

УДК 534.113

## ИЗГИБ И УСТОЙЧИВОСТЬ КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДАВЛЕНИЯ НА ЕГО ПОВЕРХНОСТИ И ПРОДОЛЬНОЙ СИЛЫ

© 2021 г. М. А. Ильгамов<sup>a,b,c,\*</sup>

<sup>a</sup> Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

<sup>b</sup> Институт механики УФИЦ РАН, Уфа, Россия

<sup>c</sup> Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

\* e-mail: [ilgamov@anrb.ru](mailto:ilgamov@anrb.ru)

Поступила в редакцию 23.08.2020 г.

После доработки 04.09.2020 г.

Принята к публикации 29.10.2020 г.

Линейный изгиб консольного стержня, находящегося под всесторонним давлением и продольной силой, рассматривается в статической и динамической постановках. Учитывается поперечная распределенная сила на стержень, возникающая при изгибе в результате образования разности площадей выпуклой и вогнутой частей поверхности. Сжимающая сила может быть неизменного направления и изменяющейся при изгибе. В частности следящая сила образуется в результате действия давления на концевое сечение стержня. Дается сравнение с классической задачей об устойчивости. Изучены особенности одновременного действия сил неизменного и изменяющегося направлений.

*Ключевые слова:* стержень, давление, продольная сила, изгиб, устойчивость

DOI: 10.31857/S0572329921040061

**1. Введение.** Как известно, устойчивость прямолинейной формы консольного стержня зависит от поведения продольной сжимающей силы. Имеется качественная разница в задаче его устойчивости при сжимающих силах неизменного направления и с поворотом направления в соответствии с ориентацией концевого поперечного сечения. “Е.Л. Николаи был, по всей вероятности, первым, кто рассмотрел задачу об устойчивости упругой системы, нагруженной следящими силами .... В работе 1928 г. [1] исследуется устойчивость прямолинейной формы гибкого стержня, один конец которого зашпелен, а другой – нагружен сжимающей силой .... Было установлено, что не существует никаких иных форм равновесия, кроме прямолинейной” – так начинается глава об устойчивости равновесия упругих систем при наличии следящих сил в книге [2]. В ней и в [3] излагается история этой задачи и ее особенности. К первым исследованиям в этом направлении относятся работы [4–6]. Динамический подход к задаче был предложен в [1–3] и далее развит в [7] и в последующих работах.

В уравнении изгибного движения стержня в одной из главных плоскостей инерции

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \quad (1.1)$$

$x, t$  — продольная координата и время,  $F, D, \rho$  — площадь поперечного сечения, изгибная жесткость, плотность материала,  $P, q$  — продольная сжимающая сила и поперечная распределенная сила,  $w$  — прогиб. В статической постановке задачи из (1.1) и соответствующих граничных условий получается, что ни при каких значениях сжимающей следящей силы  $P$  не существует криволинейных форм равновесия стержня. Рассмотрение задачи в динамической постановке дает значение критической следящей силы стержня [2, 3]

$$P_* \approx 2\pi^2 D/L^2 \quad (1.2)$$

что в восемь раз выше, чем статическая критическая сила неизменного направления. При достижении значения силы (1.2) стержень совершает неограниченно возрастающие изгибные колебания. Во всех указанных работах сжимающая сила  $P$  считается постоянной или медленно возрастающей. В них не рассматривается влияние боковой силы  $q$  на стержень, зависящей от его изгиба.

Начиная с обобщающих работ по теории тонких пластин и оболочек [8, 9] до недавней монографии [10] поперечная распределенная сила принимается равной  $q = p_1 - p_2$ , где  $p_1$  и  $p_2$  — избыточные давления на поверхности, перпендикулярные плоскости изгиба. Эти давления  $p_1$  и  $p_2$  положительны, если общее давление превышает атмосферное давление  $p_0$ , отрицательны при меньшем значении общего давления, чем  $p_0$ . Учет разности площадей выпуклой и вогнутой поверхностей, появляющейся при изгибе стержня и цилиндрическом изгибе пластины, приводит к выражению [11, 12]

$$q = p_1 - p_2 + p_m F \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad p_m = \frac{p_1 + p_2}{2} \quad (1.3)$$

