ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 4, с. 89–97

УДК 539.3

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ СПОСОБАХ ГАШЕНИЯ ГИДРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ

© 2021 г. Н. В. Баничук[a], С. Ю. Иванова[a,*]

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**e-mail syuivanova@yandex.ru*

Поступила в редакцию 23.11.2020 г.
После доработки 28.11.2020 г.
Принята к публикации 03.12.2020 г.

Рассматривается проблема активного подавления колебаний упругой панели, продольно движущейся в потоке идеальной жидкости. Уравнение динамики панели включает реакцию жидкости и внешнее механическое воздействие, служащее для реализации процесса демпфирования. Выводятся условия экстремальности гашения поперечных колебаний и оценивается эффективность оптимального распределения прикладываемых к панели усилий и оптимальной временной программы функционирования внешнего воздействия.

Ключевые слова: гидроупругая вибрация, гашение колебаний, оптимизация демпфирующих воздействий

DOI: 10.31857/S0572329921040036

1. Введение. Изучение процессов подавления колебаний связано с исследованием движения материалов с большой транспортной скоростью. Примеры таких процессов возникают в промышленности при производстве бумаги, стальных и текстильных полотен и др. Поэтому проблема подавления колебаний механических систем представляет не только теоретический, но и значительный прикладной интерес. Для систем с распределенными параметрами колебания и динамическая устойчивость изучались как в рамках самосопряженных (консервативных), так и несамосопряженных (неконсервативных) задач. Ранее возникающие в этом направлении вопросы рассматривались в работах [1–3]. Значительное внимание при этом уделялось проблемам колебаний деформируемых систем, взаимодействующих с жидкостью или газом (см., например, [4–6]). Отметим здесь задачи о гидроупругих взаимодействиях, основанные на точных выражениях для реакции жидкости [7–11]. Проблемы оптимизации движущихся упругих и вязкоупругих материалов, взаимодействующих с идеальной жидкостью, исследовались в [12–14].

Данная работа посвящена отысканию оптимальных способов подавления возникающих поперечных колебаний панели, движущейся в потоке идеальной жидкости, и оценке эффективности оптимальных распределений прикладываемых к панели усилий и оптимальных временных программ приложения внешних демпфирующих воздействий.

2. Уравнение поперечных колебаний панели в потоке идеальной жидкости. В безразмерных переменных $x' = x/l$, $t' = t/\tau$ (l – половина длины пролета, τ – характерное время) уравнение поперечных колебаний движущейся поступательно и взаимодействующей с потоком жидкости панели записывается в безразмерном виде [15]

$$
\begin{gathered}
L(w) \equiv \alpha^2 (1 + r_m) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\alpha\kappa (1 + r_m r_v) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \\
+ [\kappa^2 (1 + r_m r_v^2) - 1] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = g(x,t), \quad (x,t) \in \Omega
\end{gathered} \tag{2.1}
$$

с учетом безразмерных параметров

$$
\begin{gathered}
\alpha = \frac{1}{\tau C}, \quad \beta = \frac{D}{mC^2 l^2} = \frac{D}{l^2 T}, \quad \kappa = \frac{V_0}{C} \\
r_m = \frac{m_a}{m}, \quad r_v = \frac{v_\infty}{V_0}, \quad \gamma = \frac{l_0}{m} \rho_f
\end{gathered} \tag{2.2}
$$

причем $C = \sqrt{T/m}$ – характерная размерная скорость, $w(x,t)$ – поперечное перемещение, m – масса, приходящаяся на единицу площади панели, T – величина натяжения, D – изгибная жесткость, $g(x,t)$ – прикладываемое поперечное управляющее воздействие, V_0 – поступательная скорость панели, v_∞ – скорость потока на бесконечности, Ω – заданная область: $\Omega = \{(x,t) : -1 \le x \le 1,\ 0 \le t \le t_f\}$. Механическое воздействие, подавляющее поперечные колебания, задается в форме

$$
g(x,t) = \nu(x) f(t), \quad (x,t) \in \Omega \tag{2.3}
$$

где $\nu(x)$ задает геометрию прикладываемого воздействия, а $f(t)$ – временная программа силового воздействия на панель.

