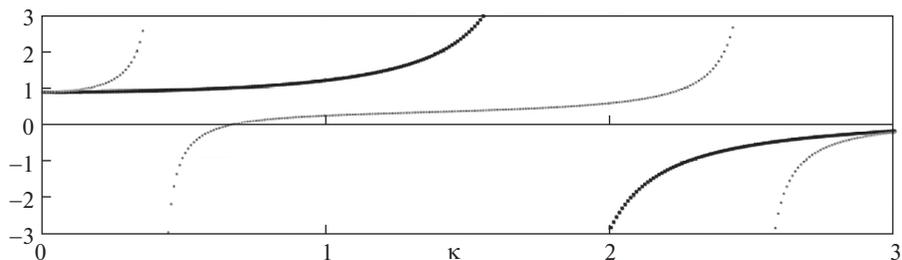


Рис. 1. АЧХ задач: 1. продольные колебания (черный цвет) 2. изгибные колебания (серый цвет)

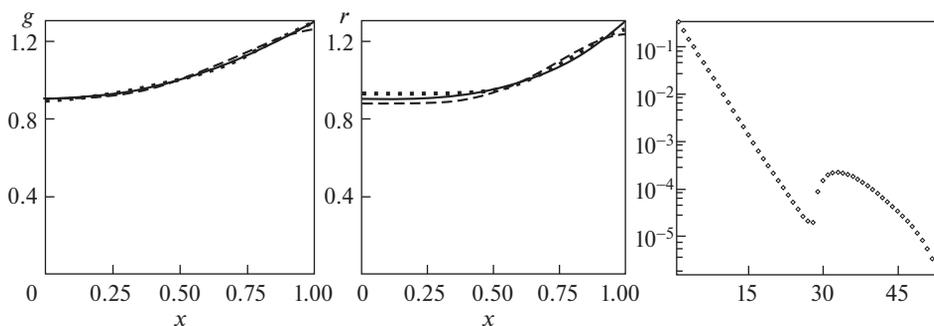


Рис. 2. Результаты восстановления и невязка в зависимости от числа итераций

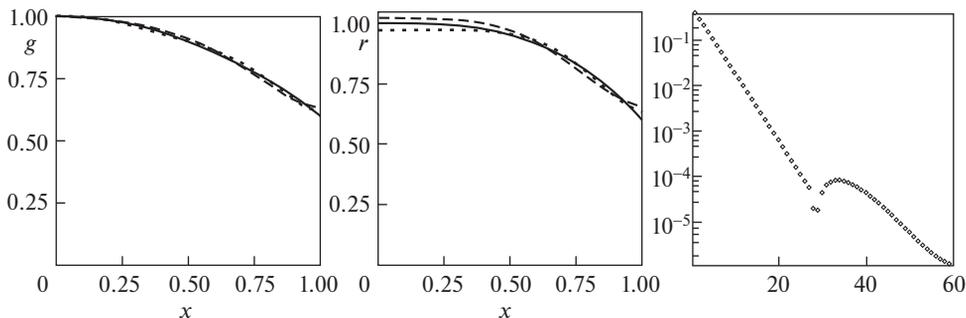


Рис. 3. Результаты восстановления и невязка в зависимости от числа итераций

На рис. 4 изображены точные функции (сплошная линия), результат итерационного восстановления после 31 итерации (точки). Правый график демонстрирует изменение невязки на итерациях. Недостаточная точность восстановления функции $r(x)$ при малых значениях аргумента связана с тем, что значение $r(0)$ не задавалось априори. В тех вычислительных экспериментах, в которых такая информация задавалась, результаты реконструкции плотности значительно лучше.

Заключение. Обсуждены вопросы нахождения двух переменных характеристик неоднородного упругого стержня — плотности и модуля Юнга, проведено исследование

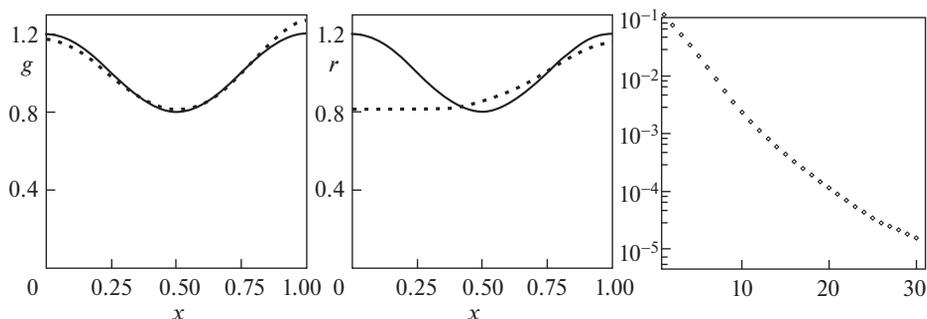


Рис. 4. Результаты восстановления и невязка в зависимости от числа итераций

единственности решения, представлены способ формирования итерационных процессов и результаты вычислительных экспериментов для различных типов функций-возрастающих, убывающих, немонотонных.

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ № 075-15-2019-1928.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ватульян А.О. Коэффициентные обратные задачи механики. М.: Физматлит, 2019. 272 с.
2. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
3. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
4. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007. 384 с.
5. Глэдвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. М.—Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2008. 608 с.
6. Ватульян А.О., Бочарова О.В. О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // Акустический журнал. 2009. Т. 55. № 3. С. 275–282.
7. Ватульян А.О. Интегральные уравнения в обратных задачах определения коэффициентов дифференциальных операторов теории упругости // Доклады РАН. 2005. Т. 405. № 3. С. 343–345.
8. Perkowski Z., Czabak M. Description of behaviour of timber-concrete composite beams including interlayer slip, uplift, and long-term effects: Formulation of the model and coefficient inverse problem // Eng. Struct. 2019. V. 194. P. 230–250.
9. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 230 с.
10. Найфе А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 536 с.
11. Гласко В.Б., Осколков И.Н. О регуляризации задачи термодефектоскопии // ЖВММФ. 1994. Т. 34. № 6. С. 926–935.
12. Денисов А.М. Единственность решения некоторых обратных задач для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянными коэффициентами // ЖВММФ. 1982. Т. 22. № 4. С. 858–864.
13. Музылёв Н.В. Теоремы единственности для некоторых обратных задач теплопроводности // ЖВММФ. 1980. Т. 20. № 2. С. 388–400.