Распределенная поперечная сила  $p_m F (\partial^2 w / \partial x^2)$  при  $p_m > 0$  направлена в сторону вогнутости, при  $p_m < 0$  (вакуумирование) — в сторону выпуклости. Из (1.1), (1.3) при  $p_1 = p_2$  ( $p_m = p$ ) и условиях свободного опирания обоих концов стержня следует статическое критическое значение [13, 14]

$$(P - pF)_* = \pi^2 D/L^2 \quad (1.4)$$

Таким образом, окружающее давление в этом примере приводит к увеличению критического значения сжимающей силы. При вакуумировании ( $p < 0$ ) происходит его уменьшение. Это увеличение объясняется тем, что поперечная распределенная сила  $q$  (при  $p > 0$ ) стремится уменьшить прогиб (рис. 1, а). Происходит увеличение эффективной изгибной жесткости. Если сила  $P$  возникает в результате действия давления  $p$  на торцевое сечение площадью  $F$  ( $P = pF$ ), то стержень не теряет устойчивости прямолинейной формы. Этот результат, следующий из простейшей теории изгиба, согласуется с выводом об устойчивости упругой полосы под всесторонним давлением, полученным впервые в [15] исходя из соотношений теории упругости. Устойчивость стержня при гидростатическом давлении рассмотрена в [13]. Соответствующий обзор работ в этом направлении содержится в [14]. Поведение вращающегося консольного вала, находящегося под переменным по длине давлением, изучено в [16], а динамика трубчатого консольного стержня с истекающей жидкостью — в [17].

Насколько известно, влияние давления на боковую поверхность консольного стержня до сих пор изучено недостаточно. В данной статье рассматривается статическая и динамическая устойчивость консольного стержня в случае, когда кроме давле-

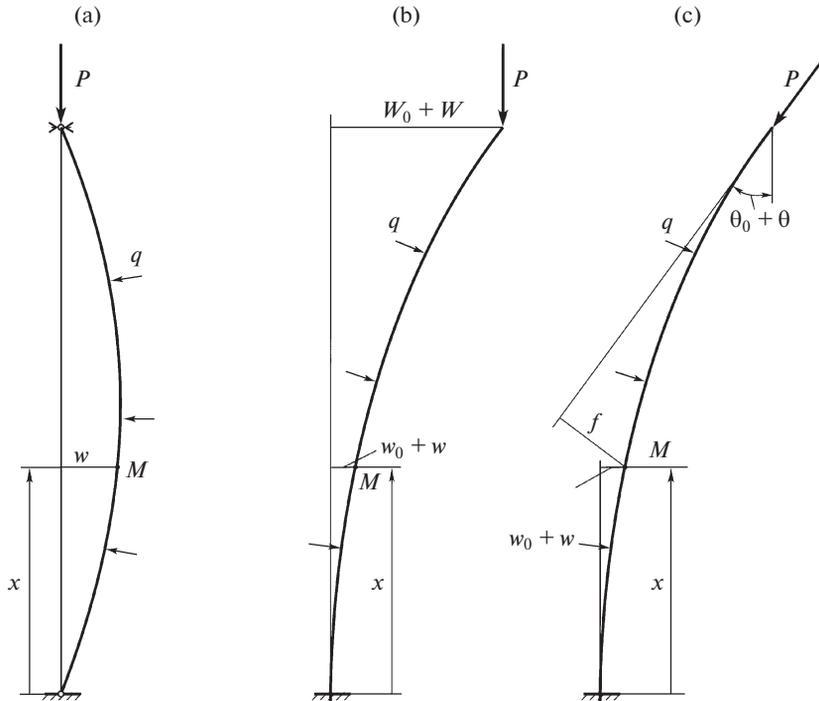


Рис. 1. Схема нагружения стержня

ния на его поверхность действует сжимающая сила неизменного направления или следящая сила.

**2. Постановка задачи.** Линейная задача о продольном изгибе консольного стержня под действием сжимающей силы рассматривается в случае всестороннего давления на его боковую поверхность. Сечение его имеет форму круга или прямоугольника. Собственный вес стержня не учитывается. За начальное принимается некоторое отклоненное от прямой состояние, определяемое прогибом  $w_0(x)$ . Предполагается, что в начальном состоянии под атмосферным давлением  $p_0$ , действующим на боковую поверхность и концевое сечение стержня, отсутствуют напряжения. Избыточное давление  $p$  является равномерным по всей поверхности стержня и не зависит от его деформации, на концевое сечение стержня  $p$  не действует. Таким образом, в выражении (1.3)  $p_1 = p_2 = p$ . Тогда распределенная поперечная сила в соответствии с (1.3) и с учетом начального прогиба  $w_0$  равна

$$q = pF \frac{\partial^2(w_0 + w)}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

и при  $p > 0$  направлена в сторону вогнутости, так как площадь вогнутой стороны меньше площади выпуклой стороны поверхности стержня.