3. Задача оптимизации. Рассматриваемая ниже задача оптимального подавления поперечных колебаний движущейся панели заключается в минимизации энергетического (квадратичного) функционала

$$
J_g = \int_{-1}^{1} \left\{ \alpha_1 w^2 + \alpha_2 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\}_{t=t_f} dx \tag{3.1}
$$

характеризующего качество процесса демпфирования колебаний при ограничении на демпфирующее воздействие

$$
J_\mu = \int_\Omega g^2 (x,t) \, d\Omega \le M_0 \tag{3.2}
$$

записываемом для удобства при помощи введения вспомогательной неизвестной θ в виде строгого равенства [16]

$$
J_\mu - M_0 + \theta^2 = 0 \tag{3.3}
$$

где $M_0 > 0$ – заданная положительная константа, а $\alpha_1 \ge 0$ и $\alpha_2 \ge 0$ – заданные параметры.

При этом рассматриваются следующие начальные и граничные условия:

$$
(w)_{t=0} = g_1(x), \quad \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_{t=0} = g_2(x), \quad x \in [-1,1] \tag{3.4}
$$

$$
(w)_{x=-1} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=-1} = 0, \quad (w)_{x=1} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=1} = 0, \quad t \in [0, t_f] \tag{3.5}
$$

в которых t_f – безразмерное время окончания процесса демпфирования колебаний, а $g_1(x)$ и $g_2(x)$ – заданные начальные возмущения.

Необходимые условия оптимальности процесса демпфирования колебаний сводятся к равенству нулю вариации расширенного функционала Лагранжа, то есть

$$\delta J = \delta J_g + \delta J_a + \mu\left(2\int_\Omega g\delta g d\Omega + 2\theta\delta\theta\right) = 0 \tag{3.6}$$

где μ – множитель Лагранжа, а вариации δJ_g, δJ_a даются выражениями

$$\delta J_a = \int_\Omega v\left[L(\delta w) - \delta g\right] d\Omega \tag{3.7}$$

$$\delta J_g = 2\int_{-1}^{1}\left[\alpha_1 w\delta w + \alpha_2\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right]_{t=t_f} dx \tag{3.8}$$

Здесь $v = v(x,t)$ – введенная сопряженная переменная, удовлетворяющая по определению следующим граничным и начальным условиям:

$$(v)_{x=-1} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{x=-1} = 0, \quad (v)_{x=1} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{x=1} = 0 \tag{3.9}$$

$$(v)_{t=t_f} = -\frac{2\alpha_2}{\alpha^2(1+r_m)}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{t=t_f}, \quad x \in [-1,1] \tag{3.10}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{t=t_f} = \frac{2}{\alpha^2(1+r_m)}\left[\alpha_1 w - \frac{2\alpha_2(1+r_m r_v)}{\alpha(1+r_m)}\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}\right]_{t=t_f}, \quad x \in [-1,1] \tag{3.11}$$

Равенство (3.6) с учетом (3.7), (3.8) и проварьированных начальных и граничных условий (3.4), (3.5) и (3.9)–(3.11) приводит к сопряженному уравнению для переменной $v(x,t)$:

$$\begin{gathered} L(v) = \alpha^2(1+r_m)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\alpha\kappa(1+r_m r_v)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t} + \\ + [\kappa^2(1+r_m r_v^2) - 1]\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0, \quad (x,t) \in \Omega \end{gathered} \tag{3.12}$$

и условию экстремума

$$\mu\theta = 0 \tag{3.13}$$

При этом

$$\int_\Omega (2\mu g(x,t) - v(x,t))\delta g d\Omega = 0 \tag{3.14}$$

Условие (3.13) означает, что для неактивного ограничения (3.2), выполняющегося со знаком строгого неравенства (3.2), (3.3), следует, что $\theta \neq 0$. Соответствующий множитель Лагранжа в этом случае, как это следует из необходимого условия оптимальности (3.13), должен полагаться равным нулю. Тем самым, ограничение (3.2) в этом случае при отыскании оптимального решения не учитывается. Если же $\mu \neq 0$, то $\theta = 0$, и соответствующее ограничение является «активным».