Рассматриваются случаи сжимающей силы неизменного направления (рис. 1, b) и следящей силы (рис. 1, c). В первом случае вертикально направленная сила  $P$  создает изгибающий момент  $P(W_0 + W - w_0 - w)$  относительно точки  $M$  с направлением по часовой стрелке. Здесь  $W_0, W$  – начальное и текущее перемещение конца  $x = L$ . Так же

направлен изгибающий момент от распределенной силы  $q$  (2.1) на длине  $L - x$  относительно точки  $M$ . Поэтому вместо коэффициента  $P$  во втором члене уравнения (1.1) принимаем  $P + pF$  (при таком рассуждении правая часть (1.1) равна нулю). Кроме того, вертикально направленная сила  $P$  дает на  $x = L$  перерезывающую силу  $P\sin(\theta_0 + \theta) \approx \approx P(\theta_0 + \theta) = P(\partial(w_0 + w)/\partial x)$  (рис. 1, b). Она равна внутренней перерезывающей силе  $D\partial^3 w/\partial x^3$ . Уравнение (1.1) с учетом сказанного запишем в виде

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \gamma^2 \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\omega^2 \partial t^2} = 0 \quad (2.2)$$

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \alpha^2 = \frac{pFL^2}{D}, \quad \beta^2 = \frac{PL^2}{D}, \quad \omega^2 = \frac{D}{\rho FL^4}, \quad \gamma^2 = \beta^2 - \alpha^2$$

Безразмерный параметр  $\alpha$  характеризует влияние давления окружающей среды на изгиб стержня. Для прямоугольного и кругового поперечных сечений

$$\alpha^2 = 12 \frac{p}{E} \left(\frac{L}{h}\right)^2, \quad \alpha^2 = 16 \frac{p}{E} \left(\frac{L}{d}\right)^2 \quad (2.3)$$

где  $h, d$  – толщина и диаметр. Параметр  $\beta$  характеризует влияние сжимающей силы на изгиб.

Граничные условия имеют вид

$$w = 0 \quad (\xi=0), \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \quad (\xi=0) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \quad (\xi = 1), \quad \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} = -\beta^2 \frac{\partial (w_0 + w)}{\partial \xi} \quad (\xi = 1)$$

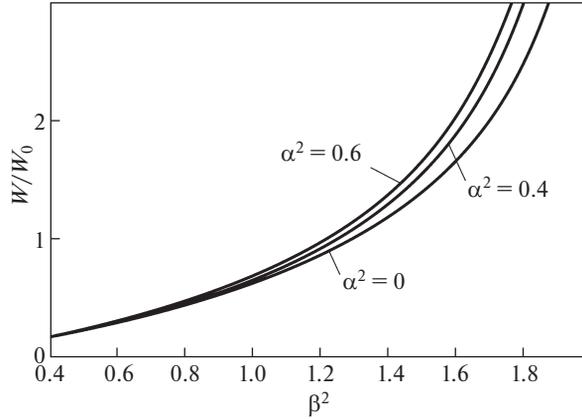
Если как обычно не учитывать поперечную силу  $q$  (2.1) от всестороннего давления на боковую поверхность стержня, то в уравнении (2.2) будет  $\gamma = \beta$ .

В случае следящей силы (рис. 1, c) изгибающий момент равен  $-Pf$ , где расстояние  $f = w/\cos(\theta_0 + \theta) + [L - x - (w_0 + w)\text{tg}(\theta_0 + \theta)] \approx w + L - x$ . Приравнявая  $-P(w + L - x)$  внутреннему изгибающему моменту  $D\partial^2 w/\partial x^2$  и продифференцировав по  $x$  это равенство два раза и с учетом инерционной силы, получаем уравнение (1.1). Так же как в предыдущем случае поведения силы  $P$  выражение изгибающего момента имеет переменный по  $x$  член  $-P(w_0 + w)$ . Направление изгибающего момента от распределенной силы  $q$  не меняется. Поэтому в (1.1) вместо коэффициента  $P$  имеем  $P - pF$ . Следовательно, в уравнении (2.2) будет тот же коэффициент  $\gamma^2 = \beta^2 - \alpha^2$ . При этом на конце  $x = L$  изгибающий момент и перерезывающая сила равны нулю. Поэтому граничные условия (2.4) сохраняют свой вид за исключением последнего условия, где необходимо положить правую часть равной нулю.

В некоторых работах (например, в [2, 3]) вместо последних двух условий (2.4) ставятся кинематические уравнения:  $w(1) = W, (dw/d\xi)_{\xi=1} = \Phi$ , где  $W, \Phi$  – отклонение и угол поворота нагруженного конца стержня.

**3. Сжимающая сила неизменного направления.** Для простоты примем функцию начального отклонения в виде

$$w_0 = W_0 \xi \quad (3.1)$$



**Рис. 2.** Зависимость относительного прогиба верхнего торца стержня  $W/W_0$  от безразмерного параметра сжимающей нагрузки неизменного направления  $\beta^2$

Тогда в статической постановке уравнение (2.2) имеет решения

$$\begin{aligned} w &= C_0 + C_1\xi + C_2 \sin \gamma\xi + C_3 \cos \gamma\xi \quad (\gamma^2 = \beta^2 - \alpha^2 > 0) \\ w &= C_0 + C_1\xi + C_2 \operatorname{sh}\gamma\xi + C_3 \operatorname{ch}\gamma\xi \quad (\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 > 0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Определив константы первого решения (3.2) по условиям (2.4), находим

$$\frac{w}{W_0} = \frac{\beta^2 (\sin \gamma - \gamma\xi \cos \gamma - \sin \gamma(1 - \xi))}{\gamma(\beta^2 \cos \gamma - \alpha^2)} \quad (3.3)$$