Вариация прикладываемого демпфирующего воздействия (2.3) имеет вид

$$\delta g(x,t) = f(t)\delta\nu(x) \tag{3.15}$$

если функция $f(t)$, то есть программа подавления колебаний панели, является заданной. Варьируемой же переменной, искомой при оптимизации подавления колебаний и определяющей способ воздействия, является функция $\nu(x)$. При этом условие оптимальности для $\nu(x)$, как это следует из (3.6)–(3.8), (2.3), (3.15), записывается в форме

$$2\mu\nu(x)\int_0^{t_f} f^2(t)\,dt - \int_0^{t_f} v(x,t)\,f(t)\,dt = 0$$

и поэтому

$$\nu(x) = \frac{1}{2\mu}\left(\int_0^{t_f} v(x,t)\,f(t)\,dt\right)\left(\int_0^{t_f} f^2(t)\,dt\right)^{-1} \tag{3.16}$$

В случае заданного способа приложения демпфирующего воздействия, то есть заданной функции $\nu(x)$, и варьируемой временной программы искомого управляющего воздействия, подавляющего колебания, условие оптимальности приводит к следующему выражению для $f(t)$ при $t \in [0, t_f]$:

$$f(t) = \frac{1}{2\mu}\left(\int_{-1}^{1} v(x,t)\,\nu(x)\,dx\right)\left(\int_{-1}^{1} \nu^2(x)\,dx\right)^{-1} \tag{3.17}$$

Так, например, если заданное воздействие прикладывается на подынтервале $[x_1, x_2]$, где $-1 \le x_1 < x_2 \le 1$, то

$$\nu(x) = \begin{cases} \nu_0, & x_1 \le x \le x_2 \\ 0, & -1 \le x \le x_1, \quad x_2 \le x \le 1 \end{cases} \tag{3.18}$$

Здесь ν_0, x_1, x_2 – заданные константы.

Множитель Лагранжа μ в (3.16), определяемый согласно (2.3), (3.2), (3.3) и (3.16), вычисляется по формуле

$$\mu^2 = \frac{1}{4M_0}\int_{-1}^{1}\left(\int_0^{t_f} v(x,t)\,f(t)\,dt\right)^2 dx\left(\int_0^{t_f} f^2(t)\,dt\right)^{-1} \tag{3.19}$$

а множитель Лагранжа μ в (3.17), как это следует из соотношений (2.3), (3.2), (3.3) и (3.17), определяется выражением

$$\mu^2 = \frac{1}{4M_0}\int_0^{t_f}\left(\int_{-1}^{1} v(x,t)\,\nu(x)\,dx\right)^2 dt\left(\int_{-1}^{1} \nu^2(x)\,dx\right)^{-1} \tag{3.20}$$

4. Алгоритм отыскания оптимального воздействия. Для отыскания способа оптимального гашения колебаний движущейся в потоке жидкости упругой панели предлагается итерационный алгоритм определения управляющих воздействий, основанный на применении выведенных условий экстремума и решении связанных терминальными условиями уравнений, определяющих распределения прогибов и сопряженной переменной. Алгоритм решения задачи оптимизации заключается в последовательном выполнении следующих итераций и шагов.

На первом шаге первой итерации алгоритма решается «прямая» задача, состоящая в интегрировании уравнений динамики (2.1) с граничными условиями (3.5) при $x = \pm 1$ и начальными условиями (3.4) при $t = 0$, описывающими начальные распределения перемещений w и скоростей $\partial w/\partial t$ при $t = 0$. На начальном этапе итерационного процесса при выполнении первого шага первой итерации в качестве демпфирующего воздействия задается некоторое неоптимальное управление $g^1(x,t)$, удовлетворяющее неравенству (3.2). На дальнейших этапах выполнения алгоритма в качестве управляющего воздействия на первом шаге принимается воздействие, получаемое из условий оптимальности на третьем шаге предыдущей итерации.