Дополнительный прогиб верхней точки ( $\xi = 1, w = W$ ) равен

$$\frac{W}{W_0} = \frac{\beta^2 (\sin \gamma - \gamma \cos \gamma)}{\gamma(\beta^2 \cos \gamma - \alpha^2)} \quad (3.4)$$

В отсутствии избыточного давления ( $\alpha = 0, \gamma = \beta$ ) из (3.4) следует

$$\frac{W}{W_0} = \frac{1}{\beta} \operatorname{tg} \beta - 1 \quad (3.5)$$

С возрастанием параметра нагрузки  $\beta$  прогиб увеличивается. При  $\beta = \pi/2$  решение (3.5) неограниченно возрастает. Это дает известное критическое значение сжимающей силы [1–3]

$$P_* = \frac{\pi^2 D}{4L^2} \quad (3.6)$$

Изменение отношения  $W/W_0$  по  $\beta^2$  при заданных значениях  $\alpha^2$  по формуле (3.4) показано на рис. 2. Как видно, чем больше  $\alpha^2$  (давление  $p$ ), тем быстрее возрастает прогиб при увеличении  $\beta^2$  (сжимающей силы). Критическое значение параметра  $\beta^2$  определяется из уравнения

$$\cos \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} = \alpha^2 / \beta^2 \quad (3.7)$$

На рис. 3 сплошной линией приведена зависимость  $\beta^2(\alpha^2)$  по (3.7).

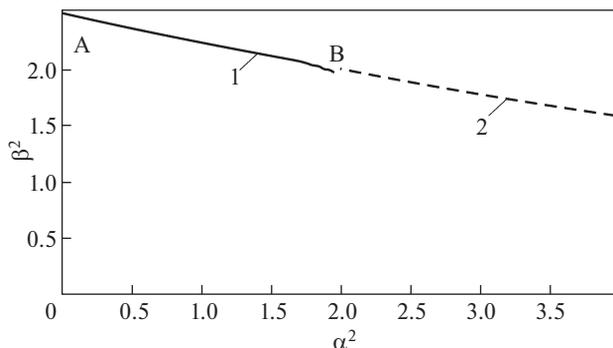


Рис. 3. Взаимная зависимость безразмерных параметров давления  $\alpha^2$  и сжимающей нагрузки  $\beta^2$

При малых значениях  $\alpha^2$  по сравнению с  $(\pi/2)^2$  приняв  $\beta^2 = (\pi/2)^2 - \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll (\pi/2)^2$  и учитывая  $\cos\sqrt{(\pi/2)^2 - \varepsilon - \alpha^2} \approx \sin((\alpha^2 + \varepsilon)/\pi) \approx (\alpha^2 + \varepsilon)/\pi$ , получаем уравнение  $\varepsilon^2 - (\pi/2)^2\varepsilon + \pi(4 - \pi)(\alpha/2)^2 = 0$ , откуда определяются

$$\varepsilon \approx \frac{\pi(4 - \pi)\alpha^2}{\pi^2 - 4\alpha^2}, \quad \beta_*^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi(4 - \pi)\alpha^2}{\pi^2 - 4\alpha^2} \quad (3.8)$$

В этом случае вместо (3.6) критическое значение сжимающей силы равно

$$P_* = \beta_*^2 D / L^2 \quad (3.9)$$

При  $\alpha^2 = \beta^2$  уравнение (2.2)  $d^4 w / d\xi^4 = 0$  рассматривается совместно с условиями (2.4), которые остаются без изменения. Константы решения

$$w = C_0 + C_1 \xi + C_2 \xi^2 + C_3 \xi^3$$

этого уравнения равны  $C_0 = 0$ ,  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = -3$ ,  $C_3 = W_0 \beta^2 / (2 - \beta^2)$ . Дополнительный прогиб

$$\frac{w}{W_0} = \frac{\beta^2}{2 - \beta^2} \left( \xi^2 - \frac{\xi^3}{3} \right) \quad (3.10)$$

плавно возрастает при увеличении  $\beta^2$ . Критическое значение его равно 2. Соответствующая сила равна

$$P_* = 2D / L^2 \quad (3.11)$$

Это предельное уменьшение силы  $P_*$  из-за действия бокового избыточного давления при  $\beta > \alpha$ . На рис. 3 значению (3.11) соответствует точка В. Таким образом, при повышении избыточного давления  $p$  и соответствующего параметра  $\alpha^2$  от нуля до  $\alpha^2 = 2$  параметр  $\beta^2$  снижается от  $(\pi/2)^2$  (точка А) до 2 (точка В). Соответствующие значения  $P_*$  даются формулами (3.6) и (3.11).

Критическое значение избыточного давления  $p_*$  для стального стержня круглого сечения ( $\alpha^2 = 2$ ,  $E = 2 \times 10^5$  МПа,  $L/d = 200$ ) в соответствии с (2.3) равно  $p_* = 2.5$  МПа (25 атм).

Так как  $p$  представляет собой избыточное давление, то вакуумированию соответствуют отрицательные значения параметра  $\alpha^2$  в уравнениях (3.7), (3.8). При этом абсолютное значение отрицательного давления  $p$  должно быть меньше атмосферного давления  $p_0$ . Другое ограничение состоит в неравенстве  $P > |p|F$  ( $\beta^2 > |\alpha^2|$ ,  $\gamma^2 > 0$ ). Тогда справедливыми остаются первое решение (3.1) и последующие выражения.

При  $\alpha = 0$ ,  $\gamma = \beta$  имеем те же результаты (3.5), (3.6). Как видно из рис. 3, при  $\alpha^2 < 0$  критическое значение сжимающей силы  $P_*$  возрастает. Этот эффект объясняется тем, что при  $p < 0$  направление распределенной поперечной силы  $q$  (2.1) меняет знак. Теперь она направлена в сторону выпуклости.

Удовлетворение второго решения (3.2) при начальном прогибе (3.1) условиям (2.4) дает

$$\frac{w}{W_0} = \frac{\beta^2 (\text{sh}\gamma - \gamma \xi \text{ch}\gamma - \text{sh}\gamma(1 - \xi))}{\gamma(\beta^2 \text{ch}\gamma - \alpha^2)} \quad (3.12)$$

Следующее из (3.12) уравнение устойчивости представим в двух видах

$$\alpha^2 - \beta^2 \text{ch}\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = 0, \quad \gamma^2 - \beta^2 (\text{ch}\gamma - 1) = 0 \quad (3.13)$$

Первый из них является аналогом уравнения (3.7) и может быть анализирован, как (3.7). В частности, можно вывести приближенное соотношение  $\beta^2(\alpha^2)$  при малом отклонении  $\beta^2$  от 2 (точка В на рис. 3). В этом случае надо принять  $\beta^2 = 2 - \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 2$ .

Второй вид (3.13) предпочтительнее в том отношении, что можно задаваться значением  $\gamma$  и находить  $\beta^2$ . После этого определяется соответствующее значение  $\alpha^2 = \gamma^2 + \beta^2$ . Так построена часть кривой правее точки В на рис. 3. При значениях  $\alpha^2$  и  $\beta^2$ , не сильно отличающихся от 2 (точка В), и соответственно  $\gamma \leq 2$ , используя разложение  $\text{ch}\gamma = 1 + (\gamma^2/2) + (\gamma^4/24)$ , из второго уравнения (3.13) получаем явные связи

$$\beta^2 = \frac{24}{12 + \gamma^2}, \quad \alpha^2 = 12 \left( \frac{2}{\beta^2} - 1 \right) + \beta^2 \quad (3.14)$$

Пусть  $\gamma = 1$ , тогда по (3.14)  $\beta^2 = 24/13$ ,  $\alpha^2 = 37/13$ . Эти приближенные значения практически не отличаются от данных по точным уравнениям (3.13). Критические значения сжимающей силы и избыточного давления равны

$$P_* = \frac{24D}{13L^2}, \quad p_* = \frac{37D}{13L^2} \quad (3.15)$$

На рис. 3 построена штриховая кривая по (3.14). Участок А – В соответствует преобладающей сжимающей силе, участок правее точки В – преобладающему давлению.

**4. Сжимающая следящая сила.** Решения уравнения (2.2) для этого случая имеют тот же вид (3.2). Примем также выражение (3.1). Рассмотрим первое решение (3.2). В последнем из условий (2.4) правая часть равняется нулю. Из этих условий находим

$$\begin{aligned} C_0 + C_3 &= 0, & C_1 + \gamma C_2 &= 0 \\ C_2 \sin \gamma + C_3 \cos \gamma &= 0 \\ C_2 \cos \gamma - C_3 \sin \gamma &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Отсюда следует  $C_0 = 0$ ,  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$ ,  $C_3 = 0$ . Поэтому согласно первому решению (3.2)  $w = 0$ . Этот результат не меняется и при отрицательном значении  $\alpha^2$  (при вакуумировании). Второе решение (3.2) при удовлетворении граничным условиям также обращается в нуль.

Таким образом, учет влияния окружающего давления на стержень не приводит к изменению классического результата об отсутствии отклоненного равновесного состояния стержня при действии следящей силы [1–3].