На втором шаге итерационного алгоритма с учетом найденного на первом шаге распределения $w(x,t_f)$ и соответствующих величин $\partial w/\partial t$ и $\partial^2 w/\partial t\partial x$ при $t = t_f$, входящих в терминальные условия (3.10), (3.11), решается задача возвратного интегрирования сопряженного уравнения (3.12) с граничными условиями (3.9) и условиями (3.10), (3.11) в конечный момент времени, рассматриваемыми в качестве начальных условий при отыскании переменной $v(x,t)$.

На третьем шаге с применением найденного на втором шаге выражения для сопряженной переменной $v(x,t)$ и использованием условий экстремума (3.2), (3.3), (2.3), а также выражений (3.16), (3.19) или (3.17), (3.20) находится текущее приближение для оптимального демпфирующего воздействия $g(x,t)$, прикладываемого к панели. Полученное на третьем шаге итерационного процесса демпфирующее управление рассматривается в качестве «начального», и осуществляется переход к первому шагу следующей итерации алгоритма.

Завершение итерационного процесса происходит при выполнении условия $J_g \le \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — заданный малый параметр контроля точности итерационного процесса подавления колебаний.

Приведем некоторые детали реализации описанного алгоритма, основанной на методе Галёркина [17—19]. Представим искомые распределения поперечных перемещений панели $w(x,t)$ и сопряженной переменной $v(x,t)$ в виде рядов

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{n_0} q_n(t)\Psi_n(x), \qquad v(x,t) = \sum_{n=1}^{n_0} s_n(t)\Psi_n(x) \tag{4.1}$$

где $q_n(t)$, $s_n(t)$ $(n = 1,2,\ldots,n_0)$ — неизвестные функции времени, подлежащие определению с использованием уравнений, определяющих w и v, а $\Psi_n(x)$ — функции формы, определяемые выражениями

$$\Psi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}(x+1)\right), \quad x \in [-1,1] \tag{4.2}$$

и удовлетворяющие граничным условиям (3.5) для w и (3.9) для v при $x = \pm 1$.

Для координатных функций $q_n(t)$ и $s_n(t)$ метода Галёркина получим обыкновенные дифференциальные уравнения, подставив (4.1), (4.2) в уравнения (2.1), (3.12) и умножив получающиеся соотношения на $\Psi_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ с последующим интегрированием по $x \in [-1,1]$. Выполняя стандартные операции метода Галёркина [17—19], будем иметь две системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\sum_{n=1}^{n_0}\left\{\alpha^2(1+r_m)A_{jn}\frac{d^2q_n}{dt^2} + 2\alpha\kappa(1+r_m r_v)B_{jn}\frac{dq_n}{dt} + \right.\\ \left. +([\kappa^2(1+r_m r_v^2)-1]C_{jn}+\beta D_{jn})q_n\right\} - G_j(t) = 0\end{gathered} \tag{4.3}$$

$$\begin{gathered}\sum_{n=1}^{n_0}\left\{\alpha^2(1+r_m)A_{jn}\frac{d^2s_n}{dt^2} + 2\alpha\kappa(1+r_m r_v)B_{jn}\frac{ds_n}{dt} + \right.\\ \left. +([\kappa^2(1+r_m r_v^2)-1]C_{jn}+\beta D_{jn})s_n\right\} = 0\end{gathered} \tag{4.4}$$

Коэффициенты A_{jn}, B_{jn}, C_{jn}, D_{jn} и функции $G_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ определяются выражениями [15]

$$A_{jn} = \delta_{jn}, \quad C_{jn} = -\left(\frac{j\pi}{2}\right)^2 \delta_{jn}, \quad D_{jn} = \left(\frac{j\pi}{2}\right)^4 \delta_{jn}, \quad G_j(t) = \int_{-1}^{1} \Psi_j g(x,t)\,dx$$

$$B_{jn} = 0, \quad j = n; \quad B_{jn} = \frac{nj}{n^2 - j^2}[(-1)^{j+n} - 1], \quad j \neq n$$