Как известно [1–3, 5, 7], для суждения об устойчивости консольного стержня в случае следящей сжимающей силы требуется рассмотрение его динамики. Принимаем  $w = W(\xi)\exp(i\Omega t)$ . Из (2.2) следует

$$\frac{d^4 W}{d\xi^4} + \gamma^2 \frac{d^2 W}{d\xi^2} - \mu^2 W = 0, \quad \mu^2 = \frac{\Omega^2}{\omega^2} \quad (4.2)$$

Решение уравнения (4.2) имеет вид

$$W = C_0 \sin \gamma_1 \xi + C_1 \cos \gamma_1 \xi + C_2 \operatorname{sh} \gamma_2 \xi + C_3 \operatorname{ch} \gamma_2 \xi$$

$$\gamma_{1,2} = \frac{\gamma}{2} \left( \pm 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{2\mu}{\gamma} \right)^2} \right) \quad (4.3)$$

Такое решение рассмотрено в [6, 7]. Удовлетворение (4.3) условиям (2.4) с нулевой правой частью в четвертом условии приводит к системе четырех уравнений относительно констант. Соответствующее трансцендентное уравнение позволяет установить значение нагрузки, когда параметр  $\mu = \Omega/\omega$  становится комплексным. Если он имеет отрицательную мнимую часть, то  $\exp(i\Omega t)$  неограниченно возрастает со временем. При этом критическое значение следящей силы в отсутствии давления определяется формулой (1.2). С учетом обозначений (2.2) имеем  $\gamma_*^2 = P_* L^2/D$ .

Так как при одновременном действии следящей силы и бокового давления  $\gamma^2 = \beta^2 - \alpha^2$ , то можно записать  $\beta_*^2 = \gamma_*^2 + \alpha^2$  или

$$P_* \approx \frac{2\pi^2 D}{L^2} + pF \quad (4.4)$$

Таким образом, при действии на стержень избыточного бокового давления критическое значение следящей силы возрастает. Наоборот, при вакуумировании поверхности стержня это значение уменьшается.

До сих пор все результаты относились к постановке задачи, где на верхний срез стержня избыточное давление  $p$  не действует. Если это допущение снять и принять, что следящая сила возникает в результате действия давления  $p$ , то  $P = pF$  или  $\beta^2 = \alpha^2$ . Поэтому  $\gamma^2 = 0$ . Пример такой постановки задачи рассматривается далее.

В случае постановки задачи согласно рис. 1, а имеем  $\gamma^2 = \beta^2 - \alpha^2$ . Так как при силе сжатия  $P = pF$  и  $\alpha^2 = \beta^2$ ,  $\gamma^2 = 0$ , то не происходит потери устойчивости стержня. Это известный результат, отмеченный во введении к статье.

**5. Совместное действие давления, сил неизменного и изменяющегося направления.** Если на верхний торец стержня действует одновременно вертикальная сила  $P_1$  и следящая сила  $P_2$ , можно предположить, что при преобладающем действии первой из них

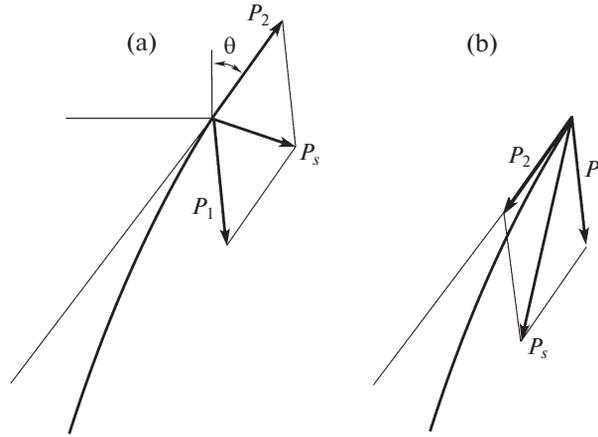


Рис. 4. Схема совместного действия сжимающих сил неизменного и изменяющегося направления

поведение стержня будет ближе к случаю на рис. 1, b. В противном случае возможна реализация поведения в случае рис. 1, c.

Статический изгиб описывается уравнением (2.2) без последнего члена, в котором  $\gamma^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 - \alpha^2$ , где  $\beta_1^2 = P_1 L^2 / D$ ,  $\beta_2^2 = P_2 L^2 / D$ ,  $\alpha^2 = pFL^2 / D$ . В последнем из граничных условий (2.4) вместо  $\beta^2$  будет  $\beta_1^2$ . Вместо (3.3) теперь решение имеет вид

$$\frac{w}{W_0} = \frac{\beta_1^2 (\sin \gamma - \gamma \xi \cos \gamma - \sin \gamma(1 - \xi))}{\gamma(\beta_1^2 \cos \gamma + \beta_2^2 - \alpha^2)}, \quad \gamma^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 - \alpha^2 \quad (5.1)$$

При  $\beta_2 = 0$  отсюда следует решение (3.3). Более подробно рассмотрим случай  $\alpha = 0$ . Решение (5.1) неограниченно возрастает при

$$\cos \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} = -\beta_2^2 / \beta_1^2 \quad (5.2)$$