а начальные условия для q_j при $t = 0$ и условия для s_j в конечный момент времени $t = t_f$ записываются в виде $(j = 1, 2, \ldots)$

$$(q_j)_{t=0} = \int_{-1}^{1} \Psi_j g_1(x)\,dx, \quad \left(\frac{dq_j}{dt}\right)_{t=0} = \int_{-1}^{1} \Psi_j g_2(x)\,dx \tag{4.5}$$

$$\begin{gathered}(s_j)_{t=t_f} = -\frac{2\alpha_2}{\alpha^2(1 + r_m)}\left(\frac{dq_j}{dt}\right)_{t=t_f} \\ \left(\frac{ds_j}{dt}\right)_{t=t_f} = \frac{2}{\alpha^2(1 + r_m)}\left(\alpha_1 q_j - \frac{2\alpha_2\kappa(1 + r_m r_v)}{\alpha(1 + r_m)}\sum_{n=1}^{n_0} B_{jn}\frac{dq_n}{dt}\right)_{t=t_f}\end{gathered} \tag{4.6}$$

Отметим некоторые свойства и обобщения используемого метода, приведенные в [17–19].

5. Пример оптимальной программы подавления колебаний. Рассмотрим случай задания $\nu(x)$ в виде (3.18) и отыскания программы прикладываемого воздействия, т.е. переменной $f(t)$, согласно (3.17), (3.20), на временном отрезке $[0, t_f]$ ($t_f > 0$ – заданный параметр). Предположим сначала, что $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ в (3.18), и проиллюстрируем процесс отыскания программы оптимального демпфирования, полагая для наглядности

$$\begin{gathered}g_1(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x + 1)\right), \quad g_2(x) = 0, \quad x \in [-1, 1] \\ \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad n_0 = 1, \quad \Psi_1(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x + 1)\right)\end{gathered} \tag{5.1}$$

На первом шаге рассматриваемого итерационного процесса при выполнении первой итерации примем

$$g^{(1)}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega; \quad G_1^{(1)}(t) = \int_{-1}^{1} \Psi_1 g^{(1)}(x,t)\,dx = 0, \quad t \in [0, t_f]$$

и проинтегрируем уравнение

$$\frac{d^2 q_1^{(1)}}{dt^2} + a_1 q_1^{(1)} = 0, \quad a_1 = \frac{[\kappa^2(1 + r_m r_v^2) - 1]C_{11} + \beta D_{11}}{\alpha^2(1 + r_m)A_{11}} \tag{5.2}$$

с начальными условиями

$$(q_1^{(1)})_{t=0} = \int_{-1}^{1} \Psi_1 g_1(x)\,dx = 1, \quad \left(\frac{dq_1^{(1)}}{dt}\right)_{t=0} = \int_{-1}^{1} \Psi_1 g_2(x)\,dx = 0 \tag{5.3}$$

Имеем

$$q_1^{(1)}(t) = \cos(\sqrt{a_1}t), \quad t \in [0, t_f] \tag{5.4}$$

Используя это решение на втором шаге первой итерации алгоритма при возвратном интегрировании уравнения для $s_1^{(1)}$ с условиями в конечный момент времени $t = t_f$

$$\frac{d^2 s_1^{(1)}}{dt^2} + a_1 s_1^{(1)} = 0, \quad (s_1^{(1)})_{t=t_f} = 0, \quad \left(\frac{ds_1^{(1)}}{dt}\right)_{t=t_f} = \frac{2\alpha_1}{\alpha^2 (1 + r_m)} (q_1^{(1)})_{t=t_f}$$

находим

$$\begin{gathered} s_1^{(1)}(t) = \frac{Q}{\sqrt{a_1}} \sin(\sqrt{a_1}(t - t_f)) = Q_1 \sin(\sqrt{a_1} t) + Q_2 \cos(\sqrt{a_1} t) \\ Q = \frac{2\alpha_1 \cos(\sqrt{a_1} t_f)}{\alpha^2 (1 + r_m)}, \quad Q_1 = \frac{Q \cos(\sqrt{a_1} t_f)}{\sqrt{a_1}}, \quad Q_2 = -\frac{Q \sin(\sqrt{a_1} t_f)}{\sqrt{a_1}} \end{gathered} \tag{5.5}$$

При этом выражение для сопряженной переменной запишется в виде

$$v^{(1)}(x,t) = s_1^{(1)}(t)\Psi_1(x) = \frac{Q}{\sqrt{a_1}} \sin(\sqrt{a_1}(t - t_f)) \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right) \tag{5.6}$$