Уравнение (5.2) справедливо в пределах  $-1 < \beta_2^2 / \beta_1^2 < 1$ . Следовательно, следящая сила  $P_2$  должна быть меньше силы  $P_1$ . Будем считать, что сила  $P_1$  только сжимающая ( $\beta_1^2 > 0$ ), а  $P_2$  может быть как сжимающей ( $\beta_2^2 > 0$ ), так и растягивающей ( $\beta_2^2 < 0$ ). Интервал  $-1 < \beta_2^2 / \beta_1^2 < 0$  соответствует растягивающей силе  $P_2$  ( $\beta_2^2 < 0$ ). Если, например,  $\beta_2^2 / \beta_1^2 = -1/2$ , то из уравнения (5.2) следует  $\beta_1^2 = 2\pi^2/9$ . Таким образом, критическое значение сжимающей силы неизменного направления равно

$$P_{1*} = \frac{2\pi^2 D}{9L^2} \quad (5.3)$$

Оно меньше, чем значение (3.6) в отсутствие растягивающей следящей силы  $P_2$ . При  $\beta_2^2 / \beta_1^2 = -1/\sqrt{2}$  имеем  $\beta_1^2 = 0.213\pi^2$ , т.е. с увеличением растягивающей силы  $P_2$  критическое значение сжимающей силы  $P_{1*}$  уменьшается.

Интервал  $\beta_2^2/\beta_1^2 > 0$  соответствует сжимающей следящей силе  $P_2$ . Если  $\beta_2^2/\beta_1^2 = 1/2$ , то из уравнения (5.2) получаем  $\beta_1^2 = 8\pi^2/27$  и

$$P_{1*} = \frac{8\pi^2 D}{27L^2} \quad (5.4)$$

Это значение больше, чем критическое значение (3.6) при  $P_2 = 0$  (числовой коэффициент в (5.4) равен 0.296 против 0.25 в (3.6)).

Предельное увеличение при  $\beta_2^2/\beta_1^2 = 1$  достигает  $\beta_1^2 = \pi^2/2$ . Таким образом при равенстве сжимающих сил  $P_1$  и  $P_2$  критическое значение

$$P_{1*} = \frac{\pi^2 D}{2L^2} \quad (5.5)$$

в два раза выше, чем в отсутствии следящей силы.

Эти результаты, на первый взгляд парадоксальные, объясняются тем, что при  $P_1 > 0$ ,  $P_2 < 0$  их равнодействующая  $P_s$  создает больший изгибающий момент за счет увеличения соответствующего плеча (рис. 4, а). Наоборот, при  $P_1 > 0$ ,  $P_2 > 0$  их равнодействующая  $P_s$  создает меньший изгибающий момент за счет резкого уменьшения плеча (рис. 4, б).

Отметим, при  $\alpha = 0$  приходим к задаче, рассмотренной в книге [3]. В ней предполагается, что сжимающая сила прикладывается под углом  $\theta$ , отличным от  $dw/dx$  при  $\xi = 1$ . Определяется то значение  $\theta$ , когда стержень теряет устойчивость.

В общем случае из (5.1) следует уравнение устойчивости

$$\cos \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 - \alpha^2} = -\frac{\beta_2^2 - \alpha^2}{\beta_1^2} \quad (5.6)$$

которое справедливо в интервале  $-\beta_1^2 \leq \beta_2^2 - \alpha^2 \leq \beta_1^2$ .

В частном случае  $\beta_2^2 - \alpha^2 = -\beta_1^2/2$  из (5.6) следует  $\beta_1^2 = 2\pi^2/9$ . Критическое значение силы  $P_{1*}$  дается формулой (5.3). Следовательно, для реализации этого варианта требуется меньшее значение растягивающей следящей силы ( $\beta_2^2 < 0$ ), чем в рассмотренном выше случае (при  $\alpha = 0$ ), если окружающее давление положительно ( $\alpha^2 > 0$ ). Наоборот, при вакуумировании ( $\alpha^2 < 0$ ) растягивающая сила  $P_2$  должна быть выше для достижения значения (5.3).

В качестве примера одновременного действия положительных сил  $P_1$  и  $P_2$  можно привести схему, где сила  $P_1$  создается весом шара радиуса  $R$  из материала с плотностью  $\rho$ . Она равна  $P_1 = (4\pi/3)R^3 g\rho$ , где  $g$  – гравитационное ускорение. Следящая сила представляет собой равнодействующую давления на поверхность шара за вычетом площади поперечного сечения стержня. Она равна  $P_2 = pF$ , где  $F$  – площадь сечения стержня.

Так как в данном примере  $\beta_2^2 = \alpha^2$ , то из (5.6) следует  $\cos\beta_1 = 0$ ,  $\beta_1 = \pi/2$ . Поэтому критическое значение  $P_{1*}$  определяется формулой (3.6). Таким образом, данная постановка задачи не приводит к какой-либо зависимости изгиба и устойчивости от избы-

точного давления  $p$ . С учетом изгибной жесткости стержня  $D = \pi E d^4 / 64$  выражение (3.6) дает

$$P_* = \frac{\pi^3 E d^4}{256 L^2} \quad (5.7)$$

Для указанного выше шара связь между входными параметрами имеет вид

$$\frac{R^3 L^2}{d^4} \approx \frac{E}{34 g \rho} \quad (5.8)$$

При  $L = 0.1$  м,  $d = 0.001$  м,  $R = 0.02$  м,  $E = 2 \times 10^{11}$  кг/м · с<sup>2</sup>,  $\rho = 7.8$  кг/м<sup>3</sup>,  $g = 10$  м/с<sup>2</sup> условие (5.8) выполняется. Критическое значение силы веса равно  $P_* = 2.42$  кг · м/с<sup>2</sup>.

Если  $\beta_2^2 - \alpha^2 = -\beta_1^2$  ( $\gamma^2 = 0$ ), то будет иметь место решение (3.10), где вместе  $\beta^2$  следует подставить  $\beta_1^2$ .

Уравнение (5.6) позволяет анализировать варианты упругой устойчивости консольного стержня в зависимости от внешних сил.

**6. Заключение.** 1. Известные особенности устойчивости прямолинейной формы консольного стержня еще более усложняются при действии на его боковую поверхность избыточного давления. Это давление может оказывать как стабилизирующее, так и дестабилизирующее влияние на прямолинейную форму стержня. Эти эффекты тесно связаны с направлением сил и граничными условиями.

2. В отличие от случая двухопорного стержня положительное избыточное давление на поверхность консольного стержня уменьшает критическое значение сжимающей силы неизменного направления, а вакуумирование — увеличивает.

3. Действие избыточного давления на поверхность консольного стержня не вносит изменения в известный результат об отсутствии равновесного отклоненного положения под действием сжимающей следящей силы. Происходит стабилизация динамического поведения при действии положительного избыточного давления и дестабилизация при вакуумировании.

4. При одновременном действии сжимающей силы неизменного направления и сжимающей следящей силы происходит уменьшение критического значения первой из них. В случае растягивающей следящей силы это значение увеличивается, что объясняется изменением направления их равнодействующей.

5. Действие окружающего избыточного давления приводит к большему разнообразию упругого поведения стержня. Например, при следящей силе, возникающей в результате действия давления не только на боковую поверхность, но и на торцевое сечение стержня исчезает влияние этого давления на изгиб и устойчивость.

Работа поддержана средствами государственного бюджета по госзаданию (№ 0246-2019-0088) и грантом РФФИ (№ 18-01-00150).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Николаи Е.Л. Труды по механике. М.: Гостехтеориздат, 1955. 582 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматлит, 1961. 339 с.
3. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Физматлит, 1967. 420 с.
4. Pfluger A. Stabilitats probleme der Elastostatik. Berlin: Springer-Verlag, 1950. 217 p.

5. *Феодосьев В.И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Гостехиздат, 1973. 400 с.
6. *Beck M.* Die Knicklast des einseitig eingespannten tangential gedruckten Stabes // *Zeitschr. Angew. Math. Phys.* 1952. V. 3. № 3. P. 225–228.
7. *Дейнеко К.С., Леонов М.Л.* Динамический метод исследования устойчивости сжатого стержня // *ПММ.* 1955. Т. 19. № 6. С. 738–744.
8. *Rayleigh Strutt J.W.* The Theory of Sound. Vol. 1. London: Macmillan, 1894. 500 p. = *Стретт Дж.В.* Теория звука. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1955. 504 с.
9. *Love A.* A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge: Univ. Press, 1927. 643 p. = *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
10. *Shen H.Sh.* Postbuckling Behavior of Plates and Shells. Shanghai Jiao Tong University, 2017. 675 p.
11. *Ильгамов М.А.* Влияние давления окружающей среды на изгиб тонкой пластины и плёнки // *ДАН.* 2017. Т. 476. № 4. С. 402–405.
12. *Ильгамов М.А.* Изгибные колебания пластины при изменении среднего давления на ее поверхностях // *Акустический журнал.* 2018. Т. 64. № 5. С. 598–604.
13. *Handelman G.H.* Buckling under locally hydrostatic pressure // *J. Appl. Mech.* 1946. V. 13. P. 198–200.
14. *Ilgamov M.A.* Static Problems of Hydroelasticity. М.: Nauka, 1998. 209 p.
15. *Ишлинский А.Ю.* Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // *Украинский математический журнал.* 1954. Т. 6. № 2. С. 140–146.
16. *Newland D.E.* Whirling of a cantilever elastic shaft subjected to external pressure // *J. Mech. Eng. Sci.* 1972. V. 14. № 1. P. 11–18.
17. *Ilgamov M.A., Tang D., Dowell E.* Flutter and forced response of a cantilevered pipe: the influence of internal pressure and nozzle discharge // *J. Fluids Struct.* 1994. № 8. P. 139–156.