Применяемая на второй итерации программа демпфирующего воздействия находится при помощи соотношений (3.17), (3.20). Используя соотношение (3.18) для $\nu(x)$ при $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, а также выражения (3.17), (3.20) и (5.6), будем иметь

$$f^{(2)}(t) = \frac{\mathrm{Q} \sin(\sqrt{a_1}(t - t_f))}{\mu\pi\nu_0 \sqrt{a_1}}, \quad \mu^2 = \frac{2Q^2 t_f}{\pi^2 a_1 M_0} \tag{5.7}$$

Используя множитель Лагранжа из формулы (5.7) для $f^{(2)}(t)$, будем иметь

$$f^{(2)}(t) = \frac{1}{\nu_0}\left(\frac{M_0}{2t_f}\right)^{1/2} \sin(\sqrt{a_1}(t - t_f)) \tag{5.8}$$

В более общем случае, когда демпфирующее воздействие $\nu_0 f^{(2)}(t)$ прикладывается к участку панели $-1 \le x_1 \le x \le x_2 \le 1$ (см. (3.18)), приходим к выражениям

$$\begin{gathered} f^{(2)}(t) = \frac{\mathrm{Q}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}(x_1+1)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}(x_2+1)\right)\right]}{\mu\pi\nu_0 (x_2 - x_1)\sqrt{a_1}} \sin(\sqrt{a_1}(t - t_f)) \\ \mu^2 = \frac{Q^2 t_f}{2\pi^2 a_1 M_0 (x_2 - x_1)}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}(x_1+1)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}(x_2+1)\right)\right]^2 \end{gathered} \tag{5.9}$$

Применим найденное управление в форме (5.7) или (5.8) при интегрировании уравнения колебаний панели, записываемого в виде

$$\begin{gathered} \frac{d^2 q_1^{(2)}}{dt^2} + a_1 q_1^{(2)} + a_2 = 0, \quad G_1^{(2)} = \int_{-1}^{1} \Psi_1(x) g^{(2)}(x,t)\,dx \\ a_2(t) = -\frac{G_1^{(2)}(t)}{\alpha^2 (1 + r_m) A_{11}} = -\frac{4}{\pi}\left(\frac{M_0}{2t_f}\right)^{1/2} \sin(\sqrt{a_1}(t - t_f)) \end{gathered} \tag{5.10}$$

Находим

$$q_1^*(t) \approx q_1^{(2)} = -\frac{Q_0 \cos(\sqrt{a_1} t_f)}{4\mu\gamma_1^2 a_1^{3/2}} \sin(\sqrt{a_1} t) + \left\{1 - \frac{Q_0 \sin(\sqrt{a_1} t_f)}{4\mu\gamma_1^2 a_1^{3/2}}\right\} \cos(\sqrt{a_1} t) -$$

$$- \frac{1}{4\mu\gamma_1^2 a_1}\{(Q_{01}\sqrt{a_1} t - Q_{02})\cos(\sqrt{a_1} t) - Q_{02}\sqrt{a_1} t \sin(\sqrt{a_1} t)\} \tag{5.11}$$

$$Q_0 = \frac{2\alpha_1}{\gamma_1} q_1^{(1)}(t_f), \quad Q_{01} = \frac{Q}{\sqrt{a_1}} \cos(\sqrt{a_1} t_f), \quad Q_{02} = -\sin(\sqrt{a_1} t_f)$$

где $\gamma_1 = 1 + \pi l \rho_f / 4m$.

Оптимальное значение функционала качества дается выражением

$$J_g^* = (J_g)_{g=g^*} = \alpha_1 (q_1^{(2)})^2_{t=t_f} \tag{5.12}$$

6. Пример определения оптимальной позиционной характеристики. Рассмотрим случай задания программы воздействия в виде $f(t) = f_0 \sin \sqrt{a_1}(t - t_f)$ (f_0 – заданный параметр) и отыскания оптимальной позиционной характеристики, т.е. функции $\nu = \nu(x)$, определенной при $x \in [-1,1]$. При этом процесс отыскания $\nu(x)$ реализуется при тех же характеристиках и параметрах модели, что и в предыдущем примере (см. (5.1)). Непосредственно для нахождения $\nu(x)$ и соответственной величины множителя Лагранжа μ используются представленные ранее выражения (3.16), (3.19). Опуская промежуточные выкладки, будем иметь

$$\nu(x) = \frac{Q}{4\mu\sqrt{a_1}} t_f \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right), \quad \mu^2 = \frac{Q t_f}{8 M_0 \sqrt{a_1}} \tag{6.1}$$

Соответствующее значение функционала качества процесса подавления колебаний определяется при помощи формулы (5.12).

7. Некоторые замечания и выводы. Описание поведения идеальной жидкости и процесса поперечных колебаний упругой панели представлено для различных способов закрепления краев панели и начального распределения ее положения и скоростей. При этом гидродинамическая реакция на произвольное расположение колеблющейся панели находится аналитическим методом теории функций комплексного переменного в виде интегрального потенциала, зависящего от текущих перемещений. Использование аналитического выражения для гидродинамической реакции существенно упрощает учет взаимодействия потока жидкости и движущейся упругой панели.

Качество процесса гашения колебаний оценивается интегральным энергетическим показателем (критерием), зависящим как от окончательного положения панели, так и от достигаемого распределения скоростей. Выведены условия экстремальности функционала качества и предложен итерационный метод построения программы эффективного гашения возникающих поперечных колебаний системы. Рассмотрены иллюстрирующие примеры определения оптимального приложения управляющих воздействий как во времени, так и позиционно.

Работа выполнена по теме госзадания (номер госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при частичной финансовой поддержке Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 20-08-00082а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
2. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматлит, 1961. 339 с.
3. *Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Шаранюк А.В.* Динамика конструкций. Анализ и оптимизация. М.: Наука, 1989. 262 с.
4. *Мовчан А.А.* Об устойчивости панели, движущейся в газе // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 2. С. 231–243.
5. *Bisplinghoff R.L., Ashley H., Halfman R.* Aeroelasticity. Cambridge : Addison-Wesley Publishing Company, 1955. 860 p. = *Бисплингхоф Р.Л., Эшли Х., Халфмэн Р.* Аэроупругость. М.: ИЛ, 1958. 800 с.
6. *Болотин В.В., Гаврилов Ю.В., Макаров Б.П. и Швейко Ю.Ю.* Нелинейные задачи устойчивости плоских панелей при больших сверхзвуковых скоростях // Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение. 1959. № 3. С. 3–14.
7. *Баничук Н.В., Миронов А.А.* Задачи оптимизации для пластин, колеблющихся в идеальной жидкости // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 3. С. 520–527.
8. *Баничук Н.В.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 256 с.
9. *Ashley H., Landahl M.* Aerodynamics of Wings and Bodies. New York: Dover Publ., 1965. 304 p.
10. *Lighthill J.* An informal introduction to theoretical fluid mechanics. Oxford: Scientific Publication, 1986. 260 p.
11. *Banichuk N., Jeronen J., Neittaanmäki P., Saksa T., Tuovinen T.* Mechanics of Moving Materials. Cham: Springer, 2014. 253 p.
12. *Banichuk N., Barsuk A., Jeronen J., Tuovinen T., Neittaanmäki P.* Stability of axially moving materials. Cham, Switzerland: Springer, 2020. 642 p.
13. *Ashley H.* On making things the best aeronautical uses of optimization // J. Aircr. 1982. V. 19. № 1. P. 5–28.
14. *Banichuk N.V.* Problems and methods of optimal structural design. New York: Plenum Press, 1983. 313 p.
15. *Баничук Н.В., Иванова С.Ю.* О подавлении поперечных колебаний упругой панели, продольно движущейся в потоке жидкости // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2020. Т. 492. С. 81–85.
16. *Баничук Н.В.* Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука, 1986. 303 с.
17. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
18. *Вишик М.И.* Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения // Матем. сб. 1956. Т. 39 (81). № 1. С. 51–148.
19. *Свирский И.В.* Методы Бубнова–Галёркина и последовательных приближений. М.: Наука, 1968. 199 